



h\_da

HOCHSCHULE DARMSTADT  
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

# Computational Intelligence

Kap. 2:  
Fuzzy-Logik - Teil 1

Dr. Norbert Waleschkowski



Semantis Information Builders GmbH  
[www.semantis-ib.de](http://www.semantis-ib.de)

h\_da Fachbereich Informatik  
Sommersemester 2011  
Master-Studiengang

Diese Unterlagen sind nur für den persönlichen Gebrauch der Hörer bestimmt!



M.C. Escher: Wasserfall (1961)

## Literatur zur Fuzzy Logik

- ▲ Biewer, B.: Fuzzy-Methoden, Springer-Verlag, 1997
- ▲ Borgelt, Christian; Klawonn, Frank; Kruse, Rudolf; Nauck, Detlef: Neuro-Fuzzy-Systeme – Von den Grundlagen künstlicher Neuronaler Netze zur Kopplung mit Fuzzy-Systemen, Vieweg-Verlag, 2003
- ▲ Bothe, Hans-H.: Neuro-Fuzzy-Methoden. Einführung in Theorie und Anwendungen, Springer-Verlag, 1999
- ▲ Dilger, W.: Schließen mit unscharfem Wissen, Skriptum Univ. Chemnitz, 1999
- ▲ Dubois, D.; Prade, H.; Yager, R.R. (Eds.): Fuzzy Information Engineering – a Guided Tour of Applications, John Wiley & Sons, 1997
- ▲ Goos, Gerhard: Vorlesungen über Informatik Band 4: Paralleles Rechnen und nicht analytische Lösungsverfahren, Springer-Verlag, 1998
- ▲ Iwe, H.: Einführung in die Fuzzy-Technologie, Skriptum HWT Dresden, 2000
- ▲ Konar, Amit: Computational Intelligence. Principles, Techniques and Applications, Springer-Verlag 2005
- ▲ Kosko, Bart: Fuzzy Engineering, Prentice-Hall, 1997
- ▲ Kosko, Bart: Die Zukunft ist fuzzy. Unscharfe Logik verändert die Welt, Piper-Verlag, 2001
- ▲ Kruse, R.; Gebhardt, J.; Klawonn, F.: Fuzzy Systeme, Teubner-Verlag, Stuttgart 1993
- ▲ Mamdani, E.H.; Assilian, S.: An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller, in: International Journal of Man Machine Studies 7: 1-13, Academic Press, London, 1975
- ▲ Zadeh, Lotfi: Fuzzy Sets, in: Information and Control 8: 338-353, Academic Press, San Diego, CA, 1965
- ▲ Zadeh, Lotfi: The Concept of the Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning; in: Information Science 9, 43-80, 1975
- ▲ Zang, Huaguang; Liu, Derong: Fuzzy Modelling and Fuzzy Control, Birkhäuser-Verlag, 2006

# Kap. 2: Fuzzy Logik

## 2.1 Einleitung & Motivation

## 2.2 Fuzzy Mengen und ihre Eigenschaften

## 2.3 Operationen mit Fuzzy Mengen

## 2.4 Fuzzy Control – Ein einleitendes Beispiel

## 2.5 Grundlagen der Fuzzy Control

## 2.6 Neuro-Fuzzy-Systeme

Bereits [Platon](#) (427-347 a.c.\*) vermutet, dass es eine dritte Region zw. wahr und falsch geben müßte.

[Aristoteles](#) (384-322 a.c.) formuliert das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten, das die Logik und Mathematik bis weit in die Gegenwart prägte.

Philosophen ([G. Hegel](#), 1770-1831) und Logiker ([B. Russell](#), 1872-1970) greifen Platons Idee wieder auf. (Russell: „The law of the excluded middle is true, when precise symbols are employed, but it is not true, when symbols are vague, as, in fact, all symbols are.“, Paradoxie des Barbiers, ...).

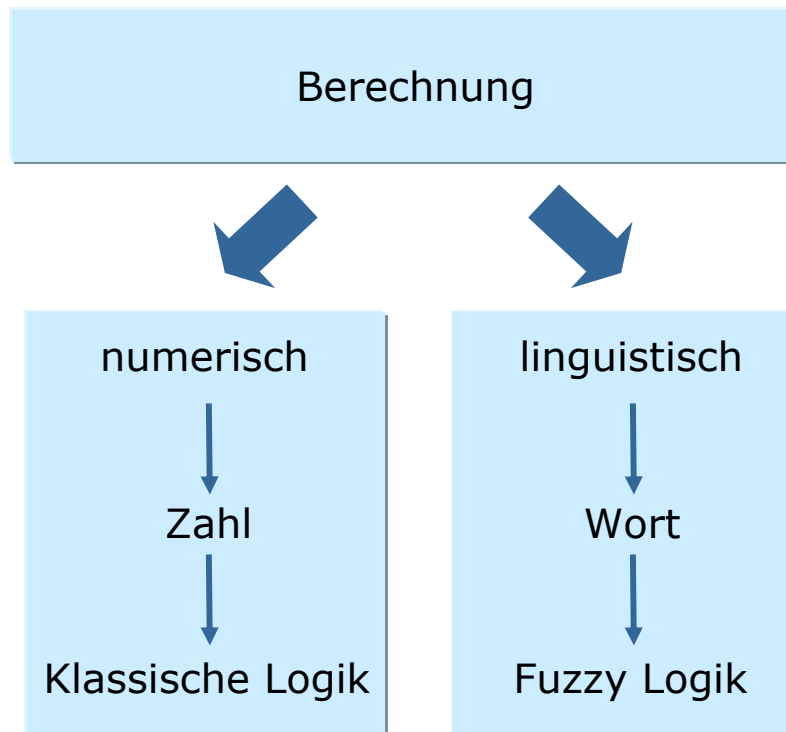
[M. Black](#) stellt 1937 ein Verfahren zur Darstellung der Unschärfe von Symbolen dar. Nicht eindeutig zuordenbare Elemente nennt er frings (Fransen).

Der Mathematiker [K. Menger](#) (1902-1985) führt 1951 den Begriff „Ensembles Flous“ ein.

[J. Lukasiewicz](#) (1878-1956) führt einen Wahrheitswert zwischen wahr (1) und falsch (0) ein, den er possible ( $\frac{1}{2}$ ) nennt und entwickelt in der Folge mehrwertige Logiken. Er formuliert außerdem die Vermutung, dass es unendlichwertige Logiken gibt. →

## Fuzzy Logik – Die Grundidee

- ▲ Die Fuzzy-Logik (dt.: unscharfe Logik) stellt eine Erweiterung der klassischen (zweiwertigen) Logik dar.
- ▲ Der wesentliche Beitrag der Fuzzy Logik besteht darin, das Rechnen mit Worten zu ermöglichen.



- ▲ Die Fuzzy Logik geht von dem Anspruch aus, die Unschärfe des menschlichen Denkens besser nachempfinden, d.h. angemessener modellieren und verarbeiten zu können.
- ▲ Das unscharfe Wissen und Denken entspricht der menschlichen Denkweise offenbar mehr als die Welt der klassischen Logik und der präzisen Mathematik.

## Unscharfe Begriffe (1)

L. Zadeh (geb. 1921) veröffentlicht 1965 seinen Artikel „Fuzzy Sets“. Er verbindet dabei Blacks Idee der Fransen mit der unendlichwertigen Logik Lukasiewicz.

In der Folgezeit wird das Thema in zahlreichen Grundlagenarbeiten exploriert.

Die unscharfe Steuerung der U-Bahn in der japanischen Stadt Sendai ist 1984 die erste praktische Großanwendung der Fuzzy-Methodik.

In den 1990er Jahren wird die Fuzzy-Theorie zu einem Modethema. Zahlreiche Fuzzy-Anwendungen werden entwickelt. Es entsteht ein neuer Zweig der Regelungstechnik.

Heute sind Fuzzy Mengen und Fuzzy Control etablierte Verfahren, aber das Potential der Methodik ist immer noch nicht ausreichend erforscht.

- ▲ Menschen sind in der Lage, ein zerknülltes Blatt Papier aus einigen Metern Entfernung in einen Papierkorb zu werfen, ohne dabei komplexe mathematische Operationen durchzuführen.
- ▲ Bereits bei einer solchen Aufgabe finden sich viele unscharfe Begriffe:
  - ◆ Das Papier ist stark zusammengeknüllt.
  - ◆ Der Papierkorb ist nicht ganz so weit weg.
  - ◆ Man holt kräftig zum Werfen aus.
  - ◆ Der Papierkorb wurde knapp verfehlt, weil man etwas zu weit geworfen hat.
  - ◆ Das nächste Mal wird man etwas weniger kräftig werfen.
- ▲ Trotz – oder gerade wegen – dieser vielen Unschärfen kann man auf dieser Basis mit anderen Menschen kommunizieren.

\* a.d. (anno domini) ≡ n. Chr.  
a.c. (ante christum natum) ≡ v. Chr.

Aus der griechischen Philosophie (Aristoteles) stammt das [Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten](#) [Tertium non datur. (Ein Drittes ist nicht gegeben.); engl. law of the excluded middle]. Es besagt, dass von zwei einander widersprechenden Gegensätzen mindestens einer zutreffen muss ( $A \vee \neg A$ ). Da man die ausgeschlossene dritte Möglichkeit in der griech. Philosophie mit einer räumlichen Analogie als das Mittlere bezeichnet, wird das Prinzip auch Prinzip des ausgeschlossenen Mittleren oder „Prinzip des zwischen zwei kontradiktorischen Gegensätzen stehenden ausgeschlossenen Dritten oder Mittleren“ genannt.

Davon zu unterscheiden ist das [Prinzip der Widerspruchsfreiheit](#) bzw. das Prinzip von der Non-Kontradiktion (Principium non contradictionis) bzw. der Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch ( $A \wedge \neg A$ ). Es besagt, dass zwei einander widersprechende Gegensätze nicht zugleich zutreffen können. Eine Aussage kann nicht gleichzeitig mit ihrem Gegenteil (ihrer Satzverneinung) zutreffen.

