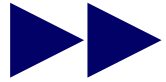


# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie

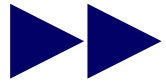


### *Gliederung der Vorlesung*

- 0. Grundbegriffe
- 1. Formale Sprachen/Automatentheorie
  - 1.1. Grammatiken
  - 1.2. Reguläre Sprachen
  - 1.3. Kontextfreie Sprachen**
- 2. Berechnungstheorie
  - 2.1. Entscheidungsprobleme
  - 2.2. Berechenbarkeitsmodelle
  - 2.3. Die Churchsche These
  - 2.4. Unentscheidbarkeit
- 3. Komplexitätstheorie
  - 3.1. Nicht-deterministische Turing Maschinen
  - 3.1 Komplexitätsmaße
  - 3.2. Das P=NP? Problem

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Kontextfreie Sprachen*

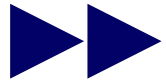
#### **algorithmischer Aspekt**

auf den ersten Blick scheint alles klar

... aber, ist die Idee, zunächst eine gegebene kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform zu überführen und dann den CYK-Algorithmus anzuwenden, wirklich praktikabel

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Kontextfreie Sprachen*

**Beispiel:** prüfen, ob der Quellcode eines Programm syntaktisch korrekt ist

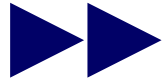
Annahme: unser Rechner schafft  $10^9$  Operationen pro Sekunde

Länge des Quellcodes	CYK-Algorithmus
100 Zeichen	0.001s
1000 Zeichen	1s
10000 Zeichen	$\geq 16$ min

... man sollte über Alternativen nachdenken !!!

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Kontextfreie Sprachen*

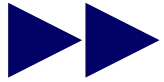
#### **konzeptioneller Aspekt**

... ein besseres Verständnis für die Ausdrucksfähigkeit von kontextfreien Grammatiken bekommen

- Abgeschlossenheitseigenschaften
- Grenzen der Ausdrucksfähigkeit

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Kontextfreie Sprachen*

es seien  $\Sigma'$  und  $\Sigma''$  die zugrunde liegenden Alphabete

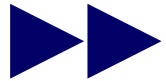
es seien  $L_1 \subseteq (\Sigma')^*$  und  $L_2 \subseteq (\Sigma'')^*$  kontextfreie Sprachen

Dann gilt:

- $L_1 \cup L_2$  ist eine kontextfreie Sprache
- $L_1 \circ L_2 = \{ wv \mid w \in L_1, v \in L_2 \}$  ist eine kontextfreie Sprache
- $(L_1)^*$  ist eine kontextfreie Sprache

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie

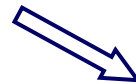


### Kontextfreie Sprachen

$L_1 \cup L_2$  ist eine kontextfreie Sprache

→ es seien  $G_1$  und  $G_2$  kontextfreie Grammatiken für  $L_1$  und  $L_2$

$S \rightarrow 0S1 \mid 01$



$S \rightarrow S_1$

$S \rightarrow S_2$

$S_1 \rightarrow 0S_11 \mid 01$

$S_2 \rightarrow 0S_20 \mid 1S_21 \mid 00 \mid 11$

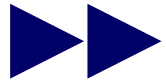
$S \rightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid 00 \mid 11$



... Variablen in  $G_1$  und  $G_2$  so umbenennen, daß  $V_1$  und  $V_2$  disjunkt werden

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### Kontextfreie Sprachen

$L_1 \circ L_2$  ist eine kontextfreie Sprache

→ es seien  $G_1$  und  $G_2$  kontextfreie Grammatiken für  $L_1$  und  $L_2$

$S \rightarrow 0S1 \mid 01$



$S \rightarrow S_1S_2$   
 $S_1 \rightarrow 0S_11 \mid 01$   
 $S_2 \rightarrow 0S_20 \mid 1S_21 \mid 00 \mid 11$

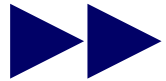
$S \rightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid 00 \mid 11$



... Variablen in  $G_1$  und  $G_2$  so umbenennen, daß  $V_1$  und  $V_2$  disjunkt werden

