

# Modellbildung und Simulation

Sommersemester 2011

3. Vorlesung

Klaus Kasper

# Termine

---

<b>Veranstaltung</b>	<b>Vorlesung Mo 18-21 (X) D14/104</b>	<b>Praktikum Mo 18-21 (Y) D15/107</b>	<b>Praktikum Fr 12-15 (X) D15/107</b>
1. Termin	28.03.11	04.04.11	08.04.11
2. Termin	11.04.11	18.04.11	29.04.11
3. Termin	02.05.11	09.05.11	13.05.11
4. Termin	16.05.11	23.05.11	27.05.11
5. Termin	30.05.11	06.06.11	17.06.11
6. Termin	20.06.11	27.06.11	01.07.11

---

# Organisation

- Moodle-Server: <http://lernen.h-da.de/>
- Kurs: Informatik/Informatik (M.Sc.)/Sommersemester 2011/Modellbildung und Simulation – Kasper - SS 2011
- Schlüssel: MuS\_KAS\_SS2011
- Vorlesungen, Aufgabenblätter und weitere Materialien werden auf dem Moodle-Server zur Verfügung gestellt.
- Fragen und Anmerkungen zur Veranstaltung bitte immer über das Diskussionsforum der Veranstaltung, so dass immer alle informiert sind.
- Wenn Sie interessante Informationen finden, stellen Sie diese bitte auch allen zur Verfügung.

# Inhalt

- Wiederholung
  - Fourier-Transformation
  - Value-at-Risk (VaR)
    - statistische Kenngrößen
    - Korrelation
- VaR
  - Multivariate Normalverteilung
  - Historische Simulation
  - Monte Carlo Simulation

# Fourier-Transformation

# Fourier-Transformation

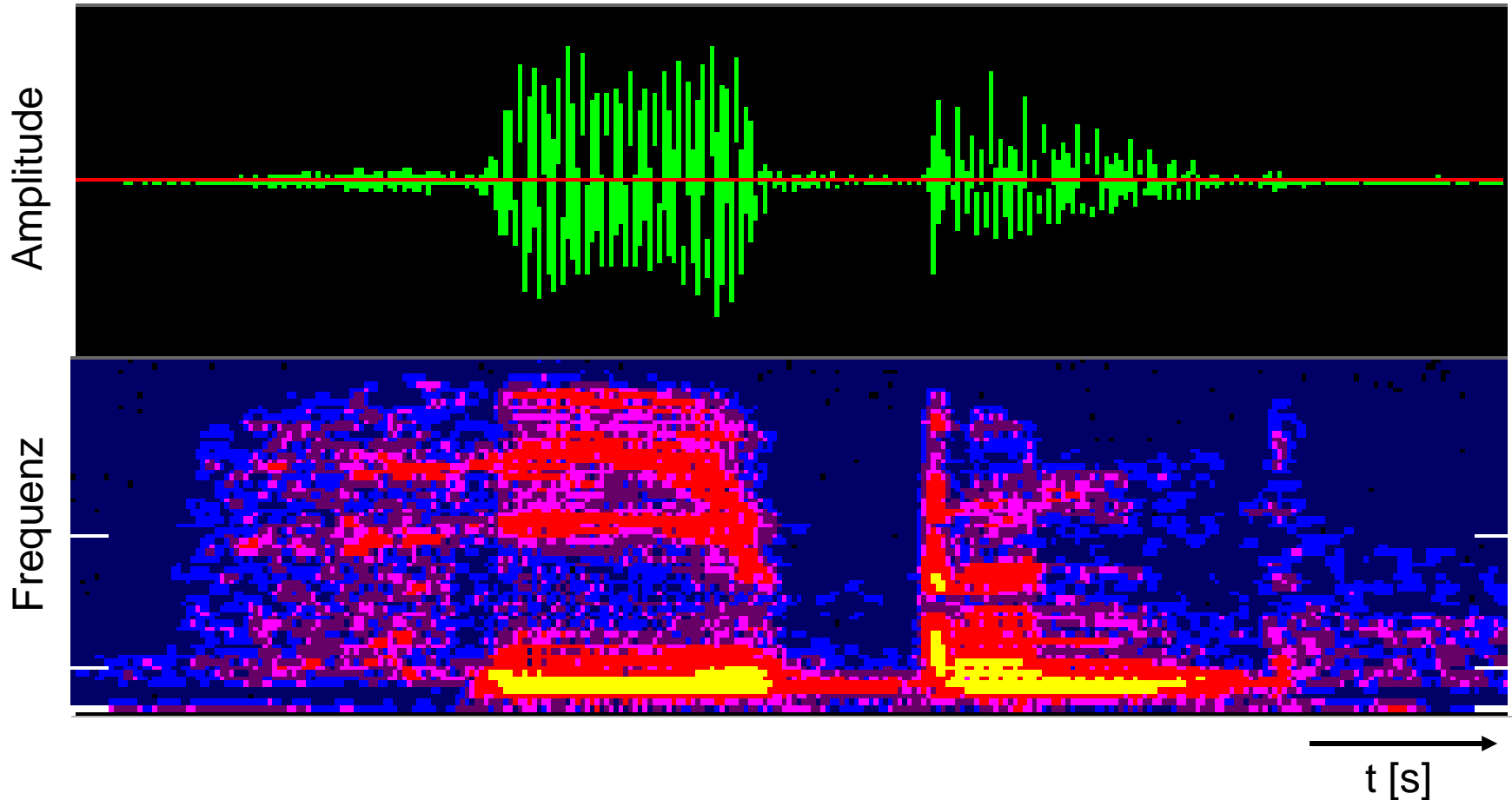
- Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)
- Französischer Mathematiker und Physiker
- Fourier (1807): „Ein beliebiges kontinuierliches und periodisches Signal kann durch adäquat gewählte Sinus- und Cosinus-Funktionen vollständig repräsentiert werden.“

# Fourier-Transformation

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} f(t) dt$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\omega t} F(\omega) d\omega$$





# Fourier-Transformation



# Typisierung

- **Fourier-Transformation**  
(aperiodisch, kontinuierlich)
- **Fourier-Reihe**  
(periodisch, kontinuierlich)
- **Zeitdiskrete Fourier-Transformation**  
(aperiodisch, diskret)
- **Diskrete Fourier-Transformation**  
(periodisch, diskret)

# Beispiele

Type of Transform	Example Signal
Fourier Transform <i>signals that are continuous and aperiodic</i>	
Fourier Series <i>signals that are continuous and periodic</i>	
Discrete Time Fourier Transform <i>signals that are discrete and aperiodic</i>	
Discrete Fourier Transform <i>signals that are discrete and periodic</i>	

# Zeitdiskrete Fourier-Transformation

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{i\omega n} d\omega$$

# Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Für  $x[n]$  periodisch, d.h.  $x[n] = x[n+aN]$  gilt:

