

Wissensbasierte Diagnostik

Kap. 4.5:
Exkurs: Fuzzy Logik

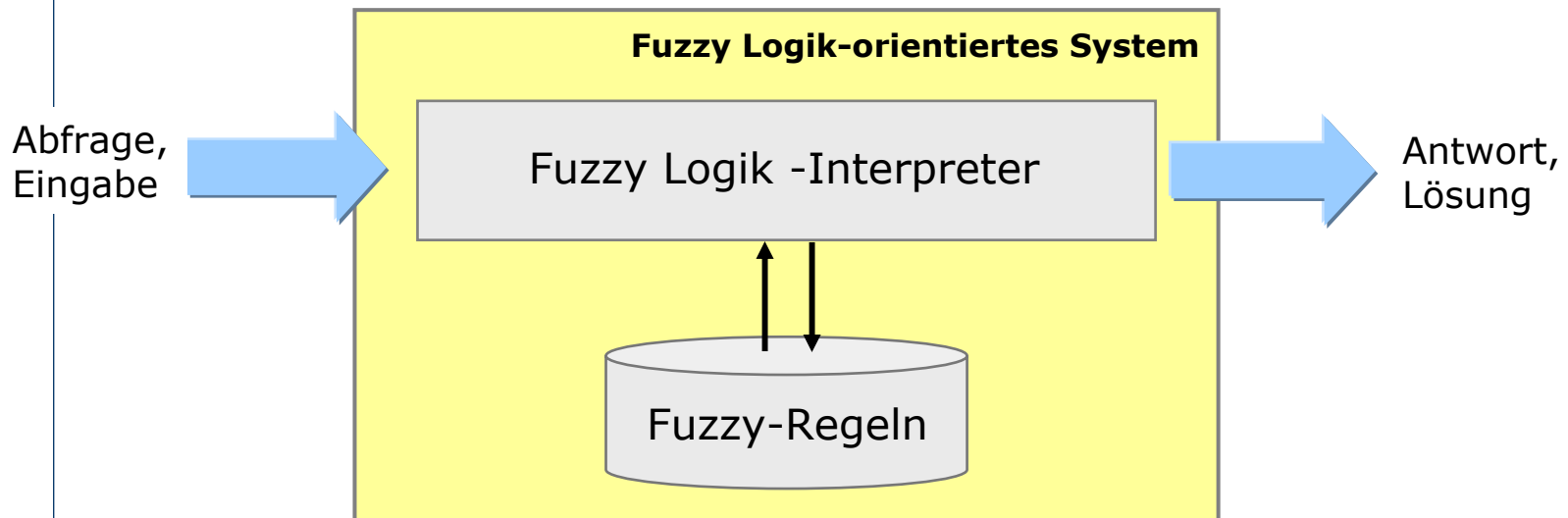
Dr. N. Waleschkowski
Fachbereich Informatik

Vorlesung Master-Studiengang
Wintersemester 2009/10



Fuzzy Logik und Verarbeitung – Das Prinzip

- In einem Fuzzy-System wird das Wissen in Form von Fuzzy-Regeln und einem Fuzzy Logik-Prozessor verarbeitet.



Unscharfe Begriffe (1)

- Menschen sind in der Lage, ein zerknülltes Blatt Papier aus einigen Metern Entfernung in einen Papierkorb zu werfen, ohne dabei auch nur eine einzige Differentialgleichung zu lösen.
- Bereits bei einer solchen Aufgabe finden sich viele unscharfe Begriffe:
 - Das Papier ist *stark* zusammengeknüllt.
 - Der Papierkorb ist nicht *ganz so weit* weg.
 - Man holt *kräftig* zum Werfen aus.
 - Der Papierkorb wurde *knapp* verfehlt, weil man *etwas zu weit* geworfen hat.
 - Das nächste Mal wird man *etwas weniger kräftig* werfen.
- Trotz – oder gerade wegen (?) – dieser vielen Unschärfen kann man auf dieser Basis mit anderen Menschen kommunizieren.

Unscharfe Begriffe (2)

■ **Kettenschlüsse:**

- Faktum: Die Badewanne ist voll.
- Regel: Entnimmt man der Wanne einen Tropfen, so ist sie immer noch voll.

Die Regel kommt uns im Alltag richtig vor. Dennoch: Die Wanne bleibt danach auch nach sehr vielen wiederholten Anwendungen der Regel voll, was aber nicht stimmen kann. → #

■ **Logische Paradoxien:**

- Satz: „Dieser Satz ist falsch!“
- Ist der Satz falsch oder nicht?
- Annahme: Der Satz ist wahr. Dann besagt er, daß der Satz falsch ist. → #
- Annahme: Der Satz ist falsch. Dann ist sein Inhalt falsch. Also ist der Satz wahr. → #

Unscharfe Begriffe (3)

- ◆ Jemand, der größer als 1,80m ist, ist groß.
- ◆ Ist jemand, der 1,79m groß ist, nicht groß?

- ◆ Jemand mit einem Jahreseinkommen von 60.000 € erhält einen Bankkredit.
- ◆ Soll jemand, der ein Jahreseinkommen von 59.900 € hat, keinen Kredit erhalten?

- ◆ Die klassische Logik (entweder wahr oder falsch) setzt die Existenz von exakten Schwellenwerten und eine eindeutige Entscheidbarkeit voraus.

- ◆ Fuzzy-logische Aussagen sind nicht nur wahr oder falsch, sondern können graduell erfüllt sein.
- ◆ Damit können sogar Paradoxien aufgelöst werden.
 $A \Leftrightarrow \neg A$ (Die Gesamtaussage hat den Wahrheitsgehalt 0,5.)

Unsicherheitsmodellierung

Es gibt verschiedene Arten von Unsicherheit:

- ◆ Stochastische Unsicherheit
 - Die Wahrscheinlichkeit, das Ziel zu treffen, ist 0,8.
- ◆ Lexikale Unsicherheit
 - große Leute, schnelle Autos, helle Farbtöne
- ◆ Informationale Unsicherheit
 - Kreditwürdigkeit

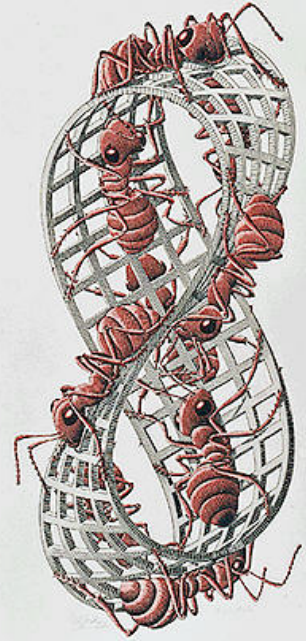
Behandlung der Unsicherheit in der KI durch

- ◆ Probabilistische Ansätze
- ◆ Konfidenzfaktoren
- ◆ Demster-Shafer-Ansatz
- ◆ ...

Die Ergebnisse waren nur bedingt zufriedenstellend.

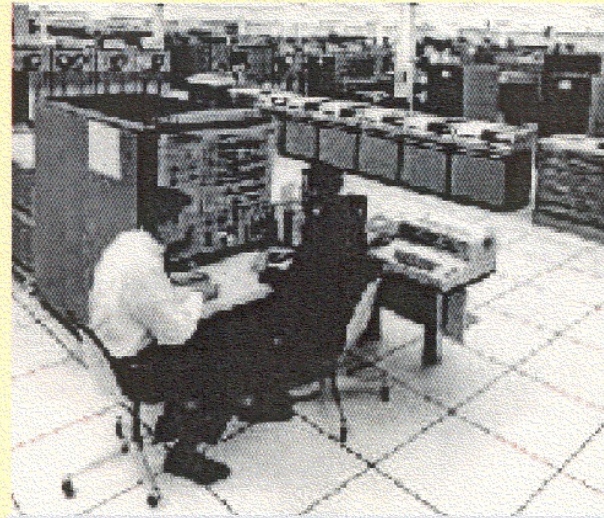
Fuzzy Logik - eine Disziplin zur Behandlung der Unschärfe

- Präzise unpräzise.
- Präzision als Zwangsvorstellung entfällt.
- Auch höchst unpräzise Diskussionen führen zu brauchbaren Ergebnissen.
- Präzision wird (bisher) nur aus Kosten- oder Machbarkeitsgründen eingeschränkt.
- Fuzzy-Logik erfordert symbolisches Wissen.
- Fuzzy-Logik erfordert Modellierung.