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Kontextfreie Sprachen*

$(L_1)^*$  ist eine kontextfreie Sprache

→ es sei  $G_1$  eine kontextfrei Grammatiken für  $L_1$

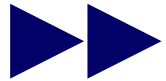
$S \rightarrow OS1 \mid O1$



$S' \rightarrow \varepsilon$   
 $S' \rightarrow S$   
 $S' \rightarrow S'S'$   
 $S \rightarrow OS1 \mid O1$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Kontextfreie Sprachen*

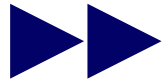
es sei  $\Sigma$  das zugrunde liegenden Alphabet

Dann gibt es kontextfreie Sprachen  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ , so daß gilt:

- $L_1 \cap L_2$  ist keine kontextfreie Sprache
- $\text{co}(L_1)$  ist keine kontextfreie Sprache

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### Kontextfreie Sprachen

Beispiel für „ $\cap$ “:

$$L_1 = \{ a^n b^n a^m \mid n, m \geq 1 \}, L_2 = \{ a^n b^m a^m \mid n, m \geq 1 \}$$

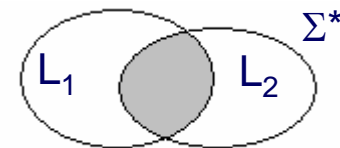
$$\rightarrow L_1 \cap L_2 = \{ a^n b^n a^n \mid n \geq 1 \}$$

$\rightarrow L_1$  und  $L_2$  sind kontextfrei,  $L_1 \cap L_2$  ist nicht kontextfrei

Argumentation für „co“:

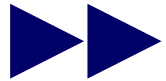
falls  $\text{co}(L_1)$  immer kontextfrei ist, so wäre auch immer

$L_1 \cap L_2 = \text{co}(\text{co}(L_1) \cup \text{co}(L_2))$  kontextfrei



# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Kontextfreie Sprachen*

Was ist allen unendlichen kontextfreien Sprachen gemein?

#### Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Es sei  $L \subseteq \Sigma^*$  eine unendliche Sprache.

Wenn  $L$  kontextfrei ist, so gibt es eine Zahl  $n$ ,

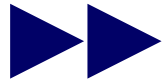
so daß für alle Wörter  $s \in L$  mit  $|s| \geq n$ , gilt:

es gibt Wörter  $u, v, w, x$  und  $y$  aus  $\Sigma^*$ , so daß gilt:

- (i)  $s = u \cdot v \cdot w \cdot x \cdot y$
- (ii)  $|v| + |x| \geq 1$
- (iii)  $|v| + |w| + |x| \leq n$
- (iv)  $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y \in L$  für alle  $k \geq 0$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie

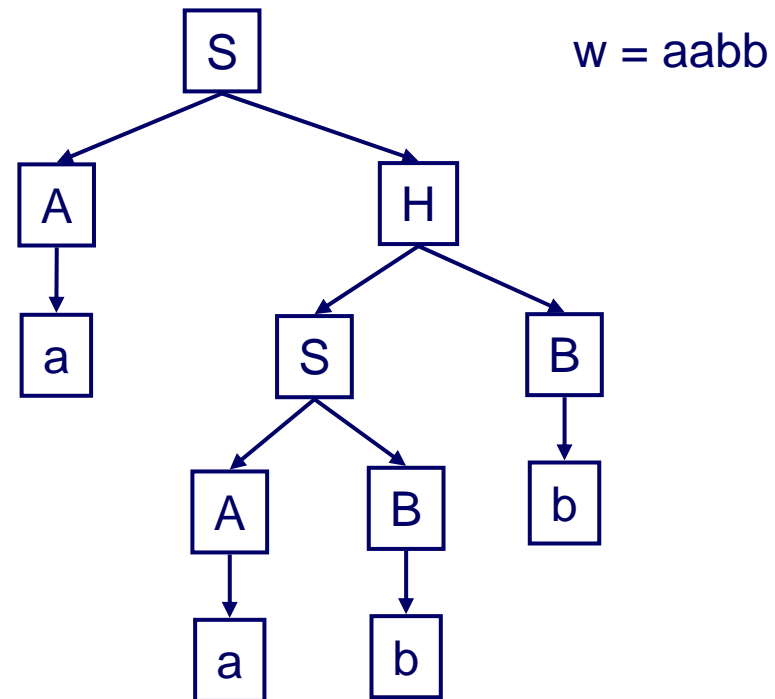


### Kontextfreie Sprachen

#### Beispiel 1

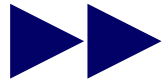
$\Sigma = \{ a, b \}$   
 $V = \{ S, A, B, H \}$   
S