$$X[v] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i v n / N}$$

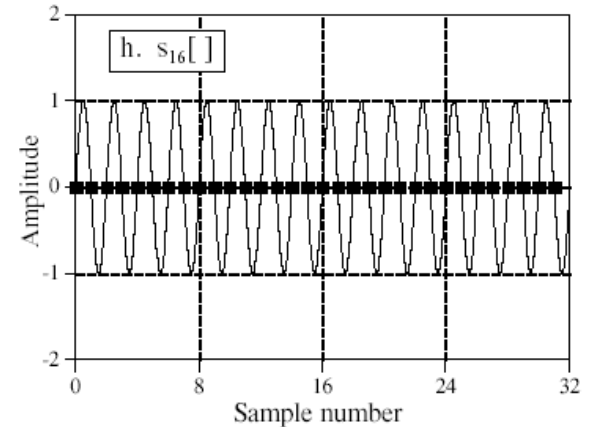
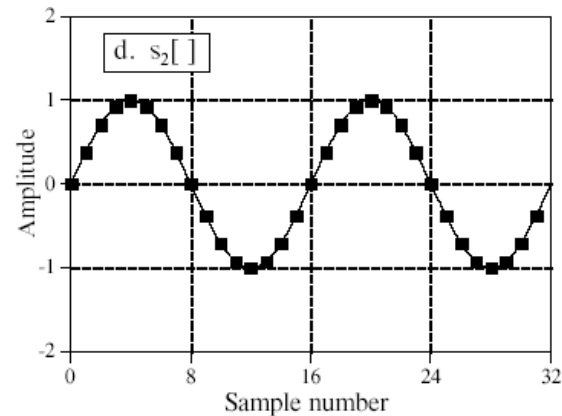
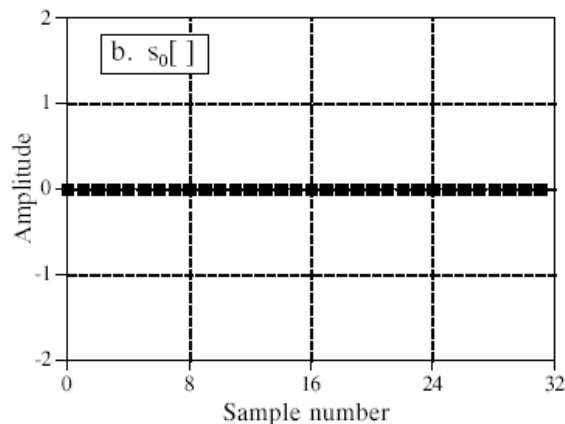
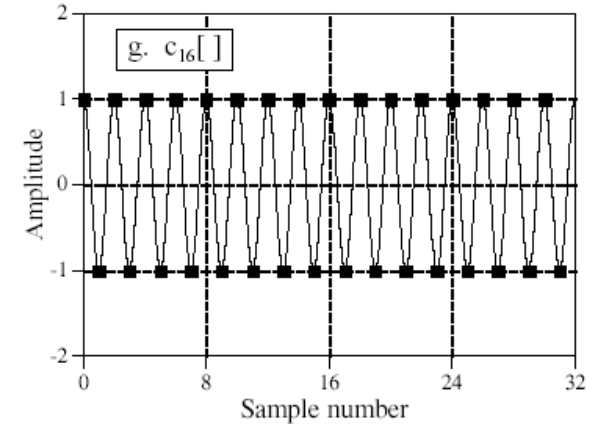
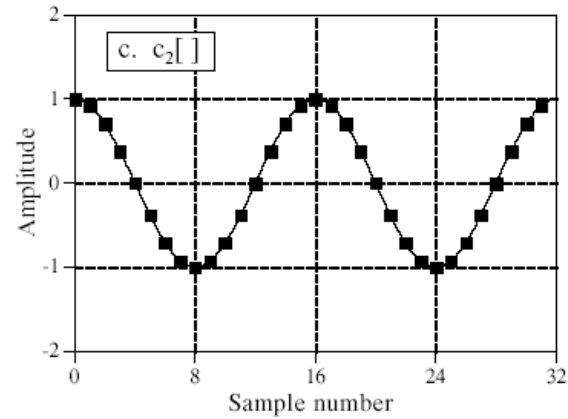
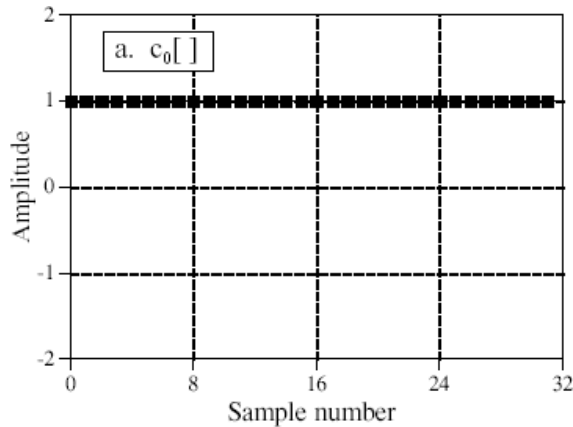
$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} X[v] e^{2\pi i v n / N}$$

# Basisfunktionen der DFT

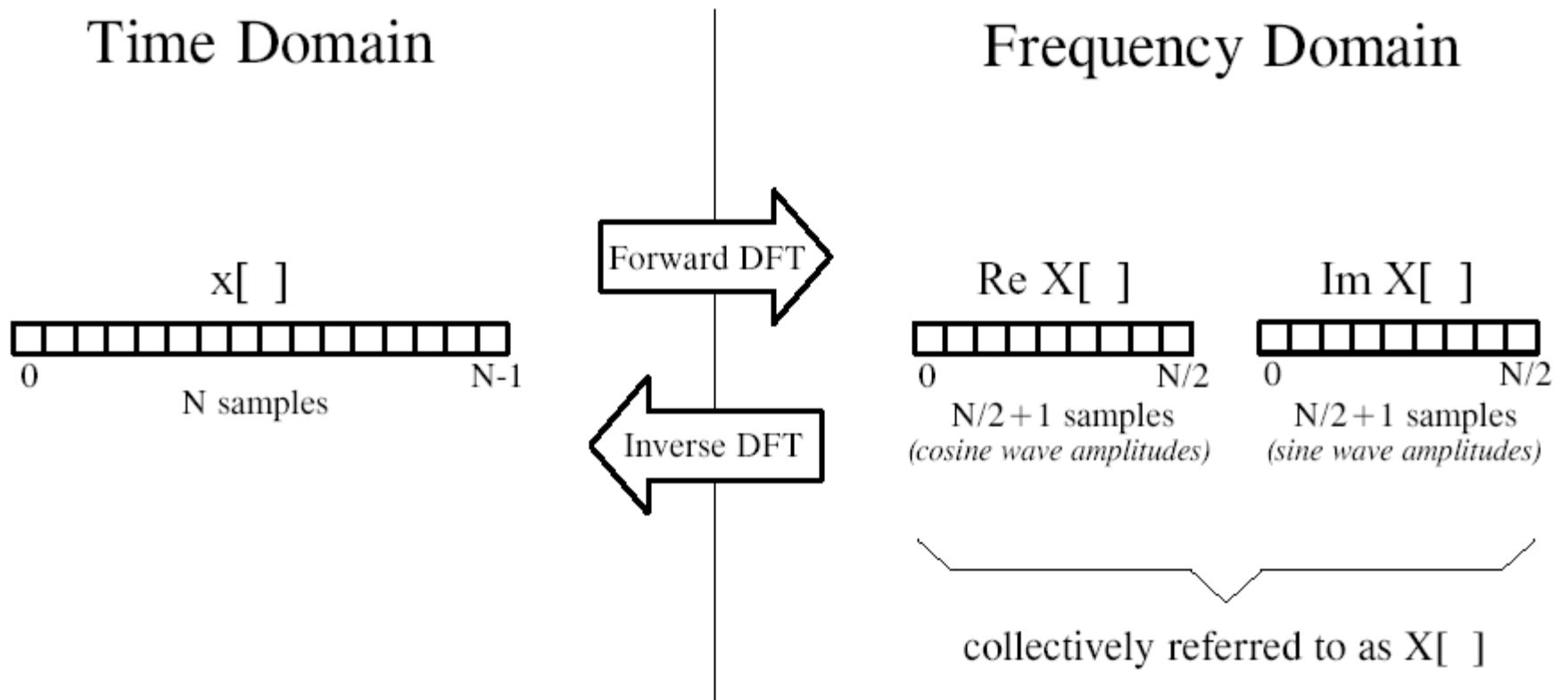
$$C_\nu[n] = \cos(2\pi n\nu / N)$$

$$S_\nu[n] = \sin(2\pi n\nu / N)$$

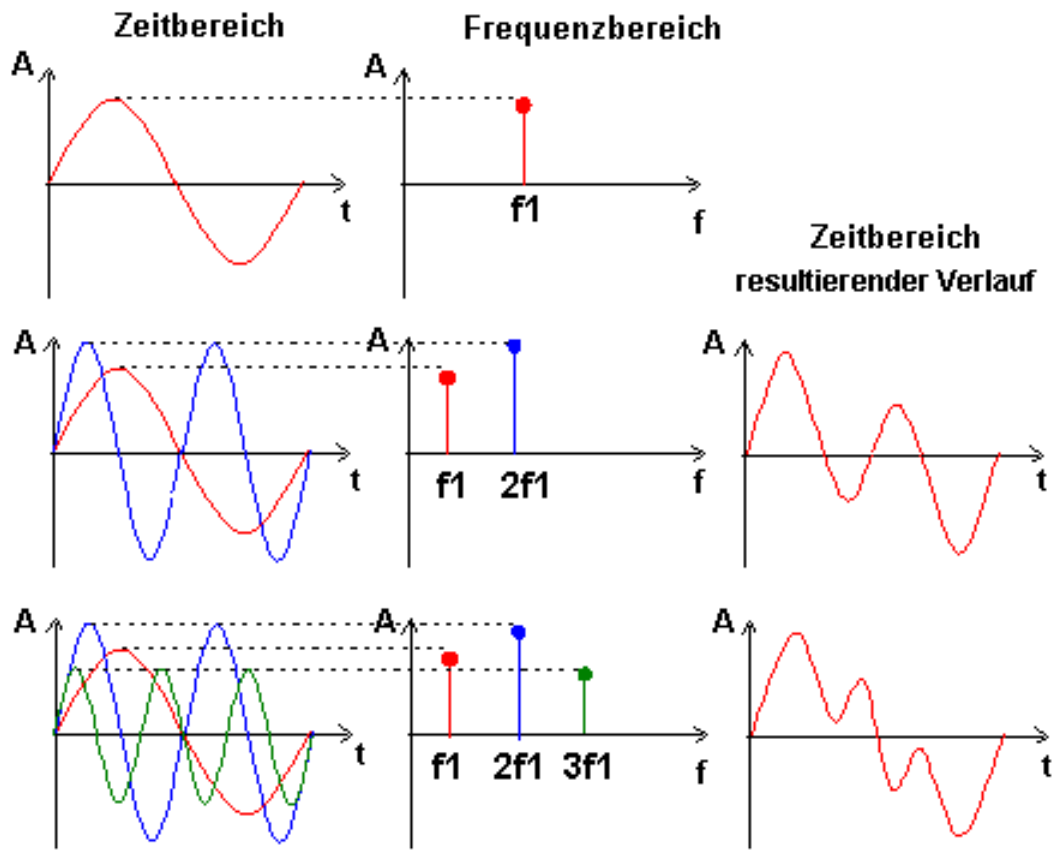
# Ausgewählte Basisfunktionen



# Schema der DFT



# Beispiele



# Berechnung der DFT über Korrelation

$$\operatorname{Re} X[\nu] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi n\nu / N)$$

$$\operatorname{Im} X[\nu] = -\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(2\pi n\nu / N)$$

für  $0 \leq \nu \leq N / 2$

# Berechnung

```
for(i=0,ReX[i]=0;i <= N/2;i++) // Frequenz
```

```
for(n=0;n < N;n++) // Abtastwerte
```

```
ReX[i] += x[n] * cos(2πni/N) // Korrelation
```