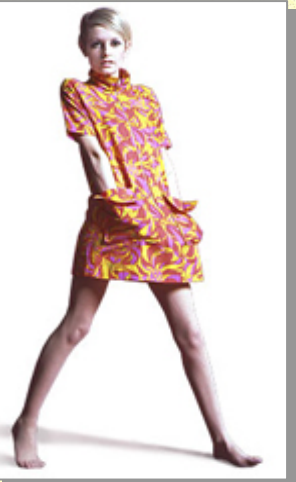
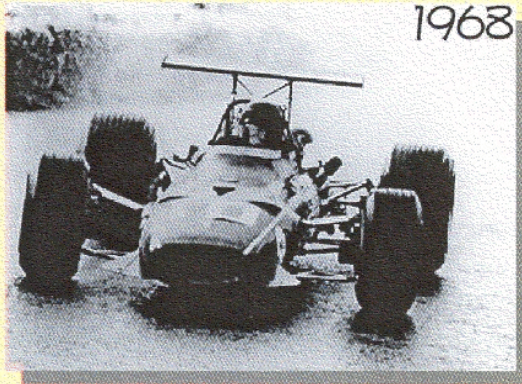


Der Begriff „Fuzzy Logic“
wurde in den 1960er Jahren geprägt.

Die 1960er Jahre



7.4.1964
IBM introduces the System/360



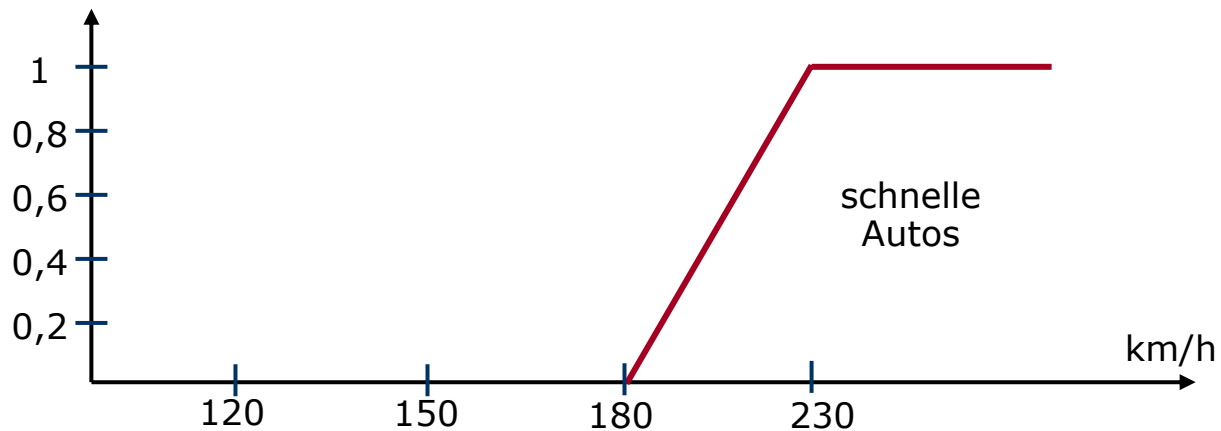
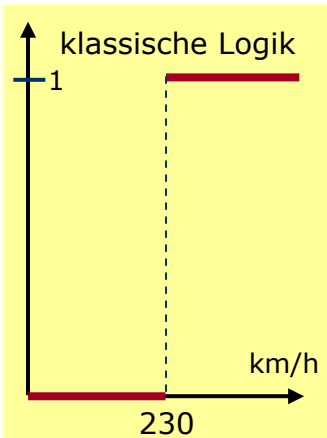
Fuzzy Sets

- Lotfi Zadeh führt 1965 den Begriff Fuzzy Set ein.
- Sei X eine Menge von Objekten, die hinsichtlich einer unscharfen Aussage A zu bewerten sind.
- Dann heißt $A = \{ (x, f_A(x)) \mid x \in X \}$ eine unscharfe Menge auf X .
- Die Zugehörigkeit von $x \in X$ zu A ist durch die Zugehörigkeitsfunktion $f_A(x) \in [0, 1]$ gegeben.
- Die klassische Logik liegt vor, wenn $f_A(x) \in \{0, 1\}$.

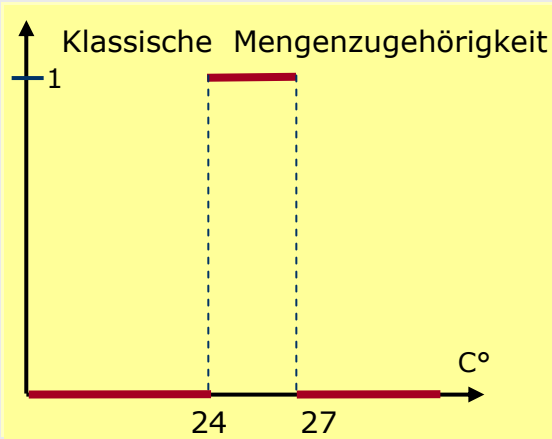
Beispiel: X sei die Menge aller Autos. Unter „schnellen Autos“ könnte man die unscharfe Menge $A = \{(180|0), \dots, (190|0.2), \dots, (200|0.5), \dots, (230|1)\}$ verstehen.



Lotfi Zadeh, geb. 1921, ist Professor an der „Electrical Engineering and Computer Sciences“ Fakultät der Berkeley-Universität, Kalifornien.



Cantor-Mengen vs. Fuzzy-Mengen

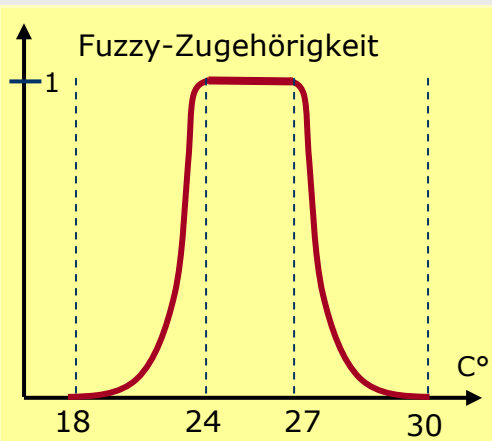


$$\left\{ \begin{array}{l} 24^\circ \\ 25^\circ \\ 26^\circ \\ 27^\circ \end{array} \right\}$$

Cantor-Menge

Menge B der angenehmen Badetemperaturen)

- Ein Element gehört der Menge ganz oder gar nicht an.
- $23^\circ \notin B$, $24^\circ \in B$



$$\left\{ \begin{array}{l} \dots \\ (20^\circ \mid 0,2) \\ (21^\circ \mid 0,3) \\ (24^\circ \mid 1,0) \\ \dots \\ (27^\circ \mid 1,0) \\ (28^\circ \mid 0,8) \\ (29^\circ \mid 0,6) \\ \dots \end{array} \right\}$$

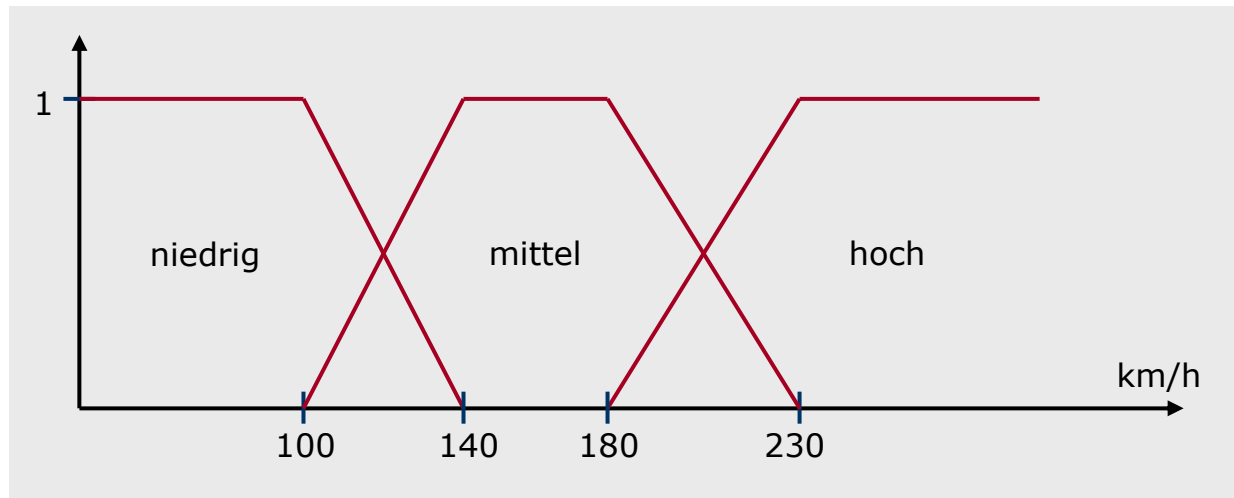
Fuzzy Menge

Menge B der angenehmen Badetemperaturen

- Ein Element gehört der Fuzzy-Menge zu einem gewissen Grad (zw. 0 und 1) an.
- Der Grad wird durch eine Zugehörigkeitsfunktion bestimmt.