## Unscharfe Begriffe (2)

- ▲ Jemand, der größer als 1,85m ist, ist groß.  
Ist jemand, der 1,84m groß ist, nicht groß?
- ▲ Jemand mit einem Jahreseinkommen von 60.000 € erhält einen Bankkredit.  
Soll jemand, der ein Jahreseinkommen von 59.900 € hat, keinen Kredit erhalten?
- ▲ Die klassische Logik (entweder wahr oder falsch) setzt die Existenz von exakten Schwellenwerten und eine eindeutige Entscheidbarkeit voraus.
- ▲ Fuzzy-logische Aussagen sind nicht nur wahr oder falsch, sondern können graduell erfüllt sein.
- ▲ Damit können sogar Paradoxien aufgelöst werden:  
 $A \Leftrightarrow \neg A$  (Die Gesamtaussage hat den Wahrheitsgehalt 0,5.)

Das sog. [Sorites-Paradoxon](#) stammt aus der griech. Philosophie und wurde vermutlich von Eubulides von Milet (4. Jh. a.c.) formuliert. Es behandelt die folgende Problemstellung: „Wieviele Körner machen einen Sandhaufen aus?“ Dabei geht man von folgenden Annahmen aus:

(1) Eine große Anhäufung von sehr vielen (z.B. 1 Milliarde) Sandkörnern ist ein Sandhaufen.

(2) Wenn man von einem Sandhaufen ein Sandkorn wegnimmt, bleibt immer noch ein Sandhaufen übrig.

Es handelt sich offensichtlich um zwei wahre Aussagen. Nach hundertfacher Anwendung haben wir immer noch 999.999.900 Sandkörner und damit einen Sandhaufen. Das Problem besteht darin, dass in der Kette der Schlussfolgerungen kein einzelner Schluss identifiziert werden kann, der falsch ist, wobei der Vorgängerschluss noch richtig war. Vielmehr werden die Schlussfolgerungen allmählich falsch.

Die Bezeichnung „Sorites“ (grch. σωρίτης, abgeleitet von σῶρος (Haufen)) bedeutet Häufelnder.

## Unscharfe Schlussfolgerungen

### ▲ **Kettenschlüsse (Das Sorites-Paradoxon):**

- Faktum: Sehr viele angehäufte Sandkörner bilden einen Sandhaufen.
- Regel: Entnimmt man dem Sandhaufen ein einzelnes Sandkorn, bleibt immer noch ein Sandhaufen übrig.

Die Regel kommt uns im Alltag richtig vor. Dennoch: Auch nach sehr vielen wiederholten Anwendungen der Regel bleibt stets ein Sandhaufen übrig, was aber nicht stimmen kann. → #

### ▲ **Paradoxien in der klassischen Logik:**

- Satz: „Dieser Satz ist falsch!“
- Ist der Satz falsch oder nicht?
- Annahme: Der Satz ist wahr. Dann besagt er, dass der Satz falsch ist. → #
- Annahme: Der Satz ist falsch. Dann ist sein Inhalt falsch. Also ist der Satz wahr. → #

## Weitere Paradoxien

Betrachte die folgenden Aussagen A mit Wahrheitswert  $I(A)$

- ▲ Ein Kreter sagt: „Alle Kreter sind Lügner.“
- ▲ Der Barbier sagt: „Ich rasiere genau alle die Männer, die sich nicht selbst rasieren.“
- ▲ Jemand sagt: „Vertraue mir nicht.“

$$I(A) = I(\neg A)$$

||

$$I(A) = 1 - I(A)$$

$$\Leftrightarrow 2I(A) = 1$$

$$\Leftrightarrow I(A) = I(\neg A) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$  A ist eine „Halbwahrheit.“

$\Rightarrow$   $I(A)$  ist der Akzeptanzgrad.

## Unsicherheitsmodellierung in der KI

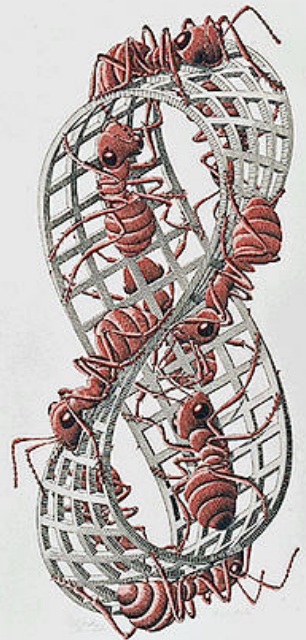
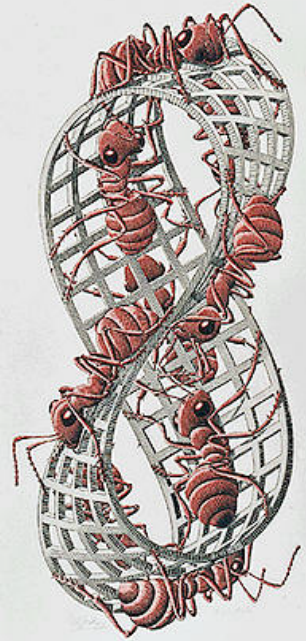
- ▲ Es gibt verschiedene Arten von Unsicherheit:
  - ➔ Stochastische Unsicherheit
    - Die Wahrscheinlichkeit, das Ziel zu treffen, ist 0,8.
  - ➔ Lexikale Unsicherheit
    - große Leute, schnelle Autos, helle Farbtöne
  - ➔ Informationale Unsicherheit
    - Kreditwürdigkeit
  
- ▲ Behandlung der Unsicherheit in der KI durch
  - ➔ Probabilistische Ansätze
  - ➔ Konfidenzfaktoren
  - ➔ Dempster-Shafer-Ansatz
  - ➔ ...
  
- ▲ Die Ergebnisse waren nur bedingt zufriedenstellend.

## Fuzzy Logik - eine exakte Disziplin zur Behandlung der Unschärfe

- ▲ Fazit: Die strenge Schärfe der klassischen Logik führt oft zu Problemen bei der Anwendung auf die reale Welt, die oft nicht so exakt, sondern unscharf und vage - eben fuzzy - ist.
- ▲ Die Fuzzy Logik wurde entwickelt, um Ausschnitte der realen Welt angemessener modellieren zu können.

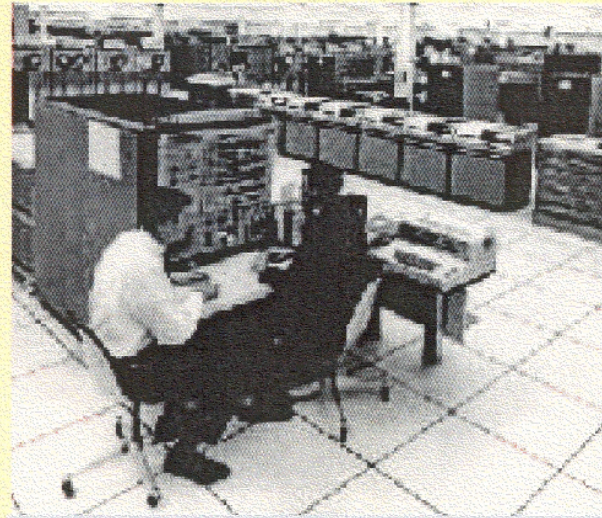
### **Fuzzy Logik:**

- ▲ Präzise unpräzise.
- ▲ Präzision als Zwangsvorstellung entfällt.
- ▲ Auch höchst unpräzise Diskussionen führen zu brauchbaren Ergebnissen.
- ▲ Präzision wird (bisher) nur aus Kosten- oder Machbarkeitsgründen eingeschränkt.
- ▲ Fuzzy-Logik erfordert symbolisches Wissen.
- ▲ Fuzzy-Logik erfordert Modellierung.

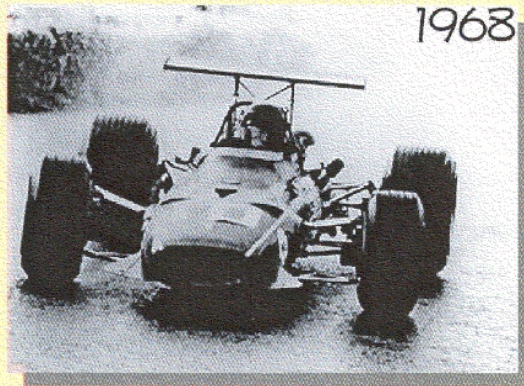


Der Begriff „Fuzzy Set“  
wurde in den 1960er Jahren geprägt.

# Die 1960er Jahre



7.4.1964  
IBM introduces the System/360



# Kap. 2: Fuzzy Logik

2.1 Einleitung & Motivation

2.2 Fuzzy Mengen und ihre Eigenschaften

2.3 Operationen mit Fuzzy Mengen

2.4 Fuzzy Control – Ein einleitendes Beispiel

2.5 Grundlagen der Fuzzy Control

2.6 Neuro-Fuzzy-Systeme

## Fuzzy Sets – Unscharfe Mengen

- ▲ Lotfi Zadeh führt 1965 den Begriff Fuzzy Set ein.

Def.: Sei  $G$  eine Menge von Objekten, die hinsichtlich einer unscharfen Aussage  $U$  zu bewerten sind.

Dann heißt  $U = \{(x, \mu_U(x)) \mid x \in G\}$  eine unscharfe Menge auf  $G$ .