# Inverse DFT

$$x[n] = \sum_{\nu=0}^{N/2} \operatorname{Re} \bar{X}[\nu] \cos(2\pi n\nu / N) + \sum_{\nu=0}^{N/2} \operatorname{Im} \bar{X}[\nu] \sin(2\pi n\nu / N)$$

wobei

$$\operatorname{Re} \bar{X}[\nu] = \frac{\operatorname{Re} X[\nu]}{N/2} \quad \operatorname{Im} \bar{X}[\nu] = -\frac{\operatorname{Im} X[\nu]}{N/2}$$

aber

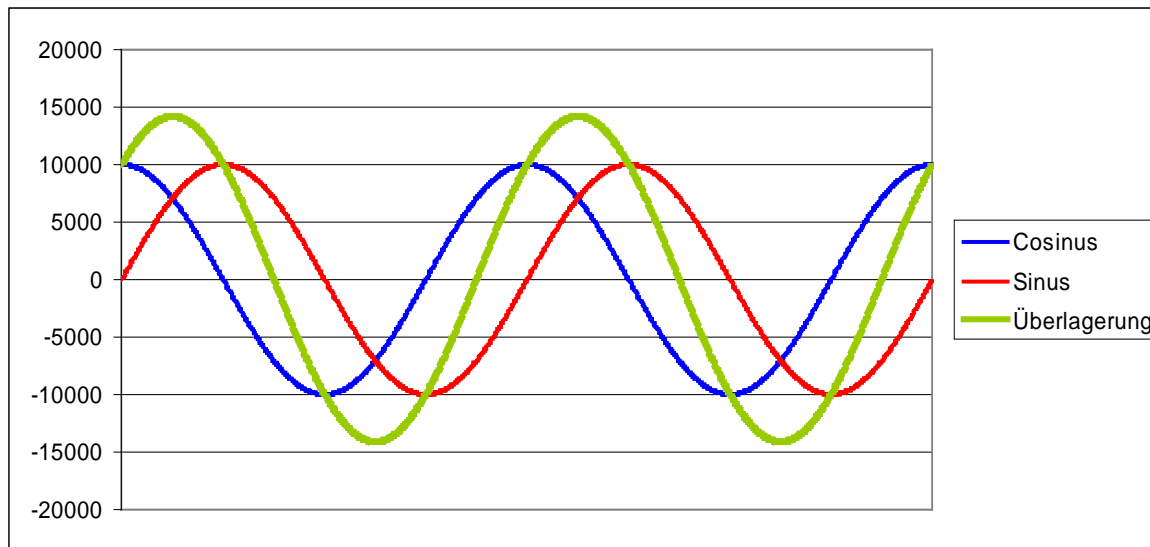
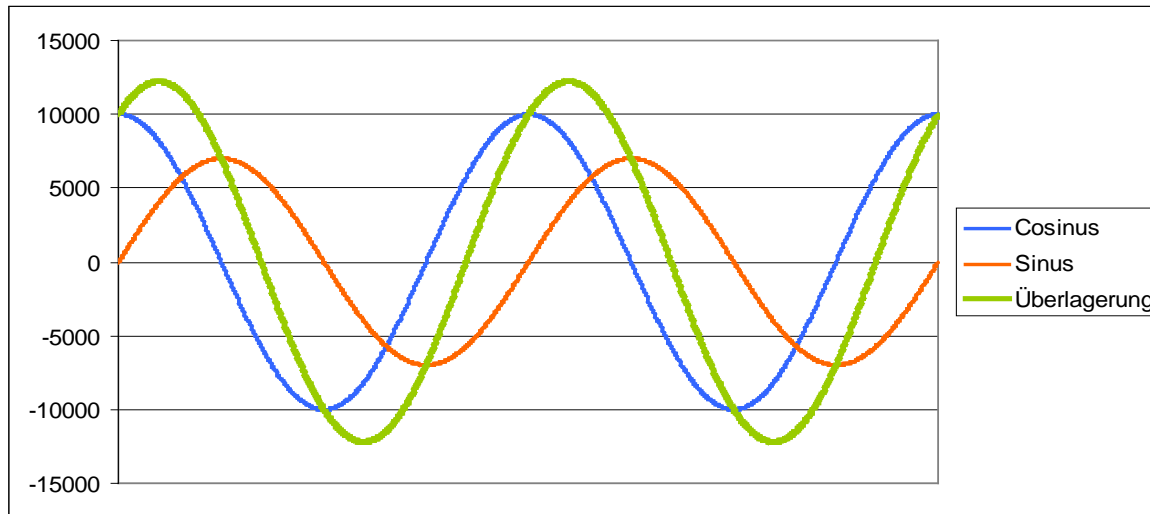
$$\operatorname{Re} \bar{X}[0] = \frac{\operatorname{Re} X[0]}{N} \quad \operatorname{Re} \bar{X}[N/2] = \frac{\operatorname{Re} X[N/2]}{N}$$

für  $0 \leq n < N$

# Interaktive Demonstration

[Applet zur Diskreten Fourier-Transformation](#)

# Überlagerung von $\cos()$ und $\sin()$ für gleichfrequente Schwingungen



# Resultierende Amplitude für gleichfrequente Schwingungen

$$\begin{aligned} f(t) &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \\ &= A \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

für  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi / 2$  gilt:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

# Resultierende Phase für gleichfrequente Schwingungen

$$\begin{aligned} f(t) &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \\ &= A \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2)}{A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)}$$

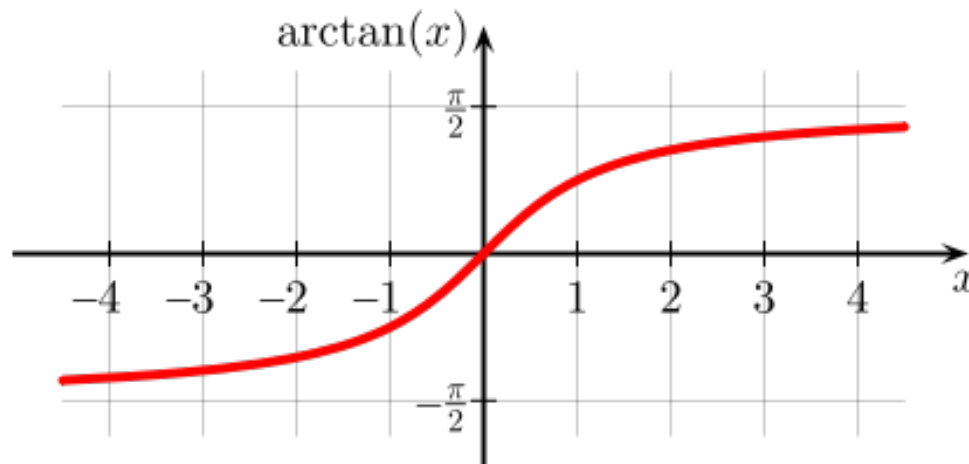
für  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi / 2$  gilt:

$$\tan(\varphi) = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$$

# Resultierende Phase für gleichfrequente Schwingungen

$$\begin{aligned} f(t) &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \\ &= A \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

für  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi / 2$  gilt:  $\tan(\varphi) = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$



# Betrags- und Phasenspektrum

- Betragsspektrum: Darstellung der resultierenden Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz.
- Phasenspektrum: Darstellung der resultierenden Phase in Abhängigkeit von der Frequenz.
- Die Darstellung mit Betrags- und Phasenspektrum wird als Polardarstellung oder spektrale Darstellung bezeichnet.
- Die Darstellung mit den Basisfunktionen  $\cos()$  und  $\sin()$  wird als komplexe Darstellung bezeichnet.