Linguistische Variable & Zugehörigkeitsfunktionen

- Linguistische Variable ermöglichen die Formulierung unscharf formulierter Aussagen.
- Bsp.: Linguistische Variable „Geschwindigkeit“



Operationen auf Fuzzy Sets (1)

- Gegeben seien 2 Fuzzy-Mengen auf derselben Grundmenge M:

$$A = \{ (x, f_A(x)) \mid x \in M, 0 \leq f_A(x) \leq 1 \}$$

$$B = \{ (x, f_B(x)) \mid x \in M, 0 \leq f_B(x) \leq 1 \}$$

- Durchschnitt zweier Fuzzy-Mengen:

Der Durchschnitt D von A und B ist dann definiert als

$$D = A \cap B = \{ (x, f_D(x)) \mid x \in M, f_D(x) = \min (f_A, f_B) \}$$

und kann als logische UND-Verknüpfung aufgefaßt werden.

- Vereinigung zweier Fuzzy-Mengen:

Die Vereinigung V von A und B ist dann definiert als

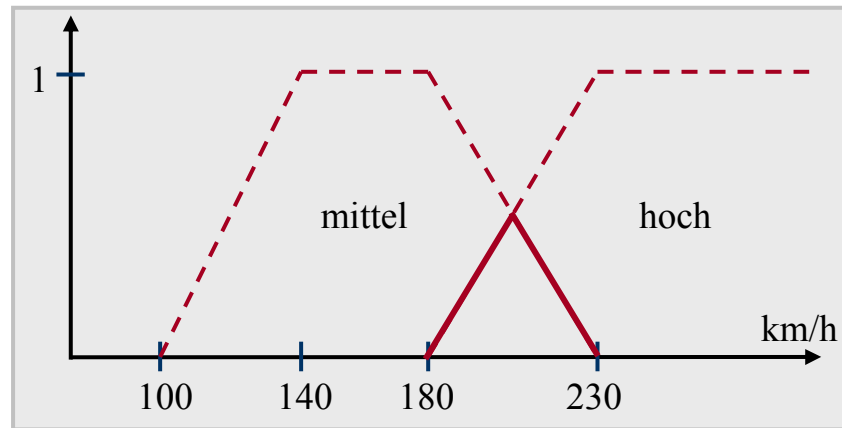
$$V = A \cup B = \{ (x, f_V(x)) \mid x \in M, f_V(x) = \max (f_A, f_B) \}$$

und kann als logische ODER-Verknüpfung aufgefaßt werden.

Vereinigung und Durchschnitt von Fuzzy Sets

- Durchschnitt** D zweier Fuzzy-Mengen A und B ist definiert als

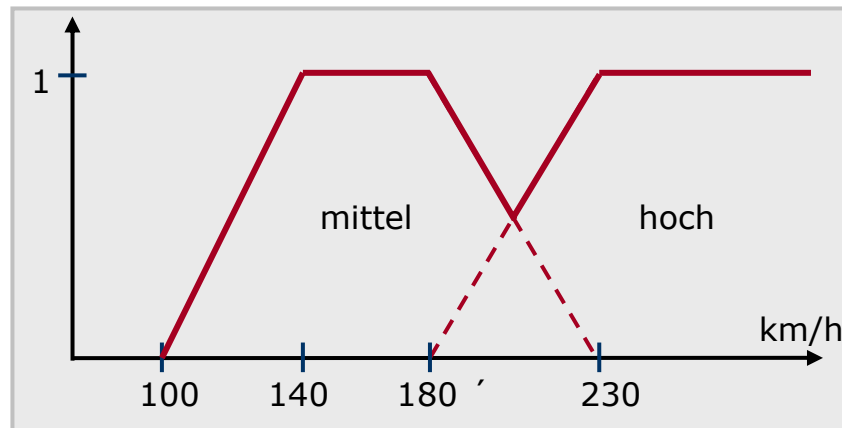
$$D = A \cap B = \{ (x, f_D(x)) \mid x \in M, f_D(x) = \min(f_A, f_B) \}$$



**logisches
UND**

- Vereinigung** V zweier Fuzzy-Mengen A und B ist definiert als

$$V = A \cup B = \{ (x, f_V(x)) \mid x \in M, f_V(x) = \max(f_A, f_B) \}$$



**logisches
ODER**

Wahrheitswerte

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
f	f	f	f
f	w	f	w
w	f	f	w
w	w	w	w

Boolesche Fktn.

A	B	$\wedge(A,B)$	$\vee(A,B)$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Operationen auf Fuzzy Sets

Verknüpfbarkeit unscharfer Begriffe:

- Teilmenge

$$A \subset B \Leftrightarrow f_A(x) \leq f_B(x) \quad \forall x \in M$$

- Durchschnitt (logisches UND):

$$f_{A \cap B}(x) = \min(f_A(x), f_B(x))$$

- Vereinigung (logisches ODER):

$$f_{A \cup B}(x) = \max(f_A(x), f_B(x))$$

- Komplement (Verneinung):

$$f_{\bar{A}}(x) = 1 - f_A(x)$$

- Kompensatorischer Gamma-Operator (linguistisches UND)

$$f_{A \sim B} = (f_A f_B)^{1-\gamma} (f_A + f_B - f_A \cdot f_B)^\gamma$$

Ein weiterer UND-Operator:

$$f_{A \cap B} = f_A(x) \cdot f_B(x)$$

Ein weiterer ODER-Operator:

$$f_{A \cup B} = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)$$

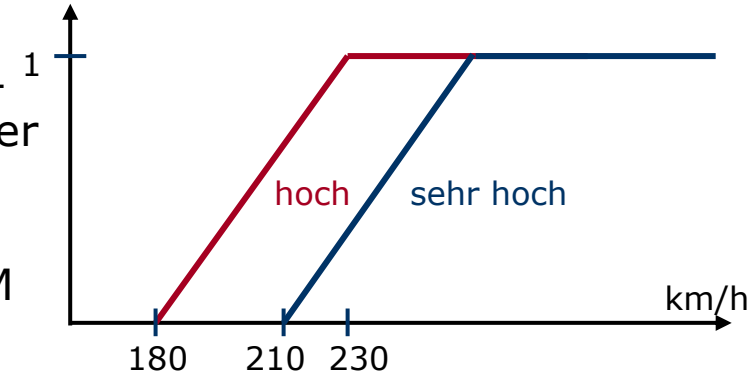
$\gamma = 0$, dann keine Kompensation (log. UND)
 $\gamma = 1$, dann volle Kompensation (log. ODER)
 γ bestimmt den Grad der Kompensation

Fuzzy Mengen: Teil- und Komplementmengen

Teilmengenbeziehungen:

- Die „sehr hohen Geschwindigkeiten“ sind eine Teilmenge der „hohen Geschwindigkeiten“, denn

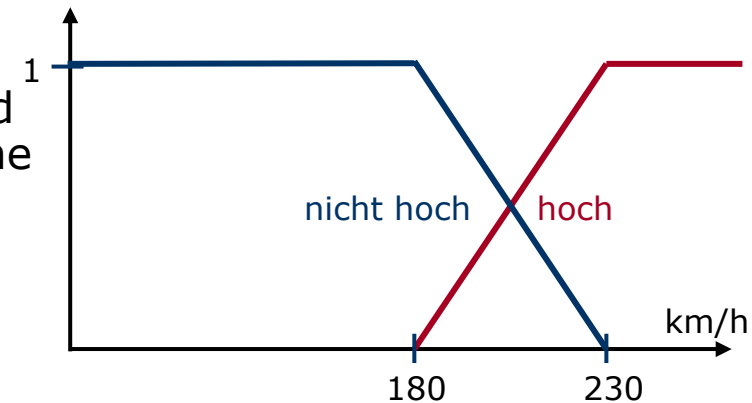
$$f_{\text{sehr hoch}}(x) \leq f_{\text{hoch}}(x) \quad \forall x \in M$$



Komplementmengen:

- Betrachte die Fuzzy Menge „hohe Geschwindigkeiten“ und deren Komplement „nicht-hohe Geschwindigkeiten“

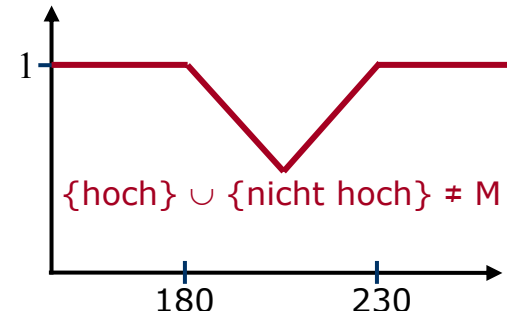
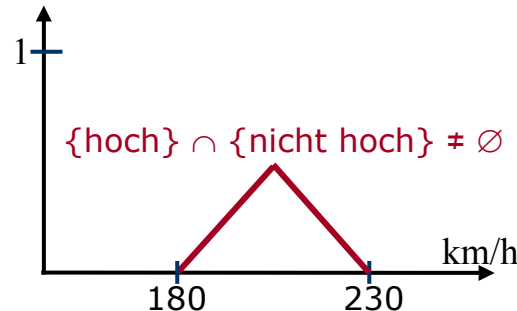
$$f_{\text{nicht hoch}}(x) := 1 - f_{\text{hoch}}(x)$$



Bei Fuzzy Mengen gilt i.a.:

$$A \cap \bar{A} \neq \emptyset$$

$$A \cup \bar{A} \neq M$$



Mächtigkeit:

Was ist eigentlich die Mächtigkeit einer Fuzzy Menge im -diskreten -kontinuierlichen Fall?