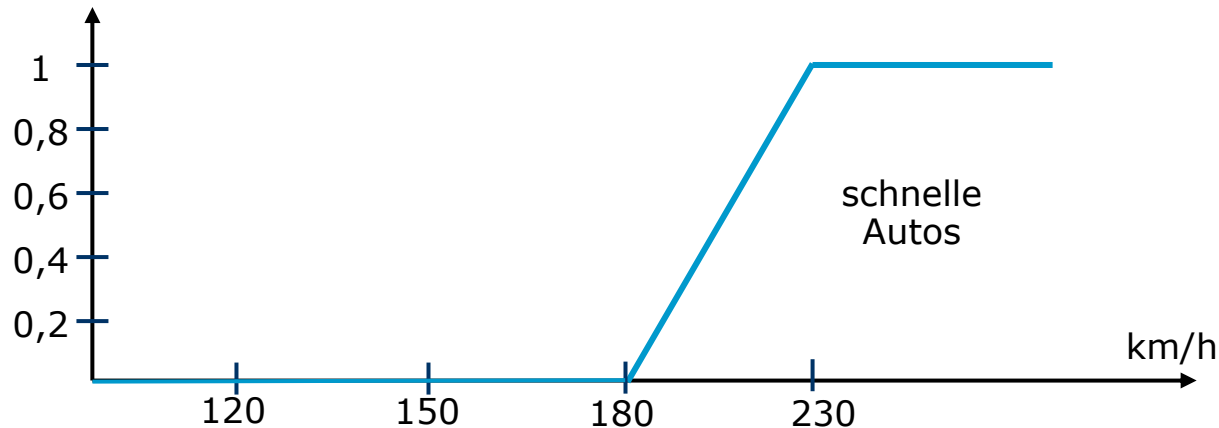
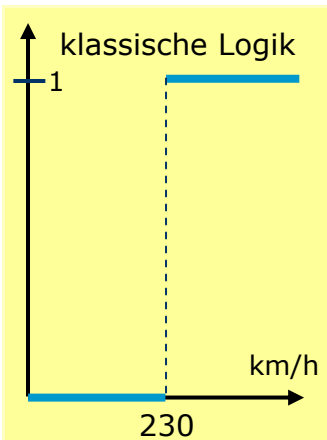
Die Zugehörigkeit von  $x \in G$  zu  $U$  ist durch die Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_U(x) \in [0, 1]$  gegeben.

- ▲ Die klassische Logik liegt vor, wenn  $\mu_U(x) \in \{0, 1\}$ .

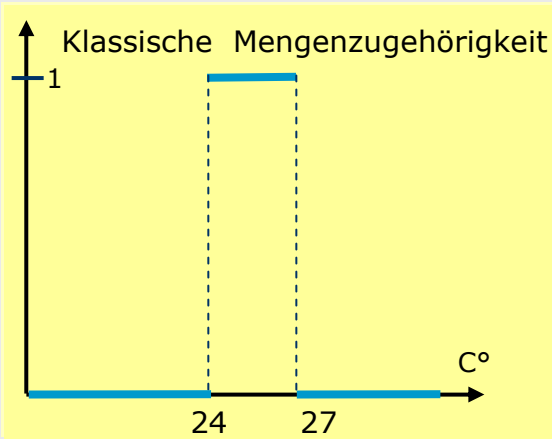
Beispiel:  $G$  sei die Menge aller Autos. Unter „schnellen Autos“ könnte man die unscharfe Menge  $U = \{(180|0), \dots, (190|0.2), \dots, (205|0.5), \dots, (230|1)\}$  verstehen.



Lotfi Zadeh, geb. 1921, ist Professor an der 'Electrical Engineering and Computer Sciences' Fakultät der Berkeley-Universität, Kalifornien.



## Cantor-Mengen vs. Fuzzy-Mengen

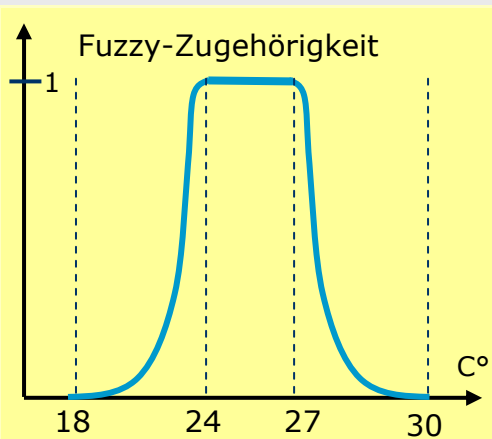


$\left\{ \begin{array}{l} 24^\circ \\ 25^\circ \\ 26^\circ \\ 27^\circ \end{array} \right\}$

## Cantor-Menge

Menge A der angenehmen Badetemperaturen)

- Ein Element gehört der Menge ganz oder gar nicht an.
- $23^\circ \notin A$ ,  $24^\circ \in A$



$\left\{ \begin{array}{l} \dots \\ (20^\circ \mid 0,2) \\ (21^\circ \mid 0,3) \\ (24^\circ \mid 1,0) \\ \dots \\ (27^\circ \mid 1,0) \\ (28^\circ \mid 0,8) \\ (29^\circ \mid 0,5) \\ \dots \end{array} \right\}$

## Fuzzy Menge

Menge A der angenehmen Badetemperaturen

- Ein Element gehört der Fuzzy-Menge zu einem gewissen Grad (zw. 0 und 1) an.
- Der Grad wird durch eine Zugehörigkeitsfunktion bestimmt.

## Cantor-Mengen und charakteristische Funktionen

Cantor-Mengen heißen auch scharfe Mengen (engl. *crispy sets*). Charakteristische Funktionen sind Spezialfälle von Zugehörigkeitsfunktionen.

- ▲ Cantor-Mengen lassen sich mit charakteristischen Funktionen beschreiben.

Def.: Sei  $G$  eine Grundmenge. Sei  $A \subset G$ . Dann heißt  $\chi_A : G \rightarrow \{0,1\}$  charakteristische Funktion der Menge  $A$ , wenn für alle  $x \in G$  gilt:

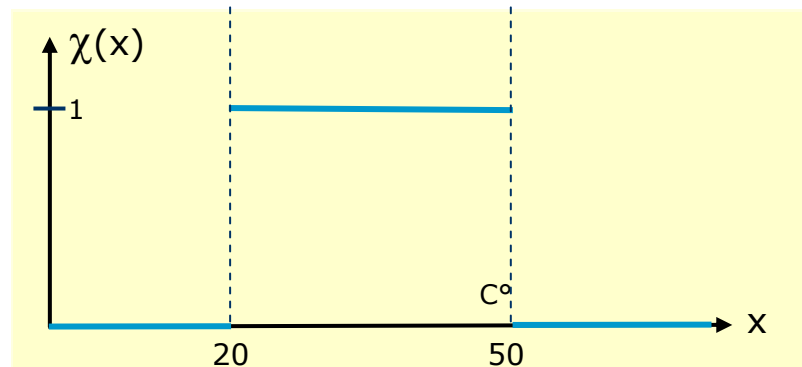
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

- ▲ Damit können auch die mengentheoretischen Operationen Vereinigung, Durchschnitt und Komplement beschrieben werden:

$$\chi_{\bar{C}}(x) = \chi_{\bar{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$$

$$\chi_{A \cap B}(x) = \min(\chi_A(x), \chi_B(x))$$

$$\chi_{A \cup B}(x) = \max(\chi_A(x), \chi_B(x))$$



Charakteristische Funktion der Menge  $M$  der reellen Zahlen von 20 bis 50:

$$\begin{aligned} M &= \{x \in \mathbb{R} \mid 20 \leq x \leq 50\} \\ &= [20, 50] \end{aligned}$$

Der Graph der char. Funktion von  $M$  ließe sich als

$$G_M = \{ (x, \chi(x)) \mid x \in \mathbb{R} \} \text{ notieren.}$$

## Unscharfe Mengen und Zugehörigkeitsfunktionen

- ▲ Unscharfe Mengen werden durch Zugehörigkeitsfunktionen beschrieben. Eine Zugehörigkeitsfunktion ist eine Funktion  $\mu : G \rightarrow [0, 1]$ .
- ▲ Der Graph einer Zugehörigkeitsfunktion  $\mu$  wird als unscharfe Menge  $U$  über  $G$  aufgefasst:

$$U = \{ (x, \mu(x)) \mid x \in G \}$$

- ▲ Zadeh hat alternativ noch eine andere Notation vorgeschlagen: Sei  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  eine scharfe Menge. Diese ließe sich auch als  $u_1 \oplus u_2 \oplus \dots \oplus u_n$  notieren, wobei „ $\oplus$ “ eine Aufzählung darstellt.
- ▲ Ein Tupel  $(u, \mu(u))$  wird als  $\mu(u)/u$  notiert. Die unscharfe Menge  $U$  läßt sich dann wie folgt darstellen:

$$U = \mu(u_1)/u_1 \oplus \mu(u_2)/u_2 \oplus \dots \oplus \mu(u_n)/u_n = \sum_{i=1, \dots, n} \mu(u_i)/u_i$$

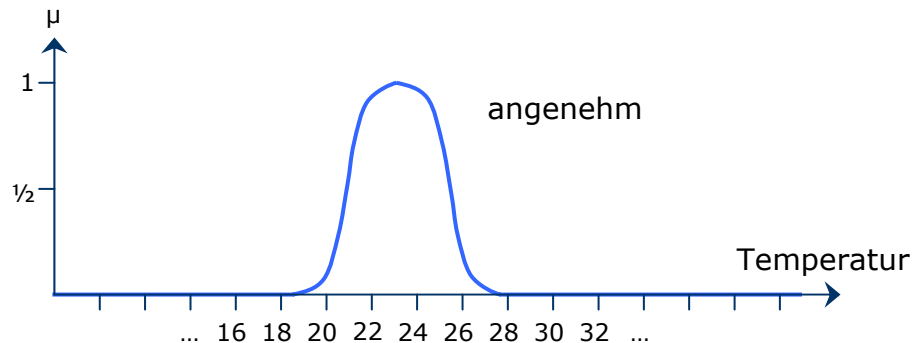
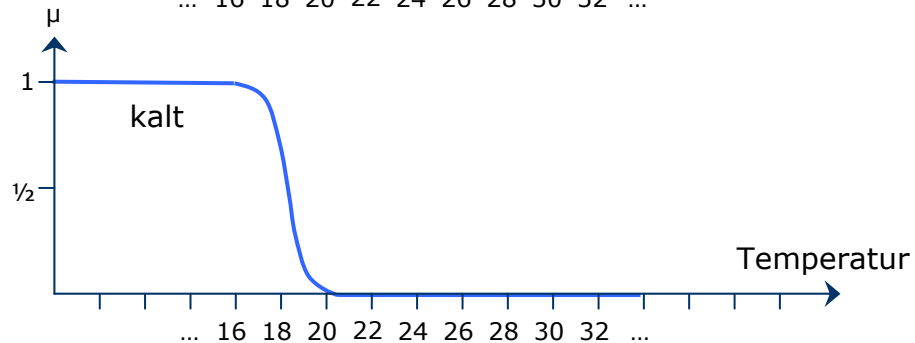
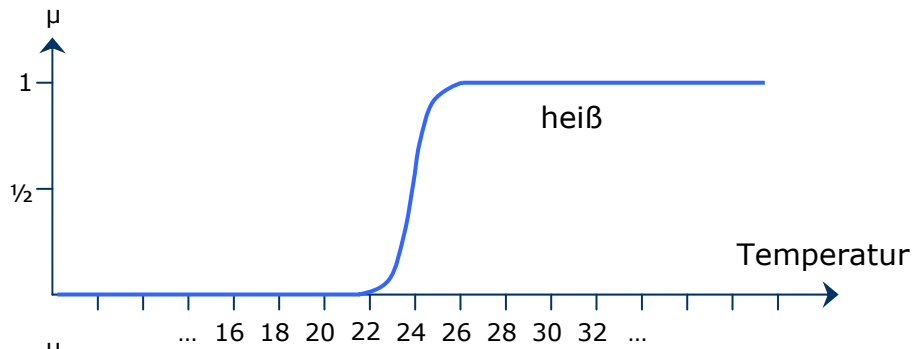
$$\text{bzw. } U = \sum_{u \in U} \mu(u)/u \text{ für unendliche abzählbare Mengen}$$

