Theoretische Informatik
Kap 3: Komplexitätstheorie

Gliederung der Vorlesung

Komplexitätsmaße

zentraler Begriff

es sei Σ das zugrunde liegende Alphabet

es sei M eine sprachakzeptierende det. Turing-Maschine mit dem Eingabealphabet Σ

M stoppt bei jeder Eingabe, falls für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

- M akzeptiert die Eingabe w (/* d.h. M überführt die Anfangskonfiguration z_0w in eine akzeptierende Konfiguration uz_ev */) oder
- M kommt bei der Eingabe w in einen Fehlerzustand (/* d.h. M überführt die Anfangskonfiguration z_0w in eine Konfiguration uz_iv, in der keine Aktion mehr möglich ist */)

Komplexitätsmaße

Ressourcen: Rechenzeit und Speicherplatz

es sei Σ das zugrunde liegende Alphabet

es sei M eine sprachakzeptierende det. Turing-Maschine mit dem Eingabealphabet Σ, die bei jeder Eingabe stoppt

es sei $w \in \Sigma^*$

$T_M(w)$ bezeichnet die Anzahl der Schritte, die M bei Eingabe von w rechnet, bevor M stoppt.

$S_M(w)$ bezeichnet die Anzahl der Zellen des Arbeitsbands, die M bei Eingabe von w besucht, bevor M stoppt.

Komplexitätsmaße

Zeit- und Platzschranken

es sei Σ das zugrunde liegende Alphabet

es sei M eine sprachakzeptierende det. Turing-Maschine mit dem Eingabealphabet Σ, die bei jeder Eingabe stoppt

es seien $t: N \rightarrow N$ und $s: N \rightarrow N$

M heißt t(n)-zeitbeschränkt, falls für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $T_M(w) \leq t(|w|)$.

M heißt s(n)-bandbeschränkt, falls für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $S_M(w) \leq s(|w|)$.

Komplexitätsmaße

Beispiel eine det. sprachakzeptierende TM M für die Sprache L mit
$L = \{ w\underline{w} \mid w \in \{ a,b \}^* \setminus \{ \varepsilon \}, \underline{w}$ ist die gespiegelte Version von $w \}$

	a	b	B
z_0	z_1,B,R	z_3,B,R	
z_1	z_1,a,R	z_1,b,R	z_2,B,L
z_2	z_5,B,L		
z_3	z_3,a,R	z_3,b,R	z_4,B,L
z_4		z_5,B,L	
z_5	z_6,a,L	z_6,b,L	z_e,B,N
z_6	z_6,a,L	z_6,b,L	z_0,B,R

sinnvolle Zeitschranke:

$t(n) = (n+1)^2$

sinnvolle Platzschranke:

$s(n) = n+1$

Komplexitätsmaße

eine wichtige det. Zeitkomplexitätsklasse

es sei Σ das zugrunde liegende Alphabet

es sei $L \subseteq \Sigma^*$

$L \in P$, falls es eine det. sprachakzeptierende TM M gibt, die auf jeder Eingabe stoppt und die folgende Eigenschaften hat:

- $L(M) = L$
- es gibt Zahlen r, c > 0, so daß für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $T_M(w) \leq c*|w|^r$

... P bezeichnet die Klasse aller Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$, die mit det. TM akzeptiert werden können, die polynomielle Rechenzeit benötigen

Komplexitätsmaße

eine wichtige det. Platzkomplexitätsklasse

es sei Σ das zugrunde liegende Alphabet

es sei $L \subseteq \Sigma^*$

$L \in$ PSPACE, falls es eine det. sprachakzeptierende TM M gibt, die auf jeder Eingabe stoppt und die folgende Eigenschaften hat:

- $L(M) = L$
- es gibt Zahlen r, c > 0, so daß für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $S_M(w) \leq c*|w|^r$

... PSPACE bezeichnet die Klasse aller Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$, die mit det. TM akzeptiert werden können, die polynomiellen Speicherplatz benötigen