Teilmenge:

Es gibt auch den Begriff einer Fuzzy-Teilmenge, d.h, eine Menge ist nur zu einem bestimmten Grad Teilmenge einer anderen Menge.

Klassische Mengenlehre nach Cantor:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$A \cup \bar{A} = M$$



Linguistische Variablen

- Wie lassen sich diese Begriffe computergerecht darstellen, ohne ihren unscharfen Charakter zu verlieren?

- Beispiel aus der Prozessregeltechnik:

„Wenn die Temperatur in der Brennkammer sehr hoch ist und der Vorkammerdruck zumindest über dem Normalwert liegt, dann sollte die Methanzufuhr gedrosselt werden.“

- Klassisch:

WENN Temperatur $\geq 870^{\circ}\text{C}$

UND Vorkammerdruck ≥ 40 bar

DANN Notventil = 0,3

- Aber was ist bei
 - 1) Temperatur: 871°C , Druck: 39,7 bar ?
 - 2) Temperatur: 868°C , Druck: 62 bar ?

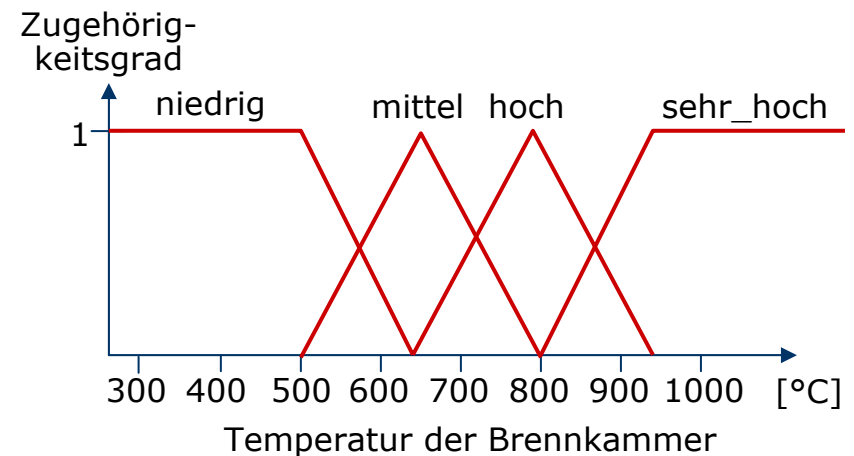
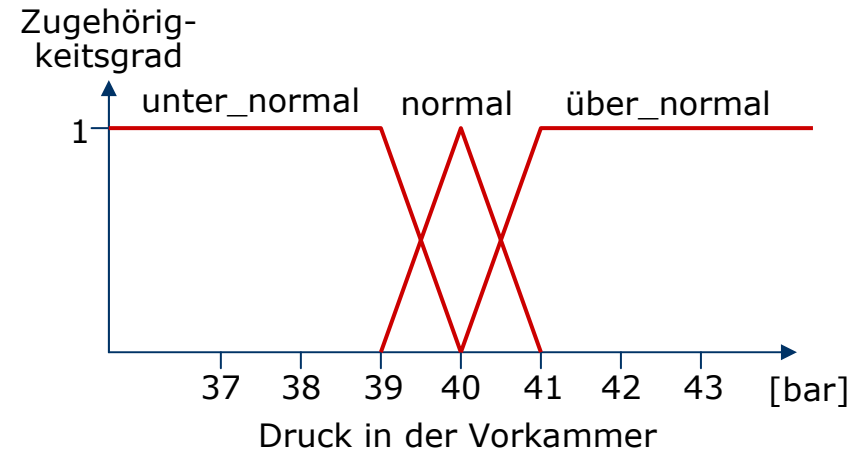
Verhalten
eines Notventils
bei einem
Druckkessel

Linguistische Variablen

Jeder möglichen Temperatur der Brennkammer wird ein Wert der linguistischen Variablen zugewiesen.

Eine Temperatur von 780° wird so z.B. als „ziemlich hoch und kaum noch mittel“ eingeschätzt.

Auch der Vorkammerdruck wird durch eine linguistische Variable beschrieben.



Fuzzy Produktionsregeln

- Wie kann unscharfe Information verarbeitet werden?
- Unscharfe Produktionsregeln:

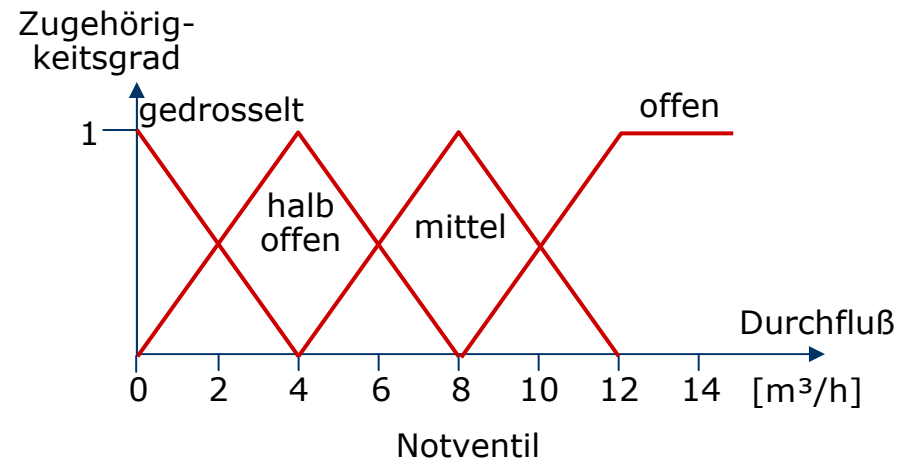
Regel 1:

WENN Temperatur = sehr_hoch
ODER Vorkammerdruck = über_normal
DANN Notventil = gedrosselt

Regel 2:

WENN Temperatur = hoch
UND Vorkammerdruck = normal
DANN Notventil = halb_offen

Die linguistische Variable „**Notventil**“ beschreibt die einem Brennofen zuzuführende Menge an Methan als Reaktion auf den in der Brennkammer herrschenden Druck und die Temperatur.



Fuzzy Produktionsregeln

- Wie werden solche Regeln verarbeitet ?
- Was passiert bei einer Temperatur von 910°C und einem Vorkammerdruck von 40,5 bar ?
- Zunächst erfolgt eine Fuzzifizierung:

Regelmenge

Regel 1:

WENN Temperatur = sehr_hoch
 ODER Vorkammerdruck = über_normal
 DANN Notventil = gedrosselt

Regel 2:

WENN Temperatur = hoch
 UND Vorkammerdruck = normal
 DANN Notventil = halb_offen

Regel 3:

WENN
 DANN ...

Temperatur 910°C:

sehr_hoch	0,8
hoch	0,3
mittel	0,0
niedrig	0,0

Druck 40,5 bar:

unter_normal	0,0
normal	0,5
über_normal	0,5

Erfüllungsgrad

Regel 1:

$$0,8 = \max\{0,8 / 0,5\}$$

Regel 2:

$$0,3 = \min\{0,3 / 0,5\}$$

- Für eine zu verarbeitende Regel gilt: Die Implikation einer Regel ist zum gleichen Grade erfüllt wie ihre Prämisse.

Fuzzy Produktionsregeln

- Aus den Regeln ergibt sich, daß das Notventil zu einem Grad von 0,8 gedrosselt und zu einem Grad von 0,3 auf halb offen gestellt werden soll. Wie kann diese Aussage interpretiert und umgesetzt werden?
- Diese geschieht über die linguistische Variable **Notventil**. Zur Umsetzung gibt es verschiedene Verfahren wie z.B.

MAX_PROD

oder

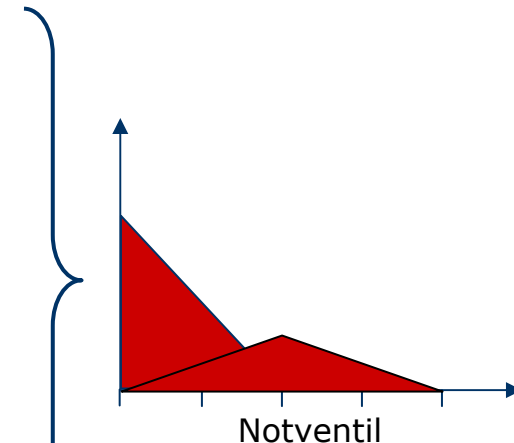
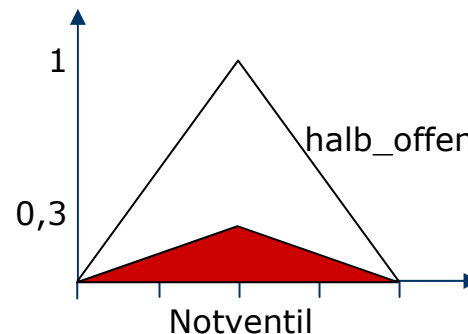
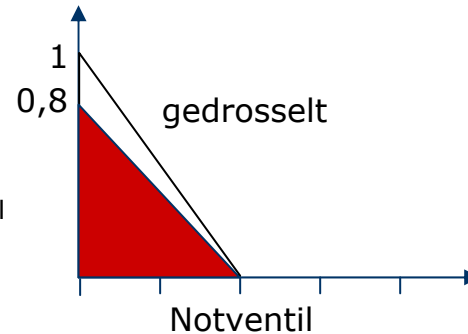
MIN_MAX

MAX_PROD

Die Fuzzy Sets der linguistischen Variablen werden mit den Erfüllungsgraden der Regelprämissen multipliziert und zu einer unscharfen Gesamtmenge zusammengefaßt.