$$\text{bzw. } U = \int_x \mu_U(u)/u \text{ für den kontinuierlichen Fall.}$$

- ▲ Die Aufzählung  $\oplus$  besitzt folgende Eigenschaft:  
 $\mu_U(u)/u + \mu_V(u)/u = \max(\mu_U(u)/u, \mu_V(u)/u)$ , wenn dasselbe Element  $u$  mit verschiedene Zugehörigkeitsgraden zu zwei Mengen  $U$  und  $V$  gehört.

## Wichtige Zugehörigkeitsfunktionen

### ▲ Wichtige Zugehörigkeitsfunktionen:



### ▲ Wichtige unscharfe Mengen besitzen Zugehörigkeitsfunktionen, die entweder

- ↪ monoton steigend,
- ↪ monoton fallend oder
- ↪ glockenförmig

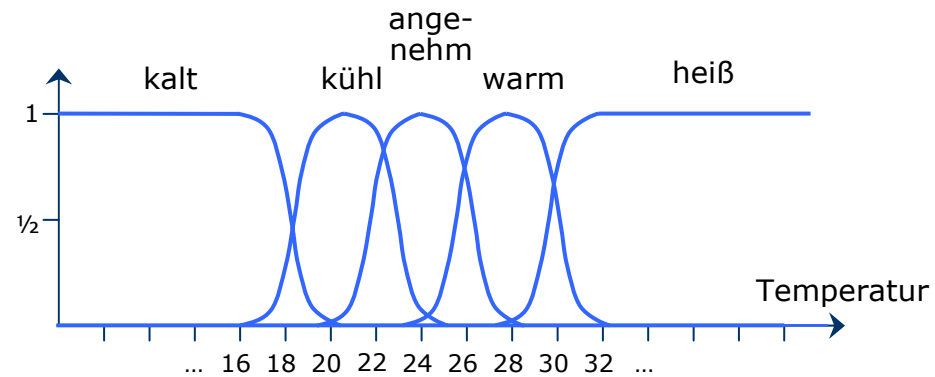
sind.

### ▲ Beispiele: Die Mengen für

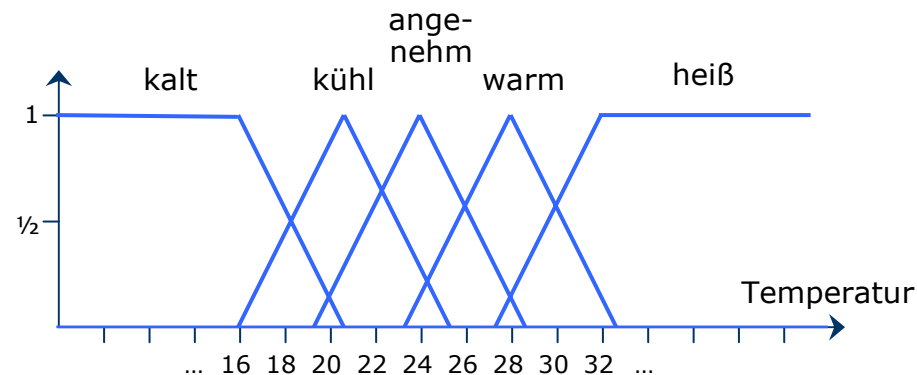
- heiße (H),
- kalte (K) und
- angenehme (A) Badetemperaturen.

## Wichtige Zugehörigkeitsfunktionen

- ▲ Wenn wir diese drei unscharfen Mengen um zwei weitere für kühle und warme Temperaturen ergänzen, erhalten wir die folgende Situation:



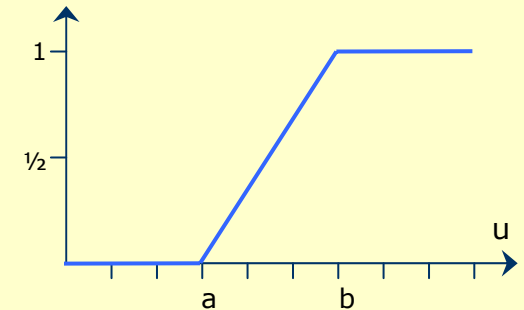
- ▲ In der Praxis verwendet man oft zur rechentechnischen Vereinfachung statt der S- und Glockenkurven linear geglättete Zugehörigkeitsfunktionen:



## Stückweise lineare Zugehörigkeitsfunktionen (1)

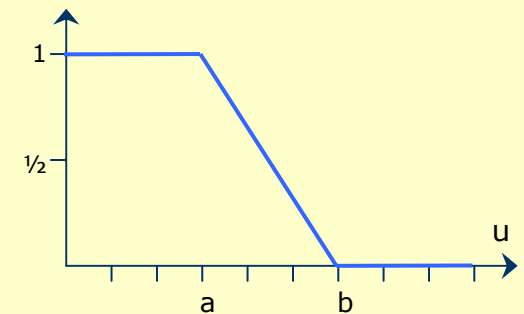
- ▲  $\Gamma$ -Funktionen:  $\Gamma: U \rightarrow [0, 1]$  und hat 2 Parameter.

$$\Gamma(u, a, b) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } u < a \\ \frac{u-a}{b-a} & , \text{ falls } a \leq u \leq b \\ 1 & , \text{ falls } u > b \end{cases}$$



- ▲  $L$ -Funktionen:  $L: U \rightarrow [0, 1]$  und hat 2 Parameter.

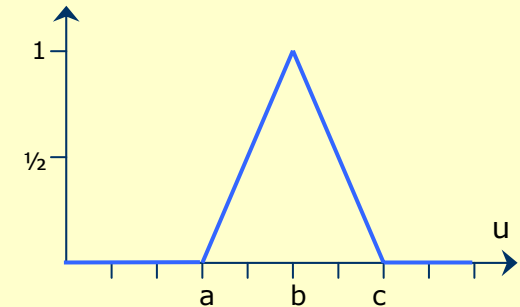
$$L(u, a, b) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } u < a \\ \frac{b-u}{b-a} & , \text{ falls } a \leq u \leq b \\ 0 & , \text{ falls } u > b \end{cases}$$



## Stückweise lineare Zugehörigkeitsfunktionen (2)

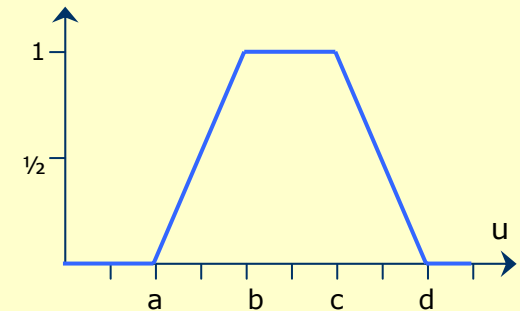
- ▲  $\Lambda$ -Funktionen:  $\Lambda: U \rightarrow [0, 1]$  und hat 3 Parameter.

$$\Lambda(u, a, b, c) = \begin{cases} 0 & \text{falls } u < a \\ \frac{u-a}{b-a} & \text{falls } a \leq u \leq b \\ \frac{c-u}{c-b} & \text{falls } b \leq u \leq c \\ 0 & \text{falls } u > c \end{cases}$$



- ▲  $\Pi$ -Funktionen:  $\Pi: U \rightarrow [0, 1]$  und hat 4 Parameter.

$$\Pi(u, a, b, c, d) = \begin{cases} 0 & \text{falls } u < a \\ \frac{u-a}{b-a} & \text{falls } a \leq u \leq b \\ 1 & \text{falls } b \leq u \leq c \\ \frac{d-u}{d-c} & \text{falls } c \leq u \leq d \\ 0 & \text{falls } u > d \end{cases}$$

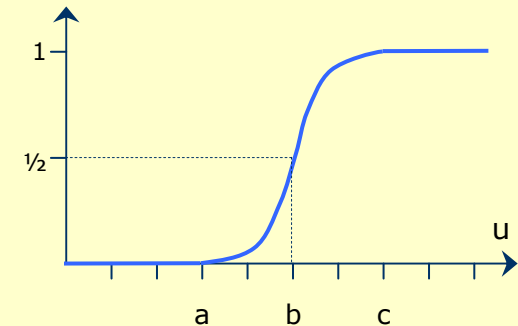


## Zadehs S- und $\pi$ -Funktionen

- ▲ Zadehs S-Funktion:  $S: U \rightarrow [0, 1]$  hat 3 Parameter (1 Hilfs-P.)

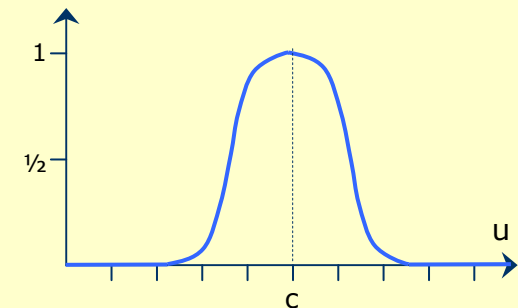
$$S(u, a, b, c) = \begin{cases} 0, & \text{falls } u \leq a \\ 2\left(\frac{u-c}{c-a}\right)^2, & \text{falls } a < u \leq b \\ 1 - 2\left(\frac{u-c}{c-a}\right)^2, & \text{falls } b < u \leq c \\ 1, & \text{falls } u > c \end{cases}$$

Dabei ist  $b = (a + c)/2$ .