Komplexitätsmaße

eine andere wichtige det. Platzkomplexitätsklasse

es sei Σ das zugrunde liegende Alphabet

es sei $L \subseteq \Sigma^*$

$L \in$ DLBA, falls es eine det. sprachakzeptierende TM M gibt, die auf jeder Eingabe stoppt und die folgende Eigenschaften hat:

- $L(M) = L$
- es gibt eine Zahl $c > 0$, so daß für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $S_M(w) \leq c^*|w|$

... DLBA bezeichnet die Klasse aller Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$, die mit det. TM akzeptiert werden können, die linearen Speicherplatz benötigen

Komplexitätsmaße

zentraler Begriff

es sei Σ das zugrunde liegende Alphabet

es sei N eine sprachakzeptierende nicht-det.Turing-Maschine mit dem Eingabealphabet Σ

N stoppt bei jeder Eingabe, falls für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

- N akzeptiert die Eingabe w (/* d.h. N kann die Anfangskonfiguration z_0w in eine akzeptierende Konfiguration uz_ev überführen */) oder
- N kommt bei der Eingabe w in einen Fehlerzustand (/* d.h. M überführt die Anfangskonfiguration z_0w stets in eine Konfiguration uz_iv, in der keine Aktion mehr möglich ist */)

Komplexitätsmaße

Ressourcen: Rechenzeit und Speicherplatz

es sei Σ das zugrunde liegende Alphabet

es sei N eine sprachakzeptierende det. Turing-Maschine mit dem Eingabealphabet Σ, die bei jeder Eingabe stoppt

es sei $w \in \Sigma^*$

Wenn $w \in L(N)$ gilt, so bezeichnet $T_N(w)$ die minimale Anzahl der Schritte, die N bei Eingabe von w rechnet, bevor N die Eingabe w akzeptiert. Sonst ist $T_N(w) = 1$.

Wenn $w \in L(N)$ gilt, so bezeichnet $S_N(w)$ die minimale Anzahl der Zellen des Arbeitsbands, die M bei Eingabe von w besucht, bevor N die Eingabe w akzeptiert. Sonst ist $S_N(w) = 1$.

Komplexitätsmaße

Zeit- und Platzschranken

es sei Σ das zugrunde liegende Alphabet

es sei N eine sprachakzeptierende nicht-det. Turing-Maschine mit dem Eingabealphabet Σ, die bei jeder Eingabe stoppt

es seien $t: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

N heißt t(n)-zeitbeschränkt, falls für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $T_N(w) \leq t(|w|)$.

N heißt s(n)-bandbeschränkt, falls für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $S_N(w) \leq s(|w|)$.

Komplexitätsmaße

Beispiel eine nicht-det. sprachakzeptierende TM N für die Sprache L mit $L = \{ w \mid w \in \{ a,b \}^*, w \text{ enthält das Teilwort baba} \}$

	a	b	B
z_0	z_0,a,R	z_0,b,R z_1,b,R	
z_1	z_2,a,R		
z_2		z_3,b,R	
z_3	z_e,a,N		

sinnvolle Zeitschranke:

$t(n) = n$

sinnvolle Platzschranke:

$s(n) = n$

Komplexitätsmaße

eine wichtige nicht-det. Zeitkomplexitätsklasse

es sei Σ das zugrunde liegende Alphabet

es sei $L \subseteq \Sigma^*$

$L \in NP$, falls es eine nicht-det. sprachakzeptierende TM N gibt, die auf jeder Eingabe stoppt und die folgende Eigenschaften hat:

- $L(N) = L$
- es gibt Zahlen r, c > 0, so daß für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $T_N(w) \leq c^*|w|^r$

... NP bezeichnet die Klasse aller Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$, die mit nicht-det. TM akzeptiert werden können, die polynomielle Rechenzeit benötigen

eine wichtige nicht-det. Platzkomplexitätsklasse

es sei Σ das zugrunde liegende Alphabet

es sei $L \subseteq \Sigma^*$

$L \in$ NPSPACE, falls es eine nicht-det. sprachakzeptierende TM N gibt, die auf jeder Eingabe stoppt und die folgende Eigenschaften hat:

- $L(N) = L$
- es gibt Zahlen r, c > 0, so daß für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $S_N(w) \leq c^*|w|^r$

... NPSPACE bezeichnet die Klasse aller Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$, die mit nicht-det. TM akzeptiert werden können, die polynomiellen Speicherplatz benötigen

Komplexitätsmaße

eine andere wichtige nicht-det. Platzkomplexitätsklasse

es sei Σ das zugrunde liegende Alphabet

es sei $L \subseteq \Sigma^*$

$L \in LBA$, falls es eine nicht-det. sprachakzeptierende TM N gibt, die auf jeder Eingabe stoppt und die folgende Eigenschaften hat:

- $L(N) = L$
- es gibt eine Zahl $c > 0$, so daß für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $S_N(w) \leq c*|w|$

... LBA bezeichnet die Klasse aller Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$, die mit nicht-det. TM akzeptiert werden können, die linearen Speicherplatz benötigen

Komplexitätsmaße

ein interessantes Resultat und zwei wichtige offene Fragen

Satz

PSPACE = NPSPACE.

offene Fragen

(1) Gilt DLBA = LBA ?

(2) Gilt P = NP ?

Vermutung: beide Fragen sind mit „Nein“ zu beantworten

Komplexitätsmaße

Warum ist die Frage, ob DLBA = LBA gilt, wichtig?

es sei Σ das zugrunde liegende Alphabet

es sei $L \subseteq \Sigma^*$

Satz

Wenn L eine kontextsensitive Sprache ist, so gilt $L \in$ LBA.

Komplexitätsmaße

ein Beispiel zur Illustration

es sei L = L(G)

Σ = { a, b, c }
V = { S, S‘,H }
S

S → abc
S → aS‘bc
S‘ → abH
S‘ → aS‘bH
Hb → bH
Hc → cc

es sei w = aabbcc

Nachweis für w ∈L(G)

...	B	a	a	b	b	c	c	B	...	
...	B	a	a	b	b	c	c	B	...	
...	B	a	a	b	b	H	c	B	...	
...	B	a	a	b	b	H	c	B	...	
...	B	a	a	b	H	b	c	B	...	
...	B	a	a	b	H	b	c	B	...	
	...	B	a	S'			b	c	B	...
...	B	a	S‘	b	c	B	B	B	...	
	...	B	S				B	B	B	...
...	B	S	B	B	B	B	B	B	...	

Komplexitätsmaße

Beweisidee

es sei Σ das zugrunde liegende Alphabet, es sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine kontextsensitive Sprache

seien $(l_1,r_1), \ldots, (l_n,r_n)$ die Regeln einer kontextsensitiven Grammatik für L

bei Eingabe von $w = a_1 \ldots a_m$ geht die gesuchte nicht-det. TM N wie folgt vor:

1. N wählt eine Regel (l_k,r_k)
2. N sucht ein Vorkommen von r_k im aktuellen Bandinhalt
   - falls die Suche erfolgreich war, so ersetzt N das Vorkommen von r_k durch l_k und verschiebt den Bandinhalt so, daß „Lücken“ beseitigt werden
3. falls nur noch das Startsymbol auf dem Band steht, so geht N in einen akzeptierenden Zustand; andernfalls geht N zu 1

→ wegen $|l_k| \leq |r_k|$ für alle k, besucht N höchstens $|w|$ viele Zellen

Komplexitätsmaße

es sei Σ das zugrunde liegende Alphabet

es sei $L \subseteq \Sigma^*$

Satz

Wenn $L \in$ LBA gilt, so ist L eine kontextsensitive Sprache.

... die Frage, ob DLBA = LBA gilt, entspricht der Frage, ob det. Turing-Maschinen, die nur linear viel Speicherplatz benötigen, für das Akzeptieren kontextsensitiver Sprachen „ausreichen“