WENN Temperatur = sehr_hoch
ODER Vorkammerdruck = über_normal
DANN Notventil = gedrosselt

WENN Temperatur = hoch
UND Vorkammerdruck = normal
DANN Notventil = halb_offen

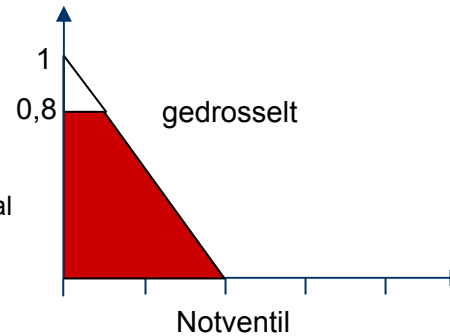


Fuzzy Produktionsregeln

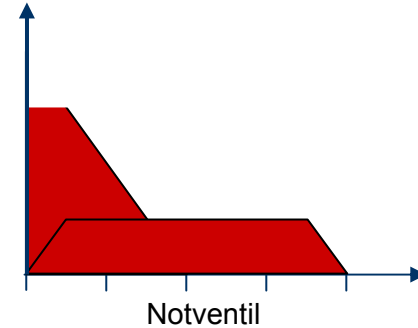
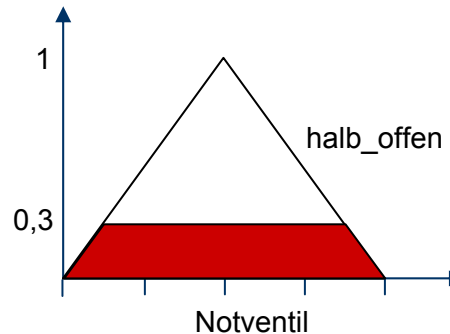
MIN_MAX

Die Fuzzy Sets der Variable *Notventil* werden durch den Erfüllungsgrad der Regelprämissen begrenzt und zu einer unscharfen Menge zusammengefaßt.

WENN Temperatur = sehr_hoch
ODER Vorkammerdruck = über_normal
DANN Notventil = gedrosselt



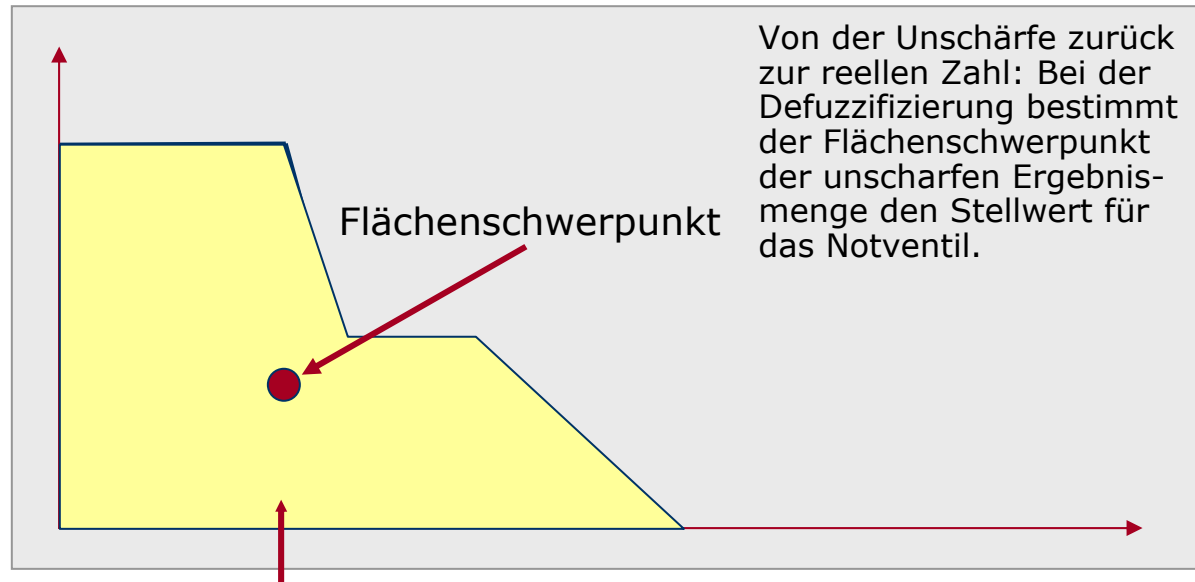
WENN Temperatur = hoch
UND Vorkammerdruck = normal
DANN Notventil = halb_offen



- Das Ergebnis ist in beiden Fällen eine Fuzzy Set, die alle „zulässigen“ Ventileinstellungen beinhaltet.
- Wie kann aus dieser Fuzzy Set eine konkrete Größe abgeleitet werden?
- Die Fuzzy Set wird defuzzifiziert !

Defuzzifizierung der Ergebnisgrößen (1)

- Defuzzifizierung: Abbildung einer Fuzzy Set auf einen konkreten Zahlenwert
- Häufigste Form: Die gesuchte Größe – in diesem Falle die Notventileinstellung – ergibt sich als Flächenschwerpunkt der Fuzzy Set.

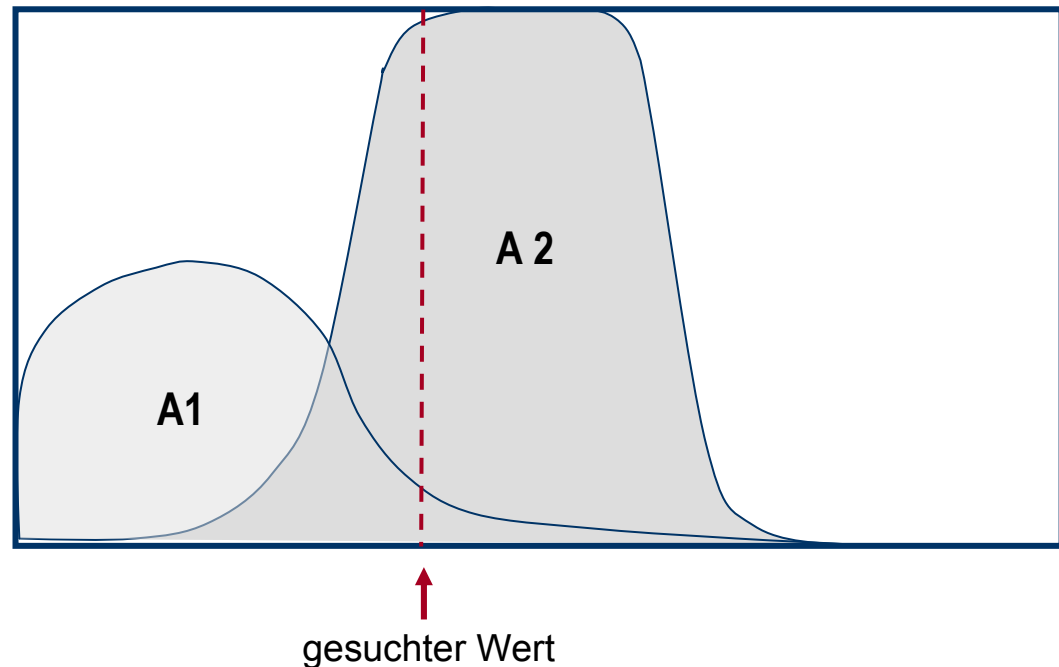


Notventil = 2,7 m³/h

$$y = \frac{\int_{y \in Y} y \cdot f(x_1, \dots, x_n)(y) dy}{\int_{y \in Y} f(x_1, \dots, x_n)(y) dy}$$

Defuzzifizierung der Ergebnisgrößen (2)

- Defuzzifizierung: Abbildung einer Fuzzy Set auf einen konkreten Zahlenwert
- Alternative: Die gesuchte Größe wird so ermittelt, daß die Senkrechte durch den gesuchten Wert auf der Abszisse die Gesamtfläche in zwei gleich große Flächen ($A1 = A2$) unterteilt.