- ▲ Zadehs  $\pi$ -Funktion:  $\pi: U \rightarrow [0, 1]$  hat 2 Parameter und läßt sich mittels der S-Funktion definieren.

$$\pi(u, b, c) = \begin{cases} S(u, c-b, c-b/2, c), & \text{falls } u \leq c \\ 1 - S(u, c, c+b/2, c+b), & \text{falls } u > c \end{cases}$$

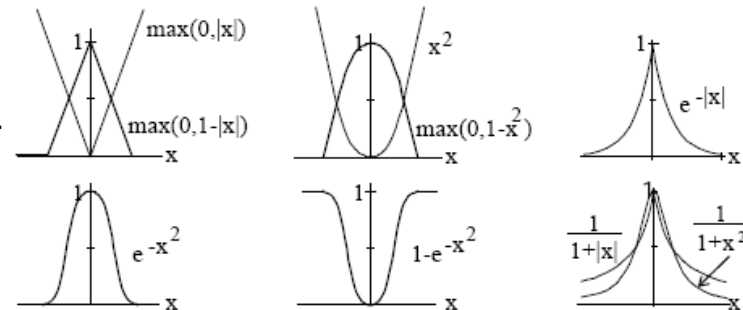
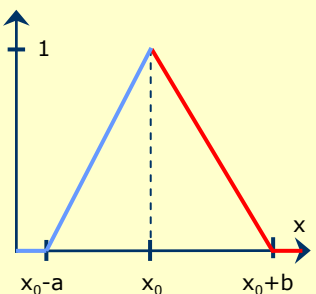


## LR-Darstellung unscharfer Mengen

- ▲ Natürliche unscharfe Konzepte haben typischerweise eine stetige Kontur. („Die Natur hat keine Ecken.“) Aus verarbeitungstechnischen Gründen bevorzugt man aber oft Modellierungen dieser Konzepte mit triangulären oder trapezförmigen Funktionen, die für viele Anwendungen hinreichend gute Näherungen darstellen.
- ▲ Def.: Zugehörigkeitsfunktionen einer unscharfen Menge heißen vom Typ LR, wenn es zwei monotone, aber nicht notwendig gleiche Referenzfunktionen L (für die linke) und R (für die rechte Seite) mit den Schwankungsbreiten  $a, b > 0$  gibt.
- ▲ Unscharfe Mengen in LR-Darstellung werden wie folgt notiert:  
 $U = (x, a, b)_{LR}$
- ▲ Die Abbildung zeigt einige häufig verwendete Funktionstypen für L(x) und R(x). Um die  $\mu_U(x)$ -Darstellung zu erhalten, ist je in der für L und R gewählten Funktion x durch  $(x-x_0)/a$  in L und  $(x-x_0)/b$  in R zu ersetzen.

$$L = \max(0; 1 + (x-x_0)/a)$$

$$R = \max(0; 1 - (x-x_0)/b)$$



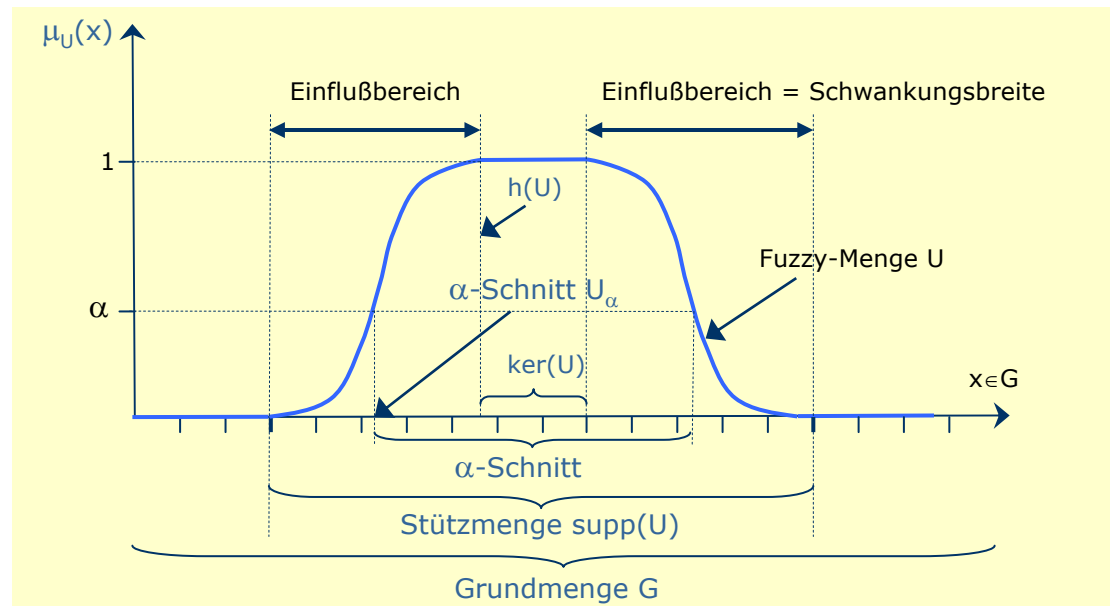
Die normalverteilte Funktion  $\mu_U(x) = \exp[-1/2(x-x_0)^2/\sigma^2]$  hat Vorteile in Anwendungen zur Mustererkennung, aber den Nachteil eines hohen Rechenaufwandes. Ein symmetrisches Trapez mit den Parametern  $a_T = 2\sigma$  und  $x_{01} = x_0 - \sigma/4$  oder eine Anpassung an die  $\Pi$ -Funktion mit  $a_{\Pi} = \sigma\sqrt{2\pi} \approx 2,51\sigma$  stellen sehr gute und effiziente Näherungen dar. ( $\sigma$  ist Standardabweichung)

## Einige Eigenschaften unscharfer Mengen (1)

- Sei  $U$  eine unscharfe Menge über der Grundmenge  $G$ .  
 $U_\alpha = \{x \in G \mid \mu_U(x) \geq \alpha\}$  heißt  $\alpha$ -Schnitt von  $U$ .  
 $\text{supp}(U) = \{x \in G \mid \mu_U(x) > 0\}$  heißt Stützmenge bzw. Trägermenge bzw. Einflußbereich von  $U$ .  
 $\text{ker}(U) = \{x \in G \mid \mu_U(x) = 1\}$  heißt Kern bzw. Toleranz von  $U$ . Der  $\alpha$ -Schnitt von  $U$  ist für  $\alpha=1$  gleich dem Kern  $\text{ker}(U)$ .  
 $h(U) = \sup_{x \in G} \mu_U(x)$  heißt die Höhe von  $U$ .

Sei  $M$  eine Menge über der Grundmenge  $G$ . Das Supremum  $\sup$  der Menge  $M$  ist dann die kleinste obere Schranke von  $M$  in  $G$ .

Bsp.: Betrachte die Menge  $M = \{1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{7}{8}, \dots\}$  über  $\mathbb{R}$ . Dann sind 2, 5 und 99 obere Schranken von  $M$ . Die kleinste obere Schranke, also das Supremum von  $M$ , ist 2; also  $\sup_{x \in M}(M) = 2$ .



## Einige Eigenschaften unscharfer Mengen (2)

- ▲ Def.: Eine unscharfe Menge  $U$  über  $G$  heißt leer, wenn  $\mu_U(x)=0$  für alle  $x$  aus  $G$ .
- ▲ Def.: Eine unscharfe Menge  $U$  über  $G$  heißt universell, wenn  $\mu_U(x)=1$  für alle  $x$  aus  $G$ .
- ▲ Def.: Eine unscharfe Menge  $U$  heißt normal, wenn  $\max(\mu_U(x))=1$   
Anders formuliert:  $U$  ist normal, wenn der Kern  $\ker(U) \neq \emptyset$ .

- ▲ Jede beliebige nichtleere und nichtnormalisierte unscharfe Menge  $U$  kann normalisiert werden, indem alle Zugehörigkeitswerte durch die Höhe  $h(U)$  von  $U$  dividiert werden. Die normalisierte Menge kann dann beschrieben werden durch

$$U' = \{x \in U \mid \mu_{U'}(x) := \mu_U(x)/h(U) > 0\}$$

- ▲ Def.: Zwei unscharfe Mengen  $U$  und  $V$  über  $G$  heißen gleich, wenn sie in allen Zugehörigkeitswerten übereinstimmen, d.h.

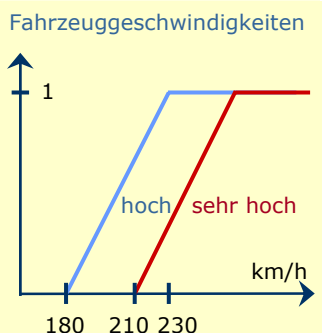
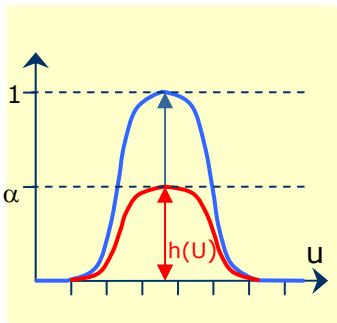
$$U = V \Leftrightarrow \mu_U(x) = \mu_V(x) \quad \forall x \in G$$

- ▲ Def.: Eine unscharfe Menge  $U$  ist Teilmenge einer unscharfen Menge  $V$ , wenn alle Zugehörigkeitswerte von  $U$  kleiner oder gleich denen von  $V$  sind, d.h.

$$U \subset V \Leftrightarrow \mu_U(x) \leq \mu_V(x) \quad \forall x \in G$$

( $U$  und  $V$  können im Grenzfall auch gleich sein.)