# Interpretation der Frequenzen

- Das Ergebnis der DFT sind Amplituden der Frequenzen des Fourierspektrums, wobei die einzelnen Frequenzen durch Indizes gekennzeichnet werden.
- Eine Interpretation der Indizes durch sogenannte natürliche Frequenzen in Hz ist durch die Kenntnis der maximalen im Zeitbereich auftretenden Frequenz (diese wird durch das Abtasttheorem beschränkt) möglich.

# Komplexität der Berechnung der DFT über Korrelation

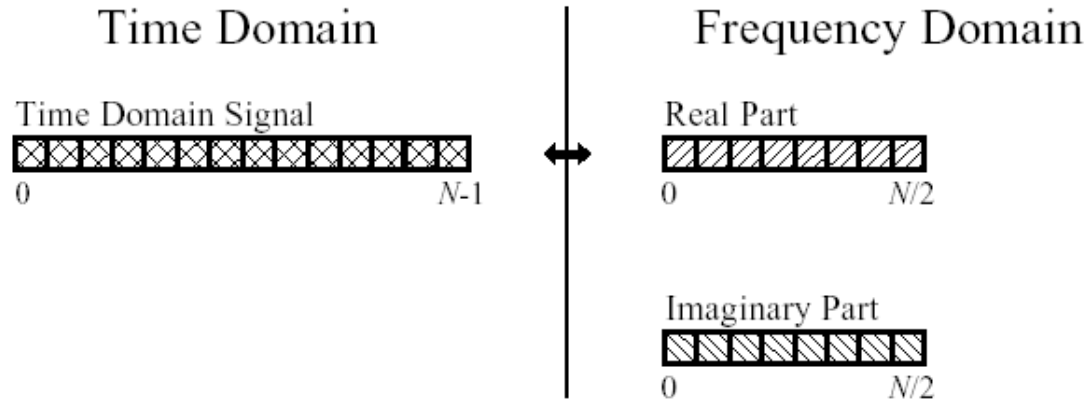
- Welche Komplexität hat die Berechnung?
- Für jeden Wert im Frequenzbereich müssen  $N$  Multiplikationen und Additionen ausgeführt werden.
- Komplexität:  $\mathcal{O}(N^2)$

# Fast Fourier-Transformation (FFT)

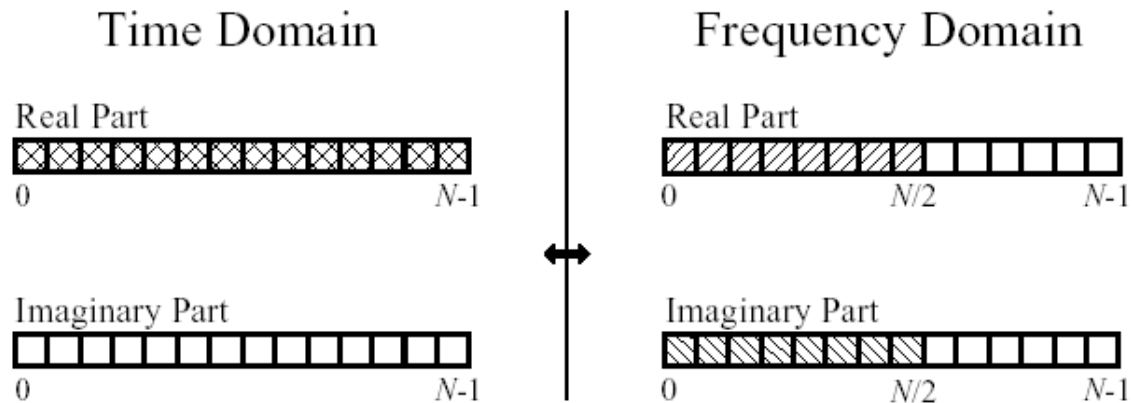
- Die Berechnung einer DFT hat die Komplexität  $N^2$ .
- Insbesondere für große  $N$  führt dies zu hohem Aufwand für die Berechnung der DFT.
- Durch eine geschickte Zerlegung zur Berechnung der Koeffizienten kann die Komplexität mit der FFT auf  $\mathcal{O}(N) \cdot N$  reduziert werden.