Fuzzy Produktionsregeln allgemein (1)

- Wie kann unscharfe Information verarbeitet werden?
- Unscharfe Produktionsregeln:

- Regel 1:

WENN A = „hoch“
ODER B = „normal“
DANN C = „schlecht“

- Regel 2:

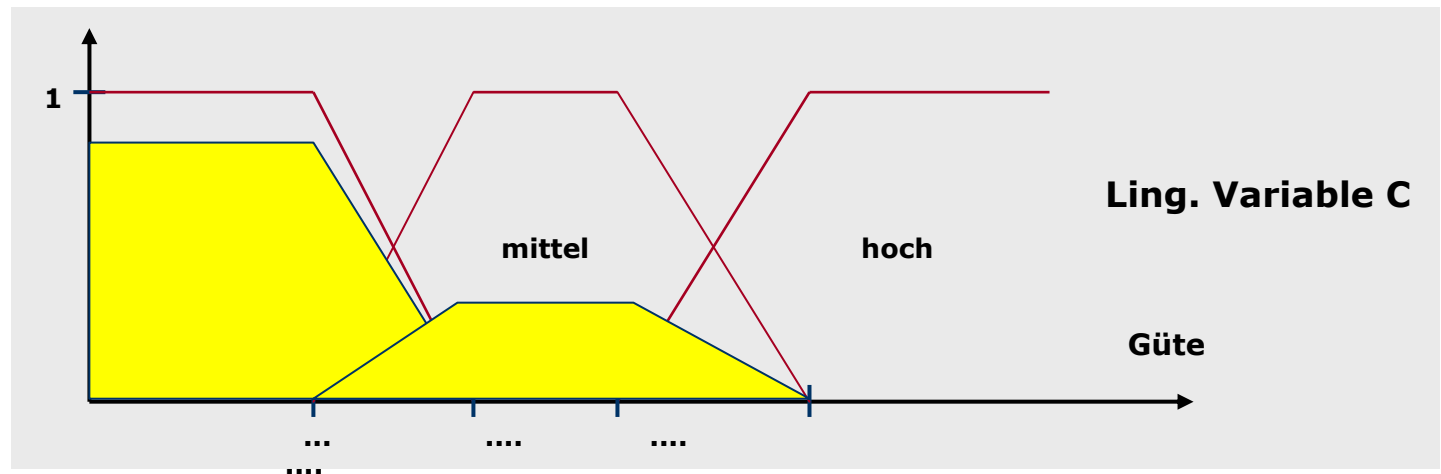
WENN A = „sehr hoch“
UND B = „hoch“
DANN C = „mittel“

WENN **Prämisse**
DANN **Implikation**

- Für eine zu verarbeitende Regel gilt:
Die Implikation einer Regel ist zum gleichen Grade erfüllt wie ihre Prämisse.

Fuzzy Produktionsregeln allgemein (2)

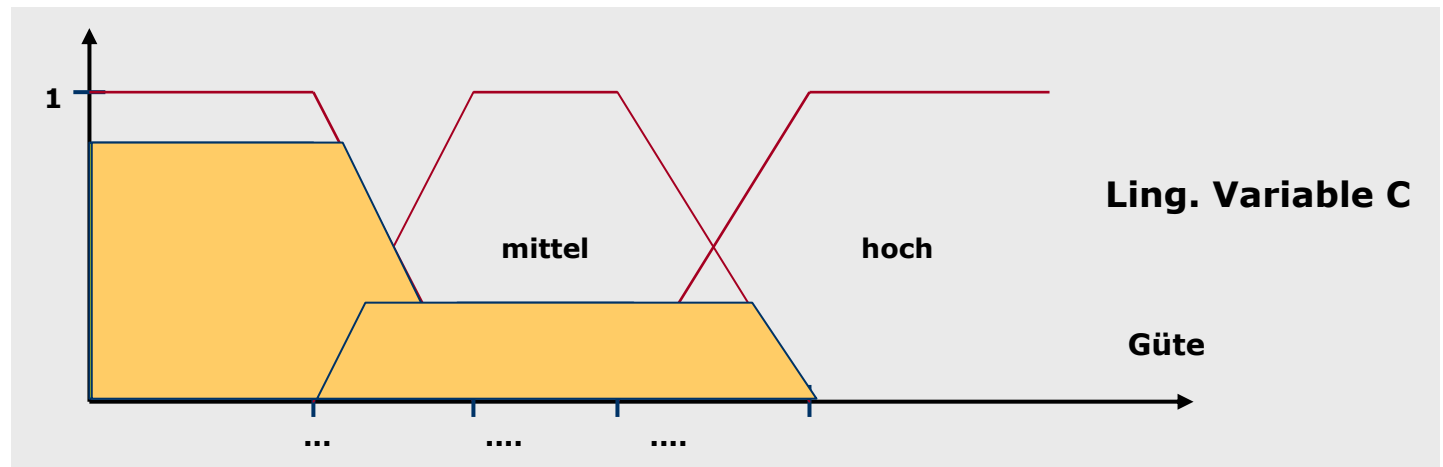
- Aus den Regeln ergibt sich, daß C zu einem gewissen Grad als „schlecht“ und zu einem gewissen Grad als „mittel“ angesehen wird.
- Wie kann diese Aussage interpretiert und umgesetzt werden?



- Es gibt verschiedene Verfahren, z.B. MIN_MAX oder MAX_PROD
- Wie kommt man nun von der unscharfen Menge zu einem konkreten Wert?

Fuzzy Produktionsregeln allgemein (3)

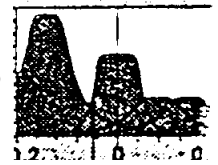
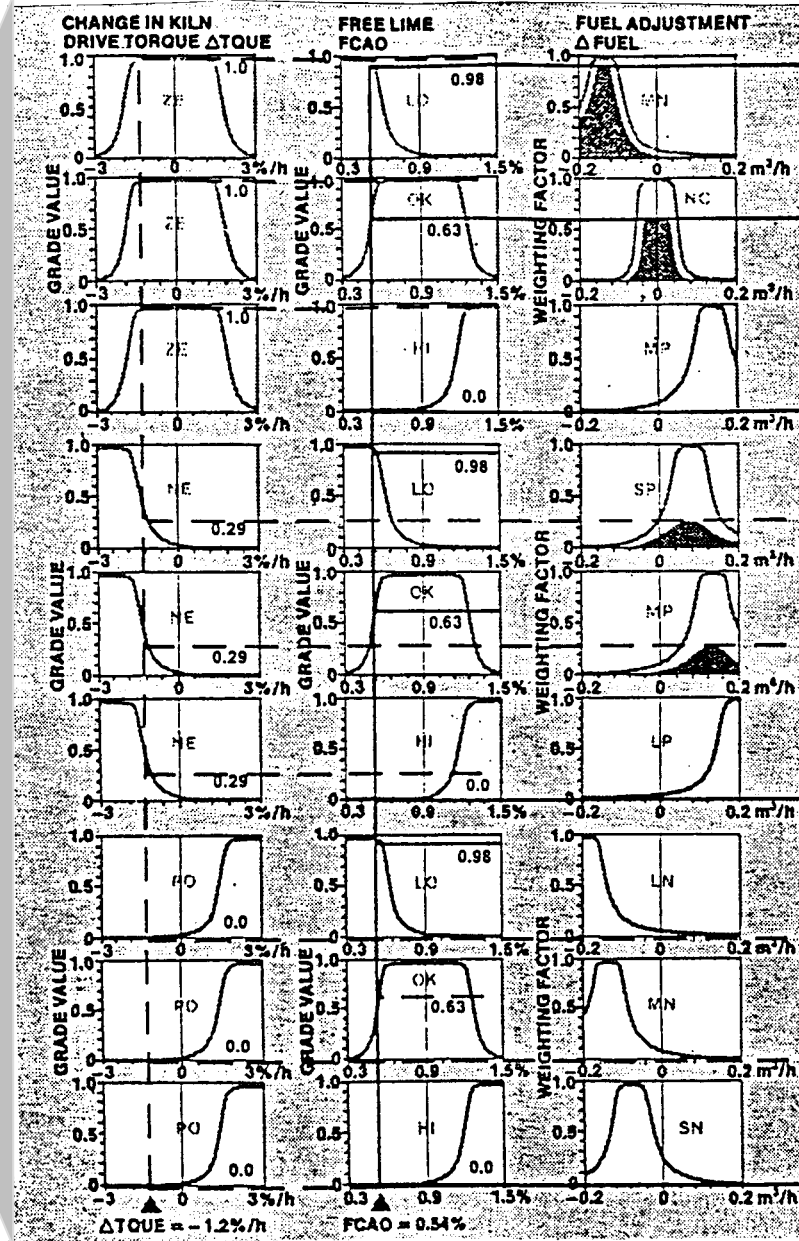
- Aus den Regeln ergibt sich, daß C zu einem gewissen Grad als „schlecht“ und zu einem gewissen Grad als „mittel“ angesehen wird.
- Wie kann diese Aussage interpretiert und umgesetzt werden?