$\emptyset = \{\} =$  leere Menge



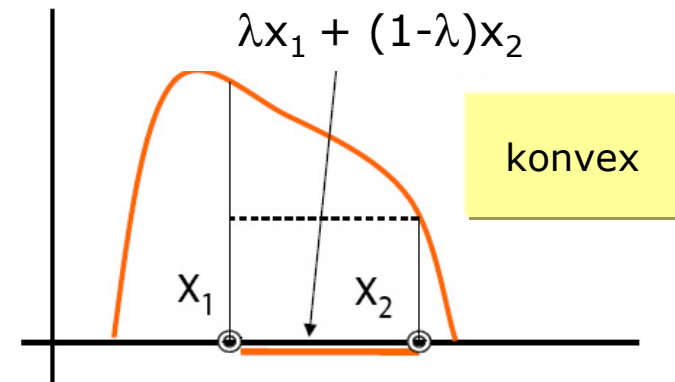
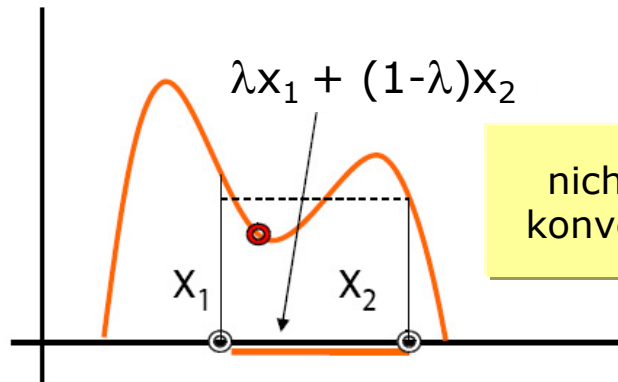
## Konvexe unscharfe Mengen

- Def.:** Ist die Grundmenge  $G$  ein Vektorraum, heißt eine unscharfe Menge  $U$  **konvex**, wenn alle  $\alpha$ -Schnitte  $U_\alpha$  konvex sind.

Ein  $\alpha$ -Schnitt heißt **konvex**, wenn gilt:

$$\forall x_1, x_2 \in U_\alpha \text{ und } \forall \lambda \in [0, 1]:$$

$$\mu_{U_\alpha}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_{U_\alpha}(x_1), \mu_{U_\alpha}(x_2))$$



- Anders ausgedrückt:** Eine unscharfe Menge ist konvex, wenn für je zwei Elemente  $x_1, x_2$  sowie für jedes Element aus  $x \in [x_1, x_2]$  gilt:  $\mu_U(x) \geq \min(\mu_U(x_1), \mu_U(x_2))$

- „Eine konvexe Funktion hat nur eine Bergkuppe (also nur eine Spitze oder ein Plateau), ist also keine Berg- und Talbahn.“**

(Bem.: Ersetzt man „ $\geq$ “ durch „ $>$ “, so heißt  $U$  strikt konvex.)

Ein **Vektorraum**  $(V, \oplus, \odot)$  über einem Körper  $K$  ist eine additive abelsche Gruppe  $(V, \oplus)$  auf der zusätzlich eine Multiplikation  $\odot$  mit einem Skalar aus  $K$  erklärt ist. Die Skalarmultiplikation muss dabei für alle  $u, v \in V$  und alle  $\alpha, \beta \in K$  die folgenden Bedingungen erfüllen:

**Assoziativität:**

$$\alpha \odot (\beta \odot u) = (\alpha \cdot \beta) \odot u$$

**Distributivität:**

$$\alpha \odot (u \oplus v) = \alpha \odot u \oplus \alpha \odot v$$

$$(\alpha + \beta) \odot u = \alpha \odot u \oplus \beta \odot u$$

**Neutralität der 1 des Körpers  $K$ :**  $1 \odot u = u$

Eine Menge  $G$  mit einer zweistelligen Verknüpfung  $\oplus$  heißt (additive) **Gruppe**  $(G, \oplus)$ , wenn folgende Axiome erfüllt sind:

**Abgeschlossenheit:**

$$a, b \in G \Rightarrow a \oplus b \in G$$

**Assoziativität:**  $\forall a, b, c:$

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$$

**Neutrales Element:**

Es gibt ein neutrales Element  $0$ , mit dem für alle Gruppenelemente  $a$  gilt:  $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$

**Inverses Element:**

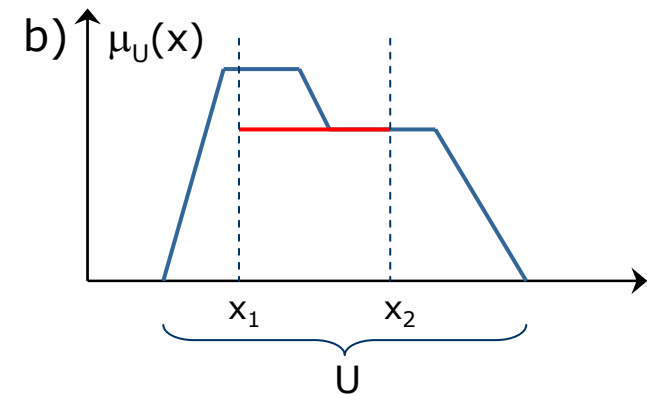
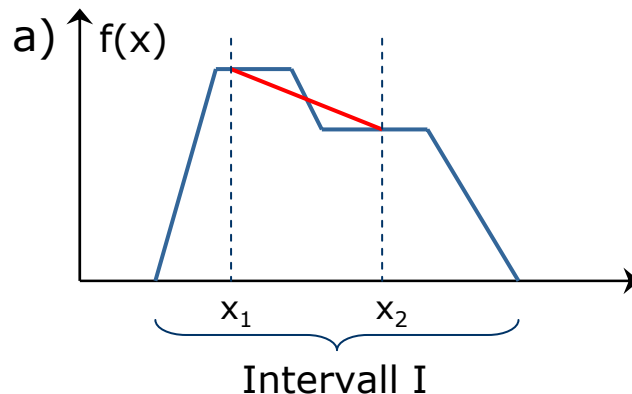
Zu jedem Gruppenelement  $a$  existiert ein (inverses) Element  $-a$  mit  $-a \oplus a = a \oplus (-a) = 0$ .

Eine **Gruppe** heißt **kommutativ** bzw. **abelsch**, wenn die Verknüpfung symmetrisch ist, d.h. wenn zusätzlich das folgende Axiom erfüllt ist:

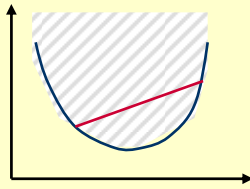
**Kommutativität:** Für alle  $a, b \in G$  gilt:  $a \oplus b = b \oplus a$

## Konvexe Funktionen und Gebiete

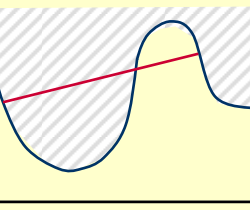
- ▲ Der Begriff der konvexen unscharfen Menge sollte nicht mit den Begriffen konvexe Funktion und konvexes Gebiet verwechselt werden. Es sei kurz an diese Definitionen erinnert:
- ▲ Eine Funktion heißt **konvex** (auf einem Intervall  $I$ ), wenn jede Sekante oberhalb des Graphen liegt. Es gilt dann für alle  $x_1, x_2$  (aus  $I$ ):  $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$  für alle  $\lambda \in [0,1]$
- ▲ Ein Gebiet  $G$  heißt **konvex**, wenn die direkte Verbindung zweier beliebiger Punkte aus  $G$  ganz in  $G$  liegt.
- ▲ Beispiel:
  - Die Funktion  $f$  ist nicht konvex.
  - Die unscharfe Menge  $U$  ist konvex:  $\mu_U(x) \geq \min(\mu_U(x_1), \mu_U(x_2))$



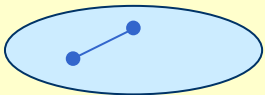
konvexe Funktion



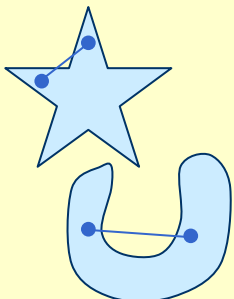
nichtkonvexe Funktion



konvexe Gebiete



nicht-konvexe Gebiete



## Die Mächtigkeit unscharfer Mengen (1)

- ▲ Die Mächtigkeit oder Kardinalität  $|A|$  einer endlichen Cantor-Menge  $A$  ist bekanntlich die Anzahl ihrer Elemente. Eine unendliche, aber abzählbare Cantor-Menge besitzt die Mächtigkeit  $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$  (Mächtigkeit der natürlichen Zahlen).
- ▲ Aber wie lässt sich die Mächtigkeit einer unscharfen Menge bestimmen?
- ▲ **Def.:** Ein unscharfe Menge  $U$  heißt endlich, wenn die Anzahl der  $x \in G$  mit  $\mu_U(x) > 0$  endlich ist. Eine unscharfe Menge  $U$  heißt abzählbar, wenn die Anzahl der  $x \in G$  mit  $\mu_U(x) > 0$  abzählbar ist.
- ▲ **Def.:** Sei  $U$  eine endliche oder abzählbare unscharfe Menge. Dann heißt  $|U| = \sum_i \mu_U(x_i)$  Mächtigkeit bzw. Kardinalität von  $U$ .
- ▲ Eine unendliche, aber abzählbare unscharfe Menge kann eine endliche Mächtigkeit haben. Betrachte  $U = \{(1,1), (2,1/2), (3,1/4), (4,1/8), \dots\}$  über der Grundmenge  $\mathbb{N}$ . Es ist  $|U| = 2$ , da die Reihe  $\sum_i \mu(i)$  gegen 2 konvergiert.
- ▲ **Def.:** Die relative Mächtigkeit einer endlichen unscharfen Menge ist definiert durch  $||U|| = |U|/|G|$ . Sie gibt an, in welchem Maße eine unscharfe Menge  $U$  die Grundmenge  $G$  ausschöpft.

Für endliche Mengen setzt man die Mächtigkeit gleich der Anzahl der Elemente der Menge. Eine Menge  $A$  heißt gleichmächtig zu einer Menge  $B$ , wenn es eine Bijektion zwischen  $A$  und  $B$  gibt. Man schreibt dann  $|A| = |B|$ .

Eine Menge, die gleichmächtig zur Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  ist, heißt abzählbar.