# Komplexe DFT

## Real DFT

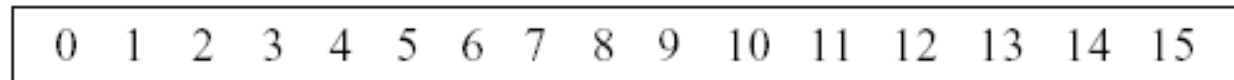


## Complex DFT



# Zerlegung des Zeitsignals

1 signal of  
16 points



2 signals of  
8 points



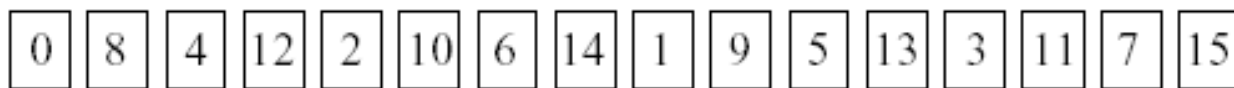
4 signals of  
4 points



8 signals of  
2 points

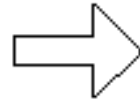


16 signals of  
1 point

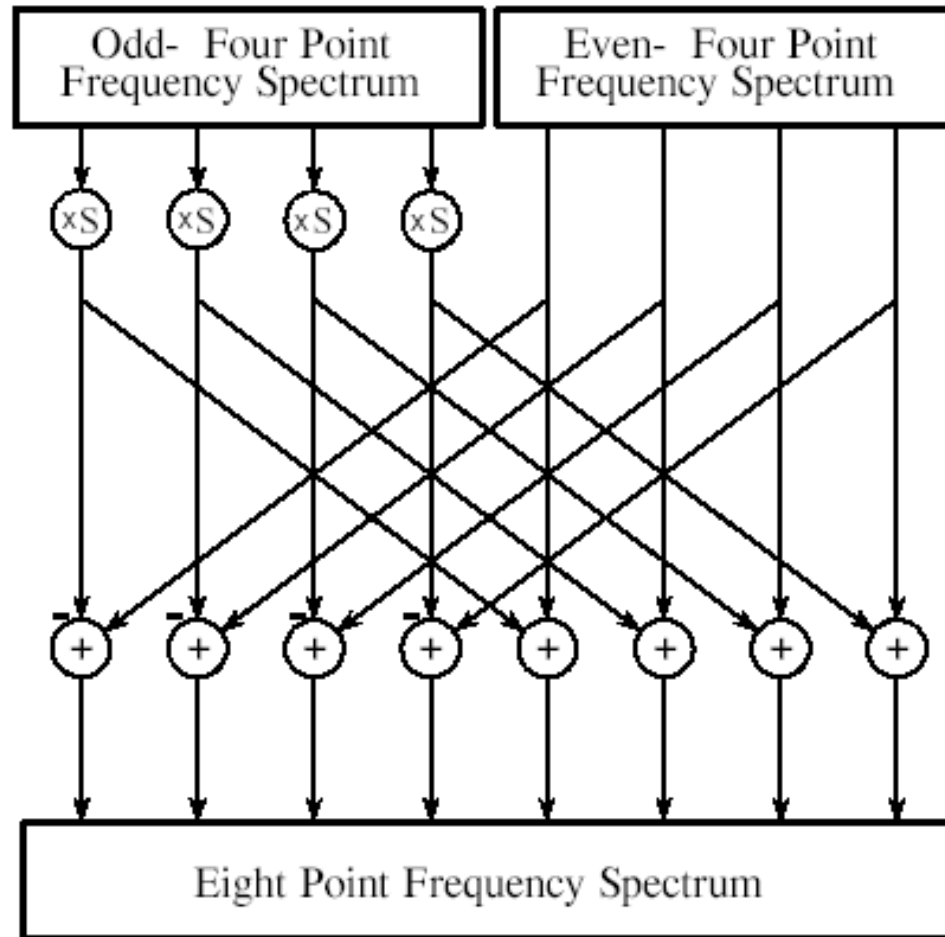


# Bit Reversal

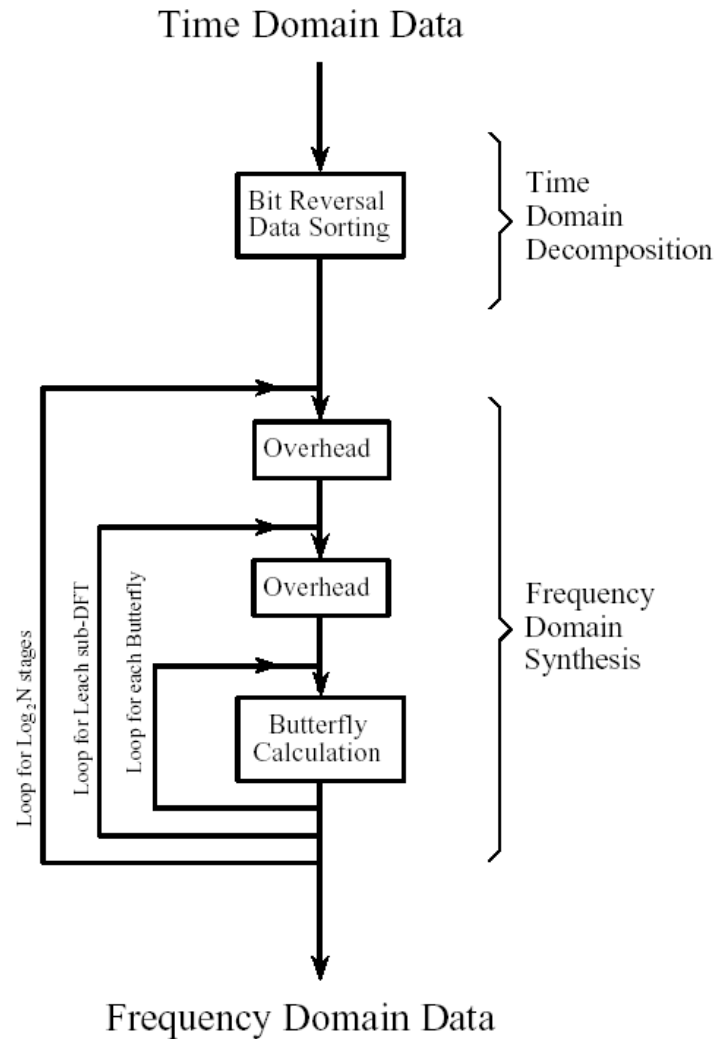
<i>Decimal</i>	<i>Binary</i>		<i>Decimal</i>	<i>Binary</i>
0	0000		0	0000
1	0001		8	1000
2	0010		4	0100
3	0011		12	1100
4	0100		2	0010
5	0101		10	1010
6	0110		6	0100
7	0111		14	1110
8	1000		1	0001
9	1001		9	1001
10	1010		5	0101
11	1011		13	1101
12	1100		3	0011
13	1101		11	1011
14	1110		7	0111
15	1111		15	1111



# Synthese im Frequenzbereich



# Schema der FFT



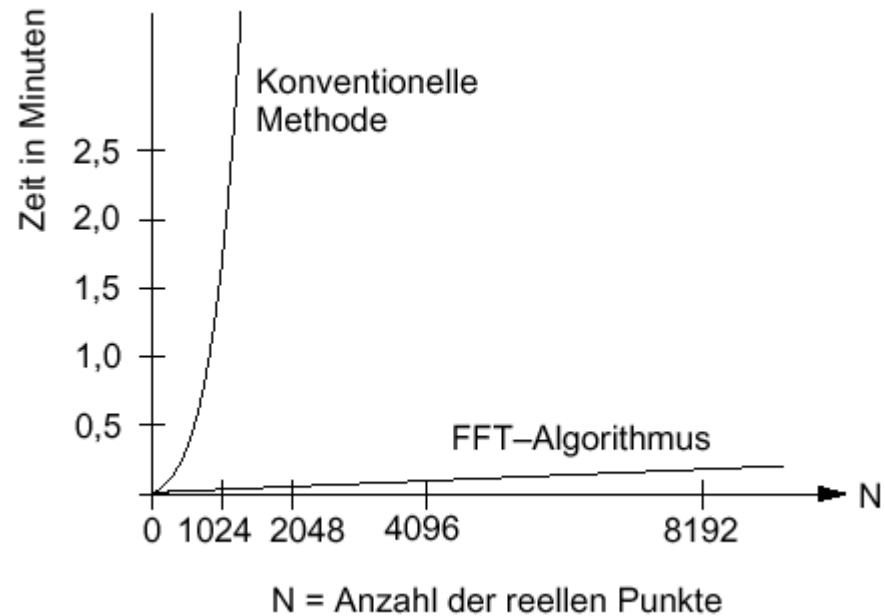
# Fazit FFT

Schneller Algorithmus, der die Rechenzeit erheblich verkürzt. Er zerlegt eine Zahlenfolge der Länge  $N$  in periodische Teilfolgen, vorzugsweise auf der Basis 2.

Beispiel für  $N = 2^{10} = 1024$

DFT: 1048567 Operationen  $\sim N^2$

FFT: 10240 Operationen  $\sim N \log(N)$



# Value at Risk (VaR)

# Modellbildung

- Modelle sind Hilfsmittel für den Umgang mit Realität.
- Die Realität wird nicht direkt abgebildet, sondern abstrahiert.
  - Nicht zentrale Details werden ignoriert.
  - Komplexität des Modells wird minimiert.

# Glossar

**Portfolio:** In der Ökonomie bezeichnet der Begriff Portfolio ein Bündel von Investitionen, das im Besitz einer Institution oder eines Individuums ist.

**Quantil:** Quantile sind Punkte einer sortierten Messreihe. Der Wert des  $p$ -Quantils einer Verteilung gibt an, welcher Wert die unteren  $p$ -% der Datenwerte von den oberen  $(1 - p)$ -% trennt. Wenn man etwa das 5%-Quantil einer Verteilung angibt, so besagt dies, dass 5% aller Datenwerte kleiner sind als der betreffende Datenwert und 95% größer oder gleich diesem Wert.

# Value at Risk (VaR)

VaR bezeichnet ein Risikomaß, das den geschätzten, maximalen (Marktwert-)Verlust eines Portfolios nach einer vorgegebenen Haltedauer angibt, der mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit unter üblichen Marktbedingungen nicht überschritten wird.

[www.risknet.de/Value-at-Risk.116.0.html](http://www.risknet.de/Value-at-Risk.116.0.html)

Mit anderen Worten:

Der VaR ist als derjenige Portfolioverlust definiert, der innerhalb eines bestimmten Zeitraumes nur mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit noch höher ausfallen kann.

Cremers, Heinz; Value at Risk-Konzepte für Marktrisiken; HfB

# Entwicklung des Konzepts

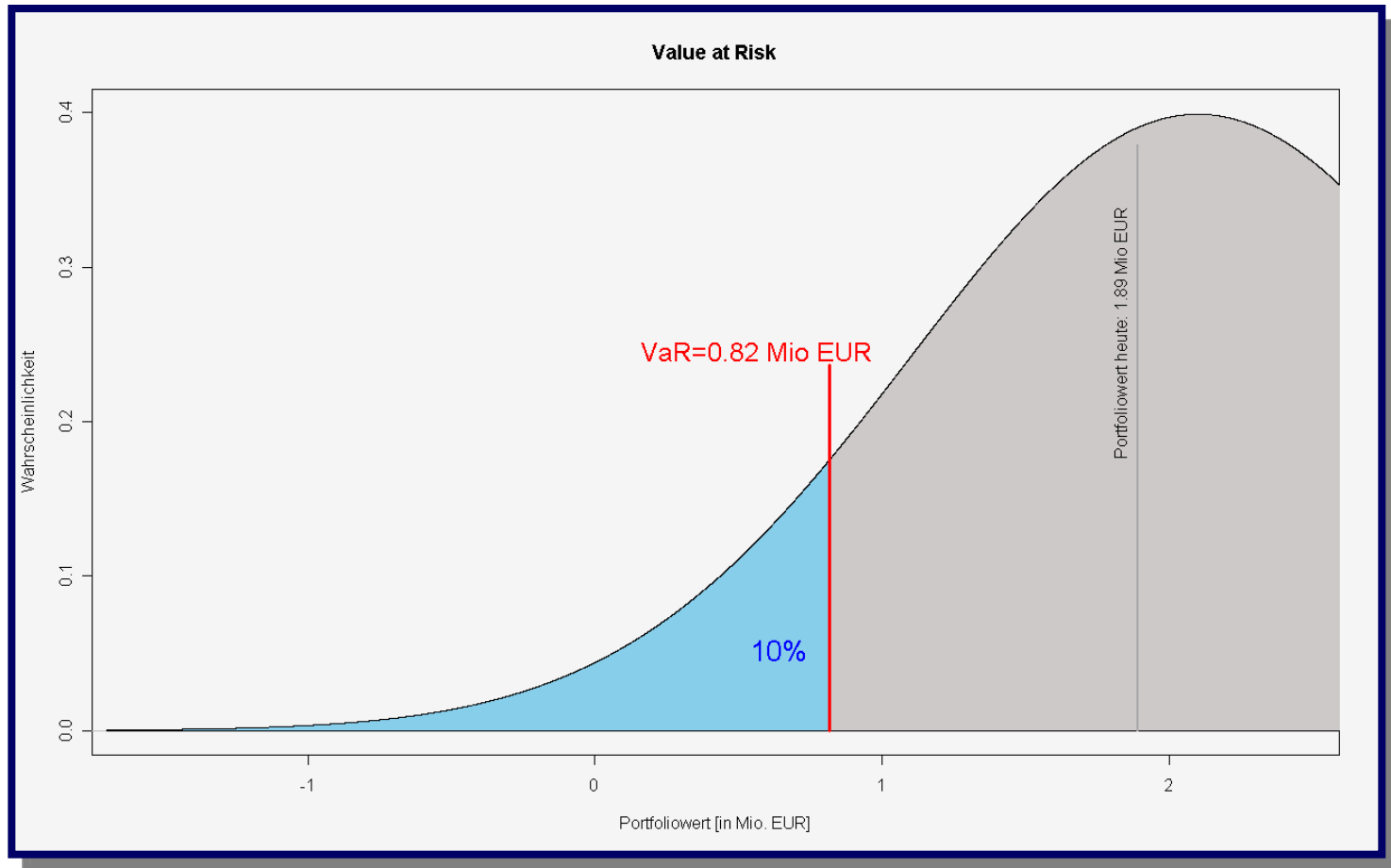
Dennis Weatherstone verlangte während seiner Zeit als Vorsitzender der US-amerikanischen Investmentbank J.P. Morgan täglich um 16.15 Uhr einen einseitigen Risiko-Bericht, in dem das gesamte Portfolio des Handelsbestandes der Bank sowie eine Schätzung der maximal möglichen Verluste in den folgenden 24 Stunden dargestellt waren. Weatherstone war es einfach leid, dass die Marktrisiken der verschiedenen Finanzinstrumente mit unterschiedlichen Methoden gemessen wurden. Sein bisheriger Report enthielt eine Unmenge von Beta-Faktoren und Volatilitäten, gearing factors, Deltas, Gammas und Thetas. Er wollte ein einheitliches Risiko-Maß für alle Finanzinstrumente haben. Dies war die Geburtsstunde des „Report 4.15“ (1994). Dieser Report basiert auf einer Methodik, die als Value at Risk bezeichnet wird.