- Es gibt verschiedene Verfahren, z.B. MIN_MAX oder MAX_PROD
- Wie kommt man nun von der unscharfen Menge zu einem konkreten Wert?

Defuzzifizierung

Gleichzeitige Anwendung der Produktionsregeln



Fuzzy Produktionsregeln

- Wie verhält sich ein System, wenn Konflikte auftreten?
- Entspricht der Erfüllungsgrad der Regelprämissen auch dem Glauben an die Richtigkeit einer Regel?
- Approximate Reasoning (unscharfes Schließen)
 - Zuordnung eines Glaubensmaßes als reelle Zahl aus $[0,1]$ für eine Regel.
 - ... kann als Zugehörigkeitsgrad zur Menge der absolut gültigen Regeln interpretiert werden.
 - Mögliche Verknüpfung mit dem Erfüllungsgrad der Regelprämissen über den UND-Operator
- Es gibt andere Formen des unscharfen Schließens wie das plausible Schließen.

Unscharfes Schließen: Wenn eine Regel feuert, wird ihr DANN-Teil als gültig angesehen. Oft beschreiben mehrere Regeln einen ähnlichen Zusammenhang, was zu unterschiedlichen Ergebnissen (Konflikten) führen kann. Zur Resolution müssen der Wahrheitsgrad der Vorbedingung und der Vertrauensgrad der Regel berücksichtigt werden.

Plausibles Schließen: Was passiert, wenn die Temperatur nun extrem hoch ist und der Druck über dem Normalwert liegt. Auch wenn dieser Fall in den Regeln nicht beschrieben ist, wäre es plausibel, die Methanzufuhr ebenfalls (möglichweise stärker) zu drosseln.

Fuzzy Produktionsregeln

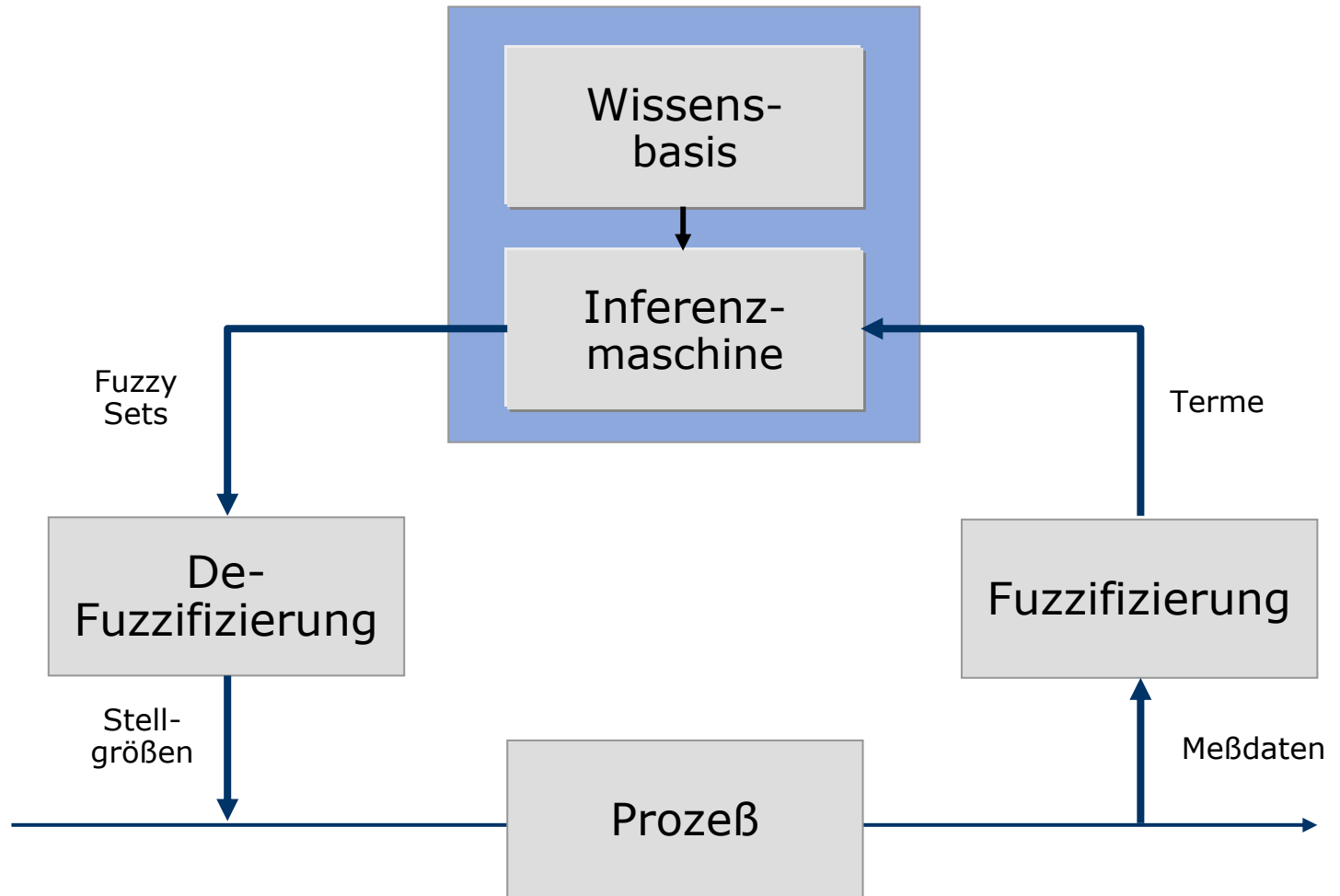
- Bereits mit wenigen Regeln kann ein hochgradig nichtlineares Verhalten hoher Stabilität erzielt werden.
- Beispiel-Regelsystem:

- WENN die Bearbeitungszeit kurz ist
UND die Schlupfzeit nicht ausreichend ist,
DANN wähle Werkstück j (1,0)
- WENN die Bearbeitungszeit kurz ist
UND die Schlupfzeit ausreichend ist,
DANN wähle Werkstück j (0,7)
- WENN die Bearbeitungszeit mittel ist
UND die Schlupfzeit nicht ausreichend ist,
DANN wähle Werkstück j (0,6)
- WENN die Bearbeitungszeit lang ist
UND die Schlupfzeit nicht ausreichend ist,
DANN wähle Werkstück j (0,5)
- WENN die Bearbeitungszeit lang ist
UND die Schlupfzeit ausreichend ist,
DANN wähle Werkstück j (0,2)

Schlupfzeit:

Restzeit eines Auftrags; Zeitspanne vom aktuellen Bearbeitungszeitpunkt bis zum Sollendetermin