Die folgenden Mengen sind gleichmächtig:

- $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$ ,  $[0,1]$  und  $\wp(\mathbb{N})$  (Potenzmenge von  $\mathbb{N}$ )

Die Gleichmächtigkeit von Mengen ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen der Mengen bezüglich der Relation der Gleichmächtigkeit nennt man Kardinalzahlen.

Die Kardinalität unendlicher Mengen wird mit  $\aleph$  (aleph), ergänzt um einen Index, bezeichnet. Die Mächtigkeit von  $\mathbb{N}$  wird mit  $\aleph_0$  bezeichnet.

Die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  hat eine höhere Mächtigkeit als die der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$ . Ihre Mächtigkeit wird mit  $\aleph_1$  bezeichnet. Mengen der Kardinalität  $\aleph_1$  heißen überabzählbar.

Die Abzählbarkeit von  $\mathbb{Q}$  sowie die Überabzählbarkeit von  $\mathbb{R}$  lassen sich mittels der 1. und 2. Cantorschen Diagonalverfahren beweisen.

Die [Kontinuumshypothese](#) wurde 1878 vom Mathematiker Georg Cantor formuliert. Sie besagt, dass es keine überabzählbare Teilmenge der reellen Zahlen – dem Kontinuum – gibt, die in ihrer Mächtigkeit kleiner ist als die der reellen Zahlen.

Anders formuliert: Es gibt keine Menge, deren Mächtigkeit zwischen der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen und der Mächtigkeit der reellen Zahlen liegt.

Bezeichnet man die Kardinalzahl (Mächtigkeit) der natürlichen Zahlen mit  $\aleph_0$  (aleph), die darauf folgende Kardinalzahl mit  $\aleph_1$  und die Kardinalzahl der reellen Zahlen mit  $\rho$ , so besagt die Kontinuumshypothese, dass  $\rho = \aleph_1$  gilt.

Die Kontinuumshypothese ist zwar nicht bewiesen, aber als Problem gelöst. 1938 zeigte Kurt Gödel, dass sich aus der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre die Kontinuumshypothese nicht widerlegen läßt. 1963 zeigte Paul Cohen, dass sich aus der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre die Kontinuumshypothese auch nicht beweisen läßt.

## Die Mächtigkeit unscharfer Mengen (2)

- ▲ Unter [Cantorisierung](#) versteht man die Umwandlung einer unscharfen Menge  $U$  in ihre (korrespondierende) Cantor-Menge  $U_{\text{Cantor}} = \{(x, 1) \mid x \in G \text{ und } \mu_U(x) > 0\} = \{x \mid x \in G \text{ und } \mu_U(x) > 0\}$ . Sie entsteht dadurch, dass jeder positive Zugehörigkeitswert der unscharfen Menge  $U$  auf 1 gesetzt wird. Für jede Cantor-Menge  $A$  gilt, dass  $A_{\text{Cantor}} = A$ .
- ▲ **Def.:** Die [Cantor-relative Mächtigkeit](#) einer endlichen unscharfen Menge  $U$  ist definiert durch  $||U|| = |U|/|U_{\text{Cantor}}|$ . Sie gibt an, in welchem Maße eine unscharfe Menge  $U$  ihre korrespondierende Cantor-Menge ausschöpft.
- ▲ Kontinuierliche Mengen können leicht in diskrete Mengen umgewandelt werden. Betrachte z.B. die überabzählbare Menge  $T$  aller Temperaturen von 0 bis 100°C. Für jede ganze Zahl  $z \in [0, 99]$  verstehen wir nun unter  $[z]^\circ\text{C}$  das halboffene Intervall  $[z^\circ\text{C}, (z+1)^\circ\text{C})$ . Dann gilt  $|T| = 100$ . Ob eine derartige Diskretisierung sinnvoll ist, hängt maßgeblich vom Anwendungskontext ab.

## Die Mächtigkeit überabzählbarer unscharfer Mengen

- ▲ Die Mächtigkeit des reellen Kontinuums  $\mathbb{R}$  wird mit  $\aleph_1$  bezeichnet. Jede überabzählbare Teilmenge von  $\mathbb{R}$  besitzt dieselbe Mächtigkeit. Z.B. besitzen auch die Intervalle  $[0, 1]$  und  $[0, 10]$  die Mächtigkeit von  $\mathbb{R}$ , d.h.  $|[0, 1]| = |[0, 10]| = |\mathbb{R}| = \aleph_1$ .
- ▲ Überabzählbare unscharfe Mengen gehören zur Äquivalenzklasse von  $\mathbb{R}$  und besitzen ebenfalls die Kardinalität  $\aleph_1$ .

## Die Verallgemeinerung des Mächtigkeitbegriffes

- ▲ Die Mächtigkeit einer endlichen unscharfen Menge lässt sich auch als Abstand zur leeren Menge  $\emptyset$  ausdrücken. Zunächst definieren wir den Abstand einer unscharfen Menge  $U$  zu einer unscharfen Menge  $V$ .

- ▲ Def.: Die Größe  $d^p(U, V)$  heißt Fuzzy-Hamming-Abstand der Ordnung  $p$  der beiden unscharfen Mengen  $U$  und  $V$  und ist wie folgt definiert:

$$d^p(U, V) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |\mu_U(x_i) - \mu_V(x_i)|^p}$$

- ▲ Setzen wir  $p=1$  und  $V=\emptyset$ , so ergibt sich

$$d^1(U, \emptyset) = \sum_{i=1, \dots, n} \mu(x_i)$$

als Spezialfall des allgemeinen Abstandsmaßes der klassische Begriff der Mächtigkeit.

## Unscharfe Zahlen (Fuzzy Zahlen)

- ▲ Unscharfe Zahlen sind ein Spezialfall unscharfer Mengen. Sie stellen eine Verallgemeinerung des Konzepts der Zahlen dar.
- ▲ Beispiele für Fuzzy Zahlen: ungefähr 100 €, ca. 10°C, etwa 5m

- ▲ Def.: Eine unscharfe Menge  $Z$  heißt unscharfe Zahl, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

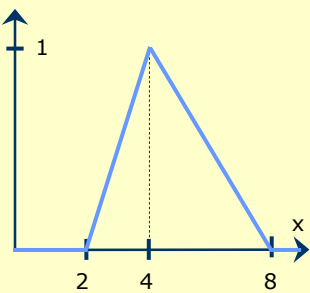
- (1)  $G = \mathbb{R}$
- (2)  $Z$  ist konvex.
- (3)  $\exists! x_0 \in \mathbb{R}$  mit  $\mu_Z(x_0) = 1 \Leftrightarrow |\ker(A)| = 1$ .

- ▲ Def.: Eine unscharfe Menge  $I$  heißt unscharfes Intervall, wenn

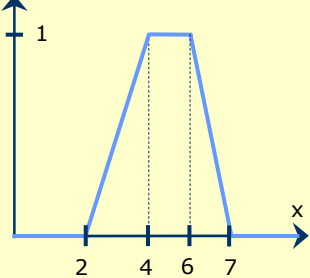
- (1)  $G = \mathbb{R}$
- (2)  $I$  ist konvex.
- (3)  $\exists a, b \in \mathbb{R} : \mu_I(x) = 1$  für alle  $x \in [a, b]$

- ▲ Für Fuzzy Zahlen kann eine entsprechende unscharfe Arithmetik eingeführt werden.

Die unscharfe Zahl  $4_{\text{fuzz}}$



Das unscharfe Intervall  $[4,6]_{\text{fuzz}}$



## Das kartesische Produkt unscharfer Mengen

- ▲ Def.: Gegeben seien zwei unscharfe Mengen  $U$  und  $V$ .

$$U = \{ (x, \mu_U(x)) \mid x \in G_U, \dots \}$$

$$V = \{ (y, \mu_V(y)) \mid y \in G_V, \dots \}$$

Dann ist das kartesische Produkt  $U \times V$  durch eine unscharfe Menge geordneter Paare gegeben durch

$$U \times V = \{ ((x,y), \mu_{U \times V}(\mu_U, \mu_V)) \mid x \in G_U, y \in G_V, \mu_{U \times V} = \min(\mu_U, \mu_V) \}$$

- ▲ Ein Beispiel: Sei  $U = \{ (1, 0.7), (2, 1.0), (3, 0.3) \}$  und  
 $V = \{ (3, 0.8), (4, 1.0), (5, 0.7) \}$

$$\text{Dann ist } U \times V = \{ ((1,3), 0.7), ((1,4), 0.7), ((1,5), 0.7), \\ ((2,3), 0.8), ((2,4), 1.0), ((2,5), 0.7), \\ ((3,3), 0.3), ((3,4), 0.3), ((3,5), 0.3) \}$$

- ▲ Die Mengen  $U$  und  $V$  können hier als unscharfe Zahlen aufgefasst werden. Danach repräsentiert  $U$  die unscharfe Zahl 2 und  $V$  die unscharfe Zahl 4. Kann man mit diesen unscharfen Zahlen auch rechnen?
- ▲ Zadeh hat 1973 ein Erweiterungskonzept vorgestellt, um die klassischen mathematischen Konzepte in die „unscharfe Welt“ zu übertragen.