Quelle: [www.risknet.de/Value-at-Risk.116.0.html](http://www.risknet.de/Value-at-Risk.116.0.html)

# Berechnung des VaR

- Sammlung und Analyse historischer Daten.
- Modellierung der Verteilung.
- Simulation von Kursentwicklungen gemäß der modellierten Verteilung (Monte Carlo Simulation).
- Große Zahl an Simulationen.
- Prognose von Kursentwicklungen.
- Berechnung des monetären Risikos für die Entwicklung des Portfolios.

# Value at Risk



# Glossar

**Konfidenzniveau** gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Schätzung eines statistischen Parameters auf der Basis einer Stichprobe für die Grundgesamtheit zutreffend ist.

**Mark-to-Market:** marktnahe Bewertung, d.h. Bewertung des Portfolio gemäß aktueller Marktpreise.

**BaFin:** Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht beaufsichtigt und kontrolliert alle Bereiche des Finanzwesens in Deutschland (Gründung: 2002).

... eine Abteilung befasst sich mit Grundsatzfragen quantitativ-mathematischer Modellierung bei Markt-, Kredit-, Liquiditäts- und operationellen Risiken. Ihre Mitarbeiter prüfen die Modelle vor Ort ...([link](#))

# VaR im Einsatz (I)

Value-at-Risk ist ein quantitatives Maß für den potenziellen Wertverlust einer Handelsposition aufgrund von Marktschwankungen, der über einen vorgegebenen Zeitraum und mit einem bestimmten Konfidenzniveau nicht überschritten wird.

Unser Value-at-Risk für die Handelsgeschäfte erfolgt auf Basis unseres eigenen internen Value-at-Risk-Modells. Im Oktober 1998 hat das Bundesaufsichtsamt für das Kreditwesen, eines der Vorgängerinstitute der Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht, unser Value-at-Risk-Modell zur Berechnung des regulatorischen Kapitalbedarfs für das allgemeine und spezifische Marktrisiko genehmigt. Das Modell wurde seitdem regelmäßig überarbeitet und die Genehmigung aufrechterhalten.

Die Informationen sind Teil des Konzernabschlusses der Deutschen Bank zum 31.12.2009 ([link](#)).

# VaR im Einsatz (II)

Wir berechnen den Value-at-Risk mit einem Konfidenzniveau von 99 % und einer Haltedauer von einem Tag. Das bedeutet, wir gehen von einer Wahrscheinlichkeit von 1 zu 100 aus, dass ein Mark-to-Market-Verlust aus unseren Handelspositionen mindestens so hoch sein wird wie der berichtete Value-at-Risk-Wert. Für aufsichtsrechtliche Meldezwecke beträgt die Haltedauer zehn Tage.

Wir verwenden historische Marktdaten, um den Value-at-Risk zu bestimmen. Als Basis dient eine historische Beobachtung über 261 gleich gewichtete Handelstage. Bei der Berechnung wird ein Monte Carlo-Simulationsverfahren angewandt, wobei wir davon ausgehen, dass Änderungen in den Risikofaktoren einer bestimmten Verteilung folgen, zum Beispiel der Normalverteilung oder logarithmischen Normalverteilung. Zur Berechnung des aggregierten Value-at-Risk benutzen wir über denselben 261-Tages-Zeitraum beobachtete Korrelationen zwischen den Risikofaktoren.

Lesen Sie den vollständigen Text auf der Seite der Deutschen Bank bitte sehr aufmerksam und stellen Sie etwaige Fragen bitte im Kontext der Wiederholung ([link](#)).

# Berechnung des VaR

- Sammlung und Analyse historischer Daten.
- Modellierung der Verteilung.
- Simulation von Kursentwicklungen gemäß der modellierten Verteilung (Monte Carlo Simulation).
- Große Zahl an Simulationen.
- Prognose von Kursentwicklungen.
- Berechnung des monetären Risikos für die Entwicklung des Portfolios.

# Monte Carlo Simulation

- In den 1940er Jahren im Kontext der Atomforschung für die Abschätzung der Wechselwirkung zwischen Neutronen und Materie entwickelt.
- Einsatz zur Lösung analytisch nicht lösbarer Probleme.
- Basis ist die Durchführung von Zufallsexperimenten.
- Der Name geht auf die berühmte Spielbank zurück. Prinzipiell könnten Zufallszahlen auch mit einem Roulette erzeugt werden.

# Verteilung von Zufallsvariablen

- Roulette – wie sind die Zahlen des Roulette verteilt?

Gleichverteilt - jede Zahl (sollte) gleich wahrscheinlich sein.

- Wie ist die Größe erwachsener Frauen eines Kulturkreises verteilt?

Normalverteilt – eine mittlere Größe wird relativ häufig gefunden während Extremwerte sehr selten auftreten.

# Mittelwert, Varianz, Standardabweichung

Mittelwert: 
$$\mu_x = \sum_{t=1}^T x(t) / T$$

Varianz: 
$$\sigma_x^2 = \sum_{t=1}^T (x(t) - \mu_x)^2 / T$$

Standardabweichung: 
$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

# Statistische Kenngrößen einer Stichprobe (empirisch)

Erwartungswert: 
$$\widehat{\mu}_x = \sum_{i=1}^N x_i / N$$

Empirische Varianz: 
$$\widehat{\sigma}_x^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \widehat{\mu}_x)^2 / (N - 1)$$

Empirische Standardabweichung: 
$$\widehat{\sigma}_x = \sqrt{\widehat{\sigma}_x^2}$$

# Berechnung der empirischen Standardabweichung

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\frac{N * \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}{N * (N - 1)}}$$

Besonderheit: Erwartungswert muss vorab nicht berechnet werden

# Normalverteilung (Gauß-Verteilung)

- Johann Carl Friedrich Gauß (1777-1855)
- Die Normalverteilung (Gauß-Verteilung) ist die wichtigste kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung. Ihre Wahrscheinlichkeitsdichte wird als Gaußdichte oder Glockenkurve bezeichnet.
- Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass eine Summe von  $n$  unabhängigen, gleichverteilten Zufallsvariablen in der Grenze  $n$  gegen *unendlich* normalverteilt ist.
- Eine Normalverteilung wird durch Mittelwert und Varianz vollständig definiert.