Struktur der Fuzzy Control



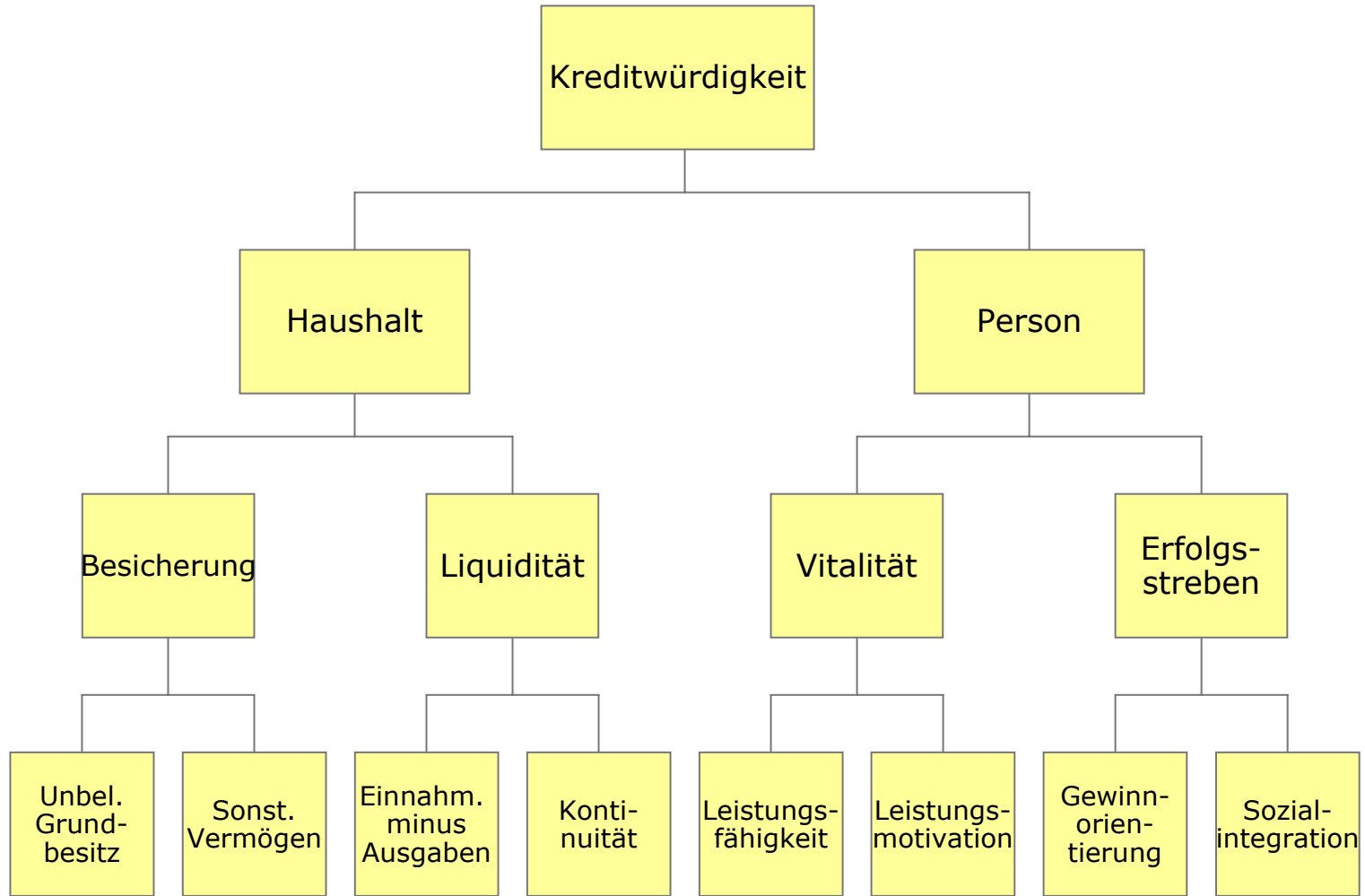
Anwendungsbeispiel Hauskauf

- Das logische UND entspricht nicht dem linguistischen UND.
- Beispiel: Es gebe 2 Fuzzy Sets „attraktive Häuser“ und „verkehrsgünstige Häuser“. Alle Häuser seien gleich teuer.

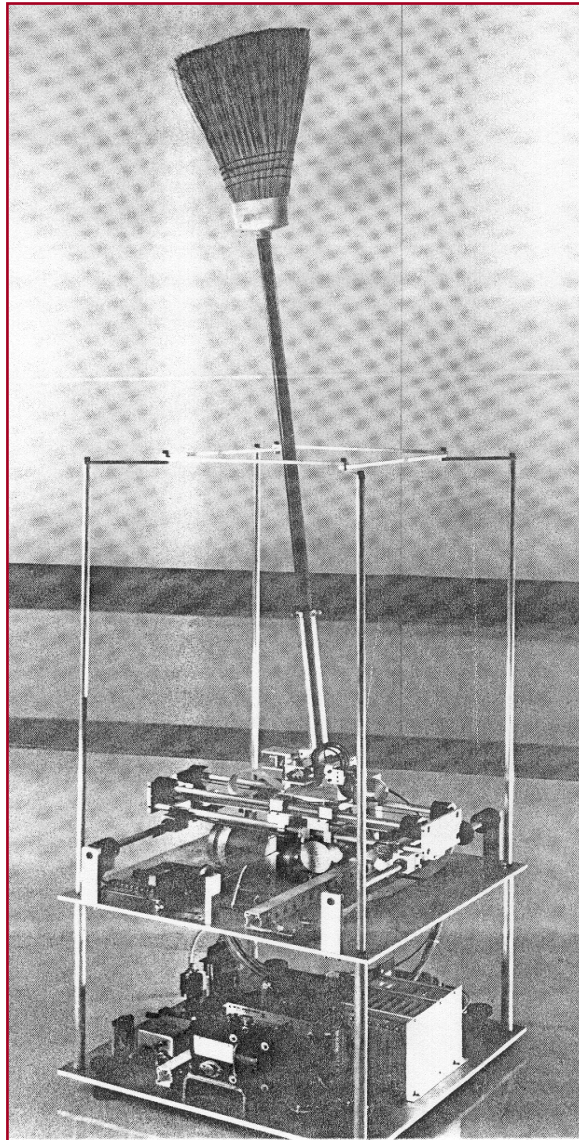
	attraktive	verkehrsgünstige Häuser
Haus 1	0,4	0,4
Haus 2	0,9	0,3
Haus 3	0,7	0,3

- Verwendung des Minimum-Operators würde zu Haus 1 führen, obwohl Menschen i.a. Haus 2 vorziehen würden.
- Das linguistische UND entspricht eher einem kompensatorischen UND. Eine Größe kann bis zu einem gewissen Grade durch eine andere kompensiert werden.
- Nachteil: z.B. nicht assoziativ

Anwendungsbeispiel Bonitätsprüfung



Anwendungsbeispiel Besenbalanciermaschine



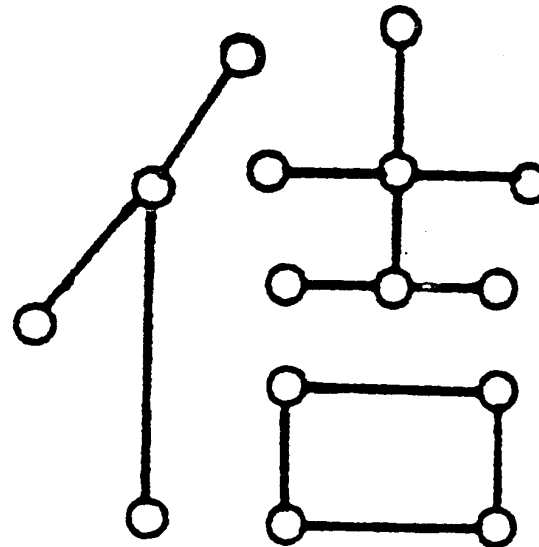
Die Besenbalancier-Maschine

- ◆ Diese Besenbalanciermaschine gibt es wirklich. Sie kann einen auf dem Kopf stehenden Besen kontinuierlich ausbalancieren.
- ◆ Sie stand (bis zur Übernahme durch einen Mitbewerber) in der Eingangshalle der Hecht Nielsen Company in San Diego, Kalifornien.
- ◆ Der Auslenkungswinkel kann bis zu 12° betragen.
- ◆ Sie wird durch ein System in neuronaler Architektur gesteuert.
- ◆ Es gibt auch eine alternative Implementierung als Fuzzy System.

Anwendungsbeispiel Schriftzeichenerkennung (1)

- Problem: Identifikation (gedruckter) chinesischer Schriftzeichen
- Schritt 1: Charakterisiere Schriftzeichen als planaren Graphen

信



Assoziierter
Graph

Bsp.: Schriftzeichenerkennung (2)

- Schritt 2: Beschreibe Graphen durch 5-Tupel $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$

a_1 = Zahl der k-gradigen Knoten mit $k \geq 5$

a_2 = Zahl der k-gradigen Knoten mit $k = 4$

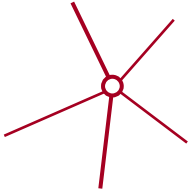
a_3 = Zahl der k-gradigen Knoten mit $k = 3$

a_4 = Zahl der Komponenten

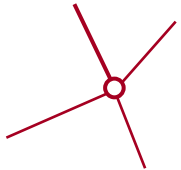
a_5 = Zahl der Zyklen

Character	Code
信	(0, 1, 2, 3, 1)
估	(0, 1, 2, 2, 1)
呈	(0, 1, 2, 2, 1)

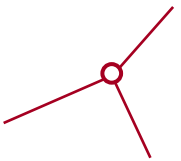
5-gradig



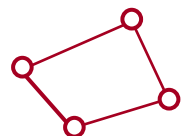
4-gradig



3-gradig

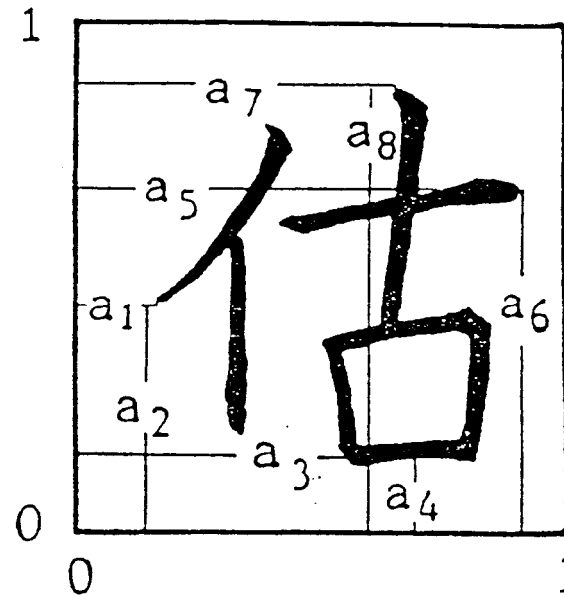


Zyklus



Bsp.: Schriftzeichenerkennung (3)

- Schritt 3: Für gleiche Klassen bestimme 8-Tupel nach folgendem Einheitsquadrat:



- Schritt 4: Bestimme Ähnlichkeitsgrad zu definierten Mustern durch

$$S(A, B) = 1 - \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 |a_i - b_i|$$