## Die Addition unscharfer Zahlen

- ▲ Wir betrachten den Fall der **Addition**. Wie lässt sich  $U+V$  definieren?
- ▲ Wir betrachten alle denkbaren Summen, die sich aus den Elementen von  $U$  und  $V$  bilden lassen. Dabei ergeben sich folgende denkbare Summenwerte, wobei der 1. Summand aus  $U$  und der 2. Summand aus  $V$  stammt:

$$4 = 1 + 3 \text{ mit Z-Grad} = 0.7$$

$$5 = 1 + 4 \text{ mit Z-Grad} = 0.7$$

oder

$$5 = 2 + 3 \text{ mit Z-Grad} = 0.8$$

$$6 = 1 + 5 \text{ mit Z-Grad} = 0.7$$

oder

$$6 = 2 + 4 \text{ mit Z-Grad} = 1.0$$

oder

$$6 = 3 + 3 \text{ mit Z-Grad} = 0.3$$

$$7 = 2 + 5 \text{ mit Z-Grad} = 0.7$$

oder

$$7 = 3 + 4 \text{ mit Z-Grad} = 0.3$$

$$8 = 3 + 5 \text{ mit Z-Grad} = 0.3$$

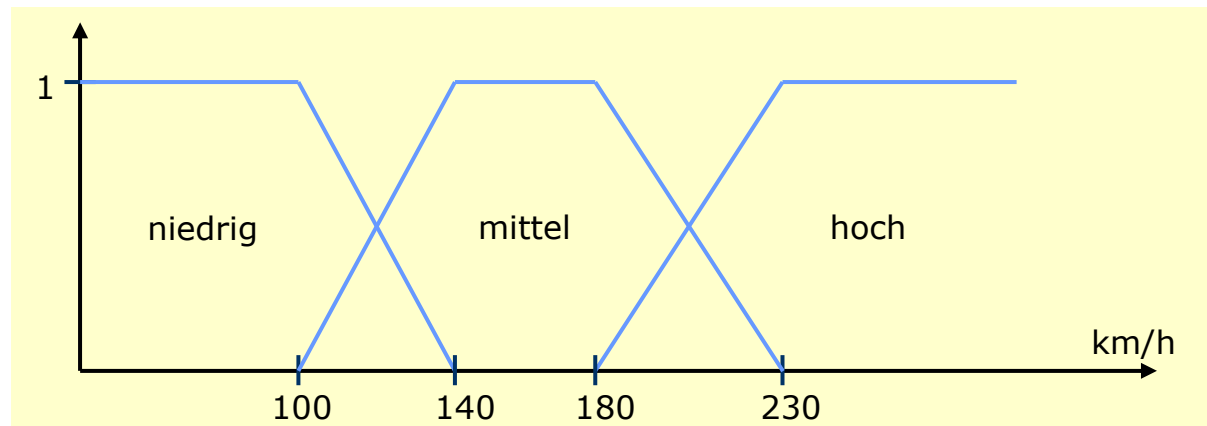
- ▲ Wegen der ODER-Verknüpfung bei Summenalternativen verwenden wir zur Summenbildung den max-Operator. Danach ergibt sich  $U+V = \{(4, 0.7), (5, 0.8), (6, 1.0), (7, 0.7), (8, 0.3)\} = 6_{\text{fuzz}}$

## Das Erweiterungsprinzip von Zadeh

- ▲ Dieses Prinzip lässt sich in mehrfacher Hinsicht erweitern:
  - Einführung weiterer Rechenfunktionen
  - Rechnen mit unscharfen Intervallen
  - Verwendung kontinuierlicher Mengen
  - Verknüpfung mehrerer Mengen
  - ...
- ▲ Dabei werden i.a. folgende Schritte durchgeführt:
  - 1) Ermittlung des kartesischen Produkts der zu verknüpfenden Mengen
  - 2) Für alle möglichen Ergebnisse feststellen, wie es zustandekommt und dabei die entsprechenden Zugehörigkeitsgrade aus dem kartesischen Produkt verwenden.
  - 3) Ermittlung des Zugehörigkeitsgrades der Ergebnismenge
- ▲ Bei praktischen Aufgabenstellungen mit kontinuierlichen Mengen gibt es zwei grundsätzliche Möglichkeiten:
  - A) Geeignete Diskretisierung der Mengen durch enge Abtastung  
Nachteil: Dieses Verfahren kann sehr rechenintensiv werden.
  - B) Verwendung einfacher Zugehörigkeitsfunktionen (Dreieck, Trapez, ...) und Berechnung der Zugehörigkeitswerte per Formel

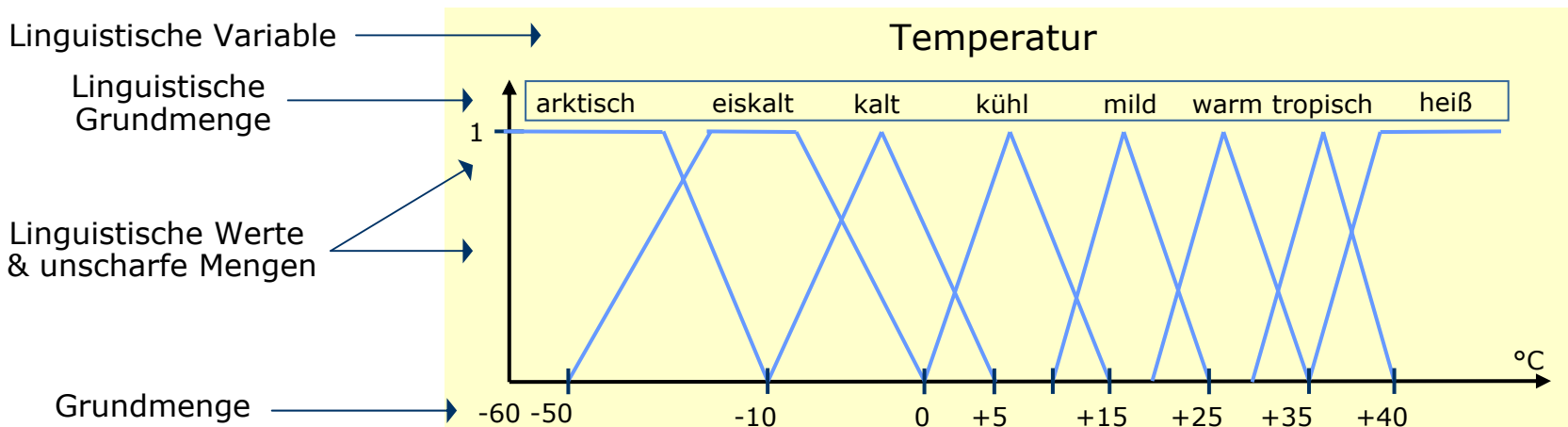
## Linguistische Variablen (1)

- ▲ In der klassischen Programmierung verwendet man oft Attribute mit metrischen Wertebereichen. Linguistische Variablen besitzen dagegen Worte bzw. sprachliche Ausdrücke als Ausprägungen (Terme). Sie ermöglichen die Formulierung unscharf formulierter Aussagen.
- ▲ Damit ist es möglich,
  - ➔ unscharfes linguistisches Wissen zu formulieren, um so die große Ausdrucksfähigkeit natürlicher Sprachen zu nutzen
  - ➔ und dieses Wissen mittels der Fuzzy-Methodik rechnergerecht abzubilden und zu verarbeiten.
- ▲ Bsp.: Linguistische Variable „Geschwindigkeit“ mit den drei Ausprägungen „niedrig“, „mittel“ und „hoch“. Jede Ausprägung wird durch eine unscharfe Menge repräsentiert.

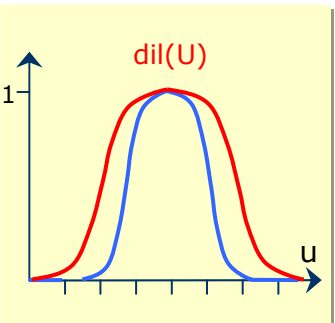
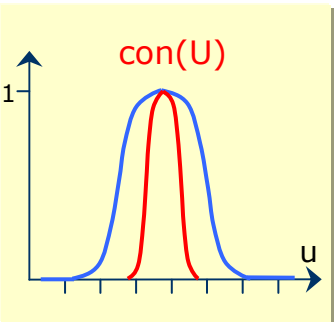
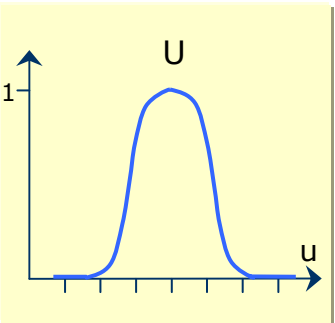


## Linguistische Variablen (2)

- ▲  $L = \{A_1, \dots, A_n\}$  beschreibt den Wertebereich einer linguistischen Variablen  $L$ . Die Anzahl der Ausprägungen  $|L|$  sollte  $< 10$  sein. Verwendet man sehr wenige Ausprägungen, wird die Modellierung tendenziell zu grob, verwendet man zu viele, lassen sich die Begriffe nicht mehr gut voneinander trennen.
- ▲ Bsp.: Linguistische Variable *Außentemperatur* über der Grundmenge  $\{T_i \mid 1 \leq i \leq 8\} = \{\text{arktisch, eiskalt, kalt, kühl, mild, warm, tropisch, heiß}\}$   
Jede Ausprägung wird repräsentiert durch eine unscharfe Menge über der Grundmenge  $G = \{t \in \mathbb{R} \mid -60^\circ\text{C} \leq t \leq 60^\circ\text{C}\}$
- ▲ Die Ausgestaltung der jeweiligen Zugehörigkeitsfunktion ist anwendungsabhängig.



## Linguistische Variablen (3)



- ▲ Zur sprachlichen Verstärkung oder Abschwächung werden oft noch zur weiteren Attributierung der Ausprägungen linguistische Modifikatoren wie *klein, mittel, groß, sehr, die meisten, einige, wenige* etc. verwendet.
- ▲ Für unscharfe Mengen gibt es Standardoperationen, um den Grad der Unschärfe zu verringern bzw. zu erhöhen.
- ▲ Die Kontraktionsoperation  $\text{con}(U)$  mit  $\mu_{\text{con}}(x) = (\mu_U(x))^n$  führt zu einer Konzentration, also einer Erhöhung der Schärfe.
- ▲ Die Streckungsoperation  $\text{dil}(U)$  mit  $\mu_{\text{dil}}(x) = (\mu_U(x))^{1/n}$  bewirkt eine Streckung (Dilatation) und erhöht die Unschärfe.
- ▲ Die Kontrastintensivierung ist eine Operation, die wahre Aussagen wahrer und falsche falscher macht. Sie ist wie folgt definiert:
 
$$\mu_{\text{int}}(x) = \begin{cases} 2\mu(x)^2, & \text{falls } 0 \leq \mu(x) \leq 1/2 \\ 1 - 2(1 - \mu(x))^2, & \text{falls } 1/2 < \mu(x) \leq 1 \end{cases}$$
- ▲ Die Kontrastdiffusion ist die Umkehrung der Kontrastintensivierung; sie macht wahre Aussagen unwahrer und falsche weniger falsch.