# Gaußdichte

Gaußdichte der Normalverteilung:

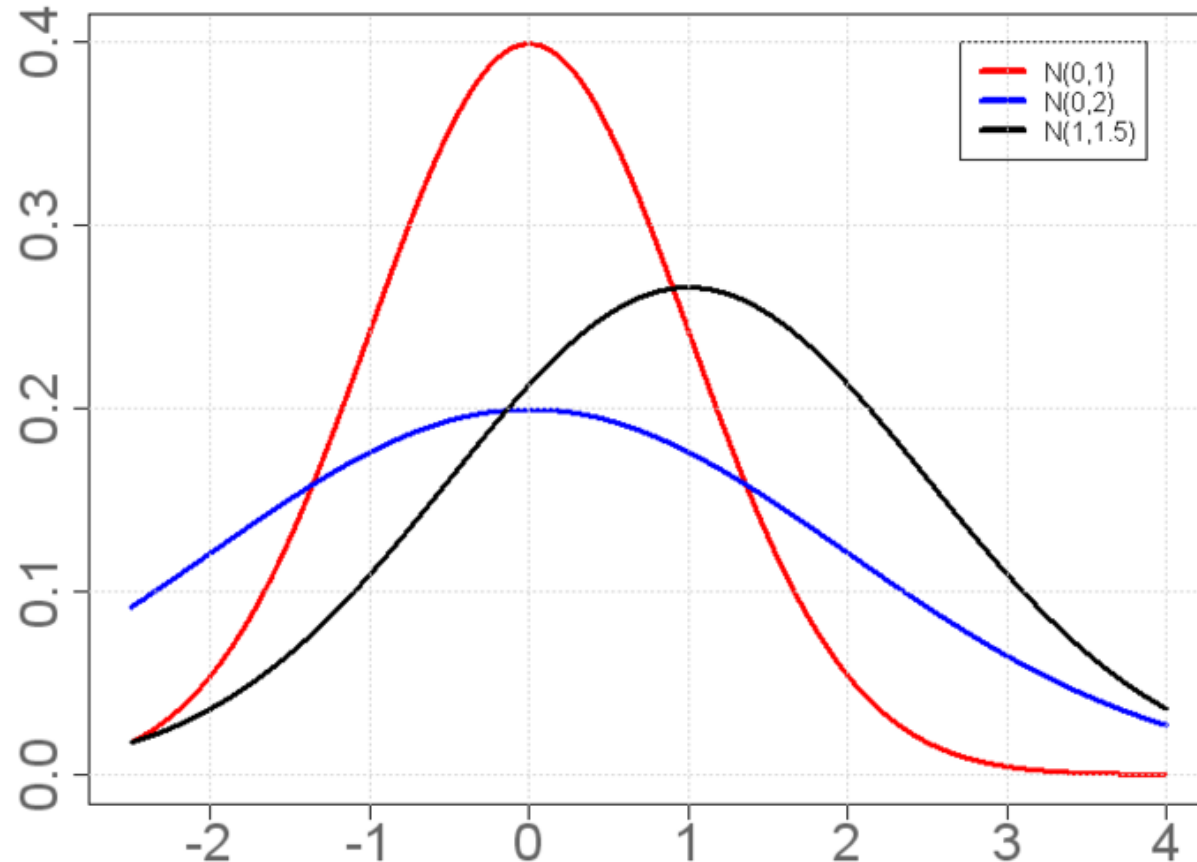
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma_x}} e^{-(x-\mu_x)^2 / 2\sigma_x^2}$$

Gaußdichte der Standardnormalverteilung:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2 / 2}$$

# Beispiele

Dichtefunktionen von normalverteilten Zufallsgrößen  
mit unterschiedlichen Parametern



Interaktive Demo:

<http://campus.uni-muenster.de/fileadmin/einrichtung/imib/lehre/skripte/biomathe/bio/normn1.html>

# Charakteristische Wertebereiche

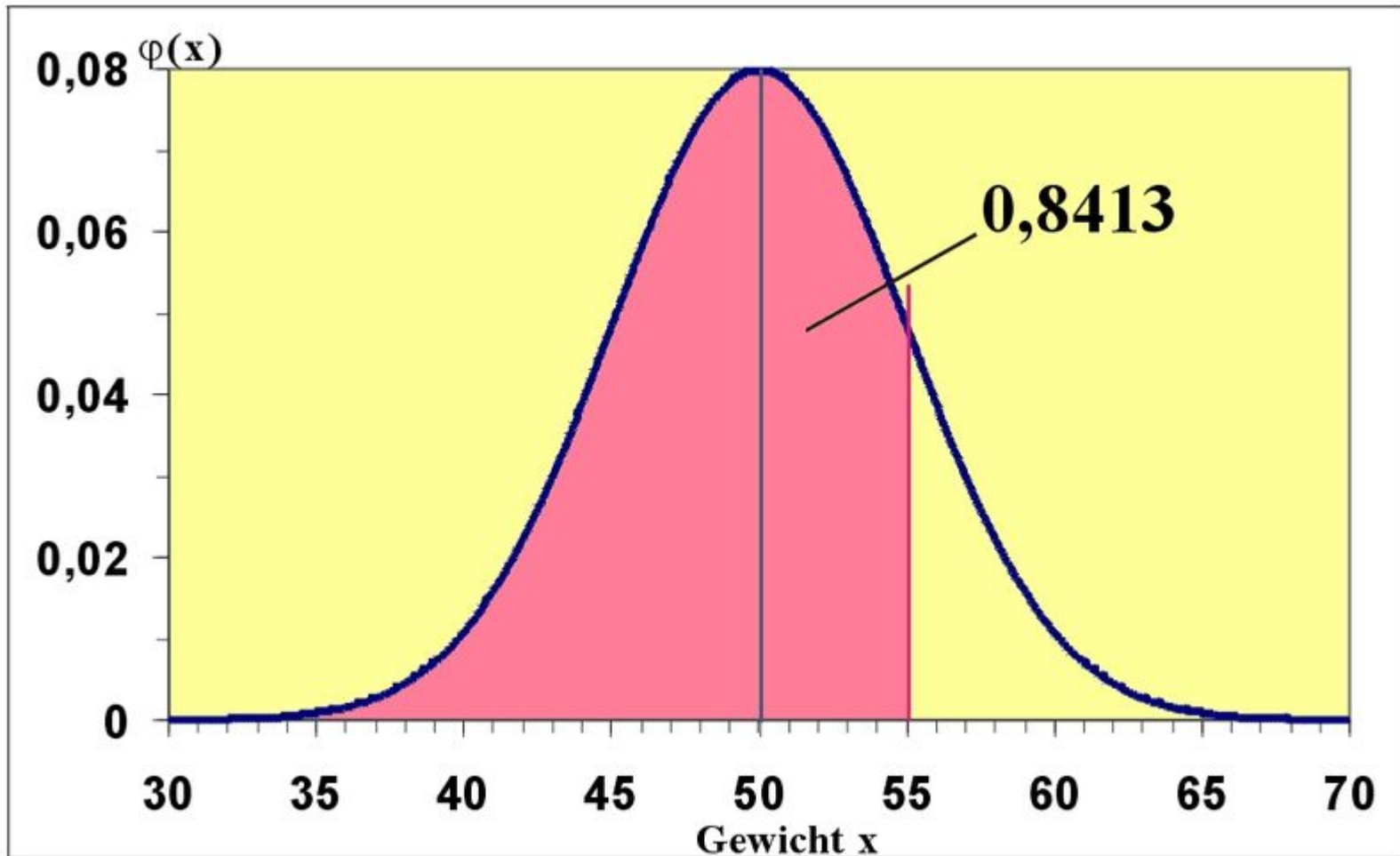
- 68,27% aller Werte einer normalverteilten Zufallsvariablen liegen innerhalb des Intervalls

$$\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma$$

- 95,45% aller Werte einer normalverteilten Zufallsvariablen liegen innerhalb des Intervalls

$$\mu - (2 * \sigma) \leq X \leq \mu + (2 * \sigma)$$

# Beispiel



Quelle: <http://de.wikibooks.org/wiki/Bild:NormDensEggs.jpg>

# Beispiel (IQ)

- Ein Intelligenztest sei so normiert, dass der mittlere IQ 100 beträgt und eine Varianz von 225 gemessen wird.
- Für einen Probanden wird ein IQ von 130 ermittelt.
- Schätzen Sie bitte den Anteil der Untersuchungsgruppe ab, der einen geringeren IQ im Test erreichen wird.
- Ca. 97,7% der Probanden erreichen einen IQ unter 130.

# Glossar

multivariat: Die gemeinsame Verteilung mehrerer Zufallsvariablen wird als multivariate Zufallsverteilung bezeichnet.

univariat: Die Verteilung einer einzelnen Zufallsvariablen wird als univariate Zufallsverteilung bezeichnet.

# Erwartungsvektor und empirische Kovarianzmatrix

$$\widehat{\underline{\mu}}_x = \sum_{n=1}^N \underline{x}(n) / N$$

$$\widehat{\underline{\underline{\text{COV}}}}_x = \begin{pmatrix} \text{COV}(x_1, x_1) & \cdot & \cdot & \cdot & \text{COV}(x_1, x_M) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{COV}(x_M, x_1) & \cdot & \cdot & \cdot & \text{COV}(x_M, x_M) \end{pmatrix}$$

$$\text{COV}(x_i, x_j) = \sum_{n=1}^N (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) / (N - 1) = \text{COV}(x_j, x_i)$$

# Korrelation

Die Korrelation ist ein Maß für die Beziehung zwischen zwei Zufallsvariablen. Hinweis: Eine starke Korrelation lässt keine Aussage über den kausalen Zusammenhang zwischen Zufallsvariablen zu.

Die Komponente  $\text{cov}(x_i, x_j)$  der Kovarianzmatrix der multivariaten Normalverteilung einer Modellgröße ist ein Maß für die Korrelation der  $i$ -ten Komponente der Modellgröße mit der  $j$ -ten Komponente der Modellgröße.

# Scheinkausalität

Der Rückgang der Störche korreliert stark mit dem Rückgang der Geburtenrate. Daher sind Störche doch für unsere Fortpflanzung zuständig.

Diese Folgerung ist nicht zulässig. Erklärung: Die fortschreitende Industrialisierung hat sowohl zu einem Rückgang der Störche als auch zu einem Rückgang der Geburtenrate geführt.

# Berechnung des Korrelationskoeffizienten

$$\rho(x_1, x_2) = \frac{\text{COV}(x_1, x_2)}{\sigma(x_1) * \sigma(x_2)}$$

$\rho(x_1, x_2) = 0$ : Unabhängigkeit der beiden Variablen

$\rho(x_1, x_2) = 1$ : exakte positive lineare Abhängigkeit

$\rho(x_1, x_2) = -1$ : exakte negative lineare Abhängigkeit

# Mehrdimensionale Gaußdichte

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot \det(\underline{\underline{\text{cov}}}_{\underline{x}})}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\mu}_x)^T (\underline{\underline{\text{cov}}}_{\underline{x}})^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu}_x)}$$

# Multivariate Normalverteilung (2-dimensional)

Interaktive Demo:

<http://www.uni-konstanz.de/FuF/wiwi/heiler/os/vt-binorm3d.html>

<http://lstat.kuleuven.be/java>

# Glossar

**Modellgröße:** Die zu modellierende Größe. Beispiel: Wert bzw. Preis der Bestandteile des Portfolios (Rohdaten). eine sinnvolle Parametrisierung ist die Berechnung relativer Änderungen.

**empirisch:** Die Prognose wird aus historischen Beobachtungen, Simulationen oder subjektiven Einschätzungen gewonnen.

**parametrisch:** Die Prognose wird auf der Basis der Annahme des Typs der zu Grunde liegenden Verteilung und der Schätzung der erforderlichen Parameter der Verteilung gewonnen.

# Konzepte zur Berechnung des VaR

- Historische Simulation
- Monte Carlo Simulation

# Historische Simulation

- Verfahren: historisch/empirisch
- Historische Beobachtungen der Modellgrößen werden gesammelt.
- Aus den historischen Beobachtungen werden Wertänderungen des aktuellen Portfolio berechnet.
- Aus der geordneten (empirischen) Messreihe der berechneten Änderungen des Portfolio wird das Quantil bestimmt.
- Hinweis: Für die Anwendung der historischen Simulation muss keine Annahme über die zu Grunde liegende Verteilung getroffen werden.

# Monte Carlo Simulation

- Verfahren: parametrisch/empirisch
- An Hand empirischer Daten werden die Parameter einer zu Grunde gelegten Verteilung der Modellgrößen geschätzt.
- Es werden zufällig Werte (Wertänderungen) erzeugt, die der geschätzten Verteilung gehorchen.
- Für jede zufällig erzeugte Wertänderung wird die Auswirkung auf das aktuelle Portfolio berechnet.
- Aus der geordneten (empirischen) Messreihe der simulierten Änderungen des Portfolio wird das Quantil bestimmt.

# Zufallsprozesse

- Radioaktiver atomarer Zerfall
- Thermisches Rauschen (Widerstand)
- Zufallsprozesse sind reale physikalische Prozesse.
- Zur Durchführung von Simulationen werden häufig Zufallszahlen benötigt.
- Nur sehr selten werden zur Erzeugung von Zufallszahlen reale Zufallsprozesse beobachtet.

# Zufallsgeneratoren

- Meist werden für Simulationen Zufallsgeneratoren eingesetzt, die algorithmisch Zufallszahlen erzeugen.
- Hierbei handelt es sich um deterministische Pseudo-Zufallszahlen, die sich periodisch wiederholen.
- Es werden also immer die selben Zufallszahlen aufeinander folgen.

# Beispiel

*rand()* unter BSD-Unix (Linear Kongruenter Generator LCG)

$$x(n) = (a * x(n-1) + c) \bmod m$$

$$a = 1103515245$$

$$c = 12345$$

$$m = 2^{31}$$

Periode:  $2^{31}$

$x$  ist die aktuell berechnete Zufallszahl, die von der vorher berechneten eindeutig abhängt. Daher ist die Initialisierung von  $x$  von großer Bedeutung.

# Anwendung

Initialisierung erfolgt über einen Seed (Saat)-Wert. Häufig wird die aktuelle Systemzeit verwendet.

```
srand( time(0))
```

Der von *rand()* generierte Wert liegt im Bereich:

$$0 \leq x \leq m$$

Für die Erzeugung von Zufallszahlen aus einem speziellen Wertebereich sollte das Ergebnis von *rand()* mit *m* und dem gewünschten Wertebereich skaliert werden. Üblicherweise kann *m* als Konstante abgefragt werden.

# Erzeugung standardisierter normalverteilter Zufallszahlen

1. Erzeugung zweier gleichverteilter unabhängiger Zufallszahlen  $x_1$  und  $x_2$  zwischen 0 und 1.
2. Umformungen:  $v_1 = 2x_1 - 1$  ,  $v_2 = 2x_2 - 1$  ,  $s = v_1^2 + v_2^2$
3. Falls  $s \geq 1$  , zurück zu 1.
4.  $u_1 = v_1 \sqrt{-(2/s) \ln(s)}$  ,  $u_2 = v_2 \sqrt{-(2/s) \ln(s)}$

$u_1$  und  $u_2$  sind zwei unabhängige Zufallszahlen, die der Standardnormalverteilung folgen.

# Erzeugung normalverteilter Zufallszahlen

Eine Normalverteilung  $N$  ist mit einer Kovarianzmatrix

$\widehat{\underline{\underline{\text{cov}}}}_x$  und einem Erwartungsvektor  $\widehat{\underline{\underline{\mu}}}_x$  vollständig definiert.

Zufallsvektoren  $\underline{y}$ , die der Normalverteilung  $N$  genügen, können durch folgende Operation erzeugt werden:

$$\underline{y} = \underline{\underline{D}}\underline{u} + \widehat{\underline{\underline{\mu}}}_x ,$$

wobei  $\underline{u}$  ein Zufallsvektor ist, der einer Standardnormalverteilung folgt, und  $\underline{\underline{D}}$  die untere Dreiecksmatrix der Cholesky-Zerlegung der Kovarianzmatrix ist.

# Cholesky-Zerlegung

$\underline{\underline{B}}$  sei die Kovarianzmatrix  $\widehat{\underline{\underline{cov}}}_x$ .

$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{D}}\underline{\underline{D}}^T$  wird als Cholesky-Zerlegung bezeichnet.

Die Koeffizienten  $d_{ij}$  der Matrix  $\underline{\underline{D}}$  können in folgender Weise berechnet werden:

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i < j \\ \sqrt{b_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} d_{ik}^2} & \text{für } i = j \\ \frac{1}{d_{jj}} \left( b_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} d_{ik} d_{jk} \right) & \text{für } i > j \end{cases}$$

# Zusammenfassung

1. Berechnung von Kovarianzmatrix und Erwartungsvektor.
2. Berechnung der Cholesky-Zerlegung der Kovarianzmatrix.
3. Erzeugung von Zufallsvektoren, die der Standardnormalverteilung folgen.
4. Auf Basis des Erwartungsvektors und der Cholesky-Zerlegung der Kovarianzmatrix kann für jeden erzeugten Zufallsvektor aus 3. ein Zufallsvektor generiert werden, der der Normalverteilung folgt, die durch die in 1. berechneten Parameter definiert wird.

# Parametrisierung

- Kurse liegen als absolute Werte vor.
- Man möchte die Veränderung erfassen und hierbei eine gewisse Unabhängigkeit von den absoluten Größen erreichen.
- Es ist naheliegend die Kursveränderung als relativen Wert zu erfassen.

Deutsche Bank: 41,70 € (17.04.09), 39,26 € (16.04.09)

$$\frac{41,70 - 39,26}{39,26} = 0,062 = 6,2\%$$

# Berechnung des VaR mit einer Monte Carlo Simulation

- An Hand historischer Daten werden der Erwartungsvektor und die empirische Kovarianzmatrix für den Vektor der Kursänderungen geschätzt. Wobei der Vektor die Kurse der Papiere enthält, die im aktuellen Portfolio enthalten sind.
- Es wird eine große Zahl von Zufallsvektoren erzeugt, die der geschätzten Normalverteilung der Kursänderungen der Werte des Portfolios folgen.
- Für jede zufällig erzeugte Wertänderung wird die Auswirkung auf das aktuelle Portfolio berechnet.
- Aus der geordneten (empirischen) Messreihe der simulierten Änderungen des Portfolio wird das Quantil bestimmt.

# Berechnung des VaR

- **Monte Carlo Simulation**
- Sammlung und Analyse historischer Daten.
- Modellierung der Verteilung.
- Simulation von Kursentwicklungen gemäß der modellierten Verteilung.
- Große Zahl an Simulationen.
- Prognose von Kursentwicklungen.
- Berechnung des monetären Risikos für die Entwicklung des Portfolios.