$S \rightarrow AH$   
 $S \rightarrow AB$   
 $H \rightarrow SB$   
 $A \rightarrow a$   
 $B \rightarrow b$



# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie

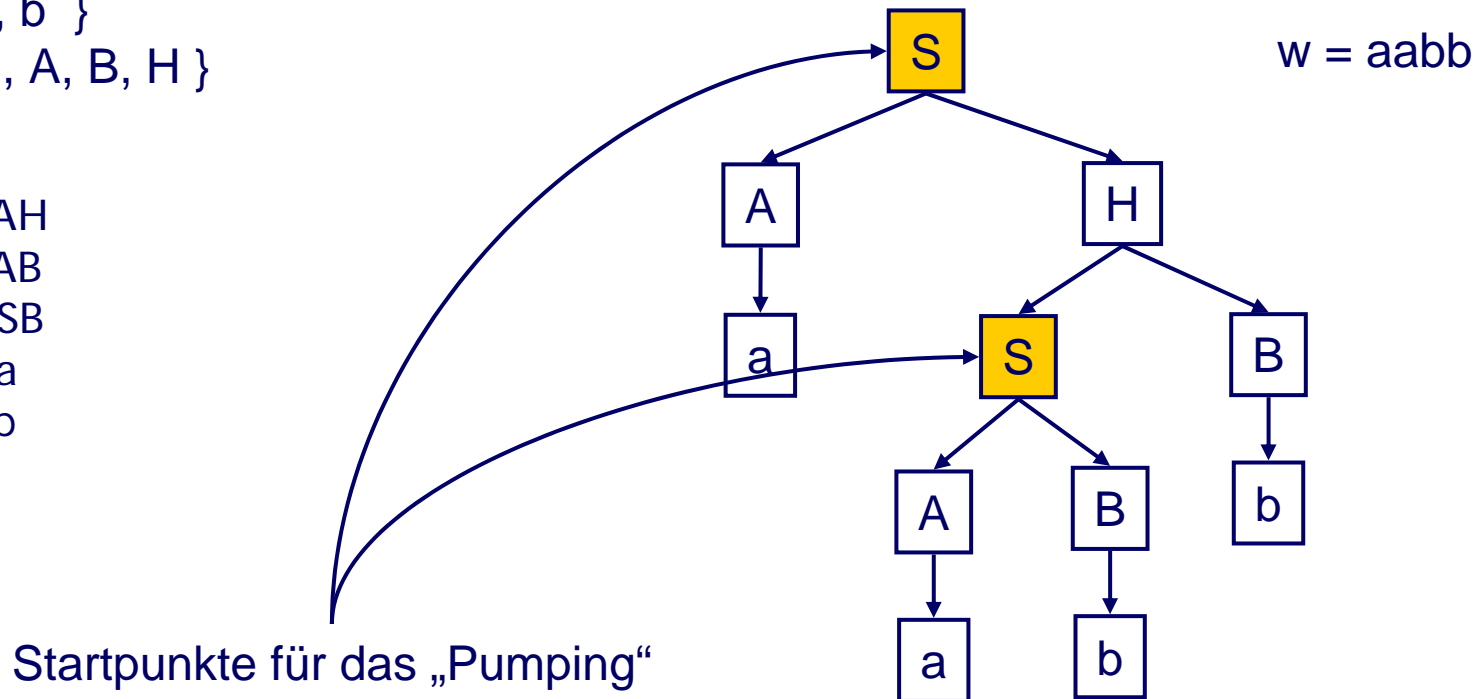


### Kontextfreie Sprachen

#### Beispiel 1

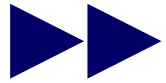
$\Sigma = \{ a, b \}$   
 $V = \{ S, A, B, H \}$   
S

$S \rightarrow AH$   
 $S \rightarrow AB$   
 $H \rightarrow SB$   
 $A \rightarrow a$   
 $B \rightarrow b$



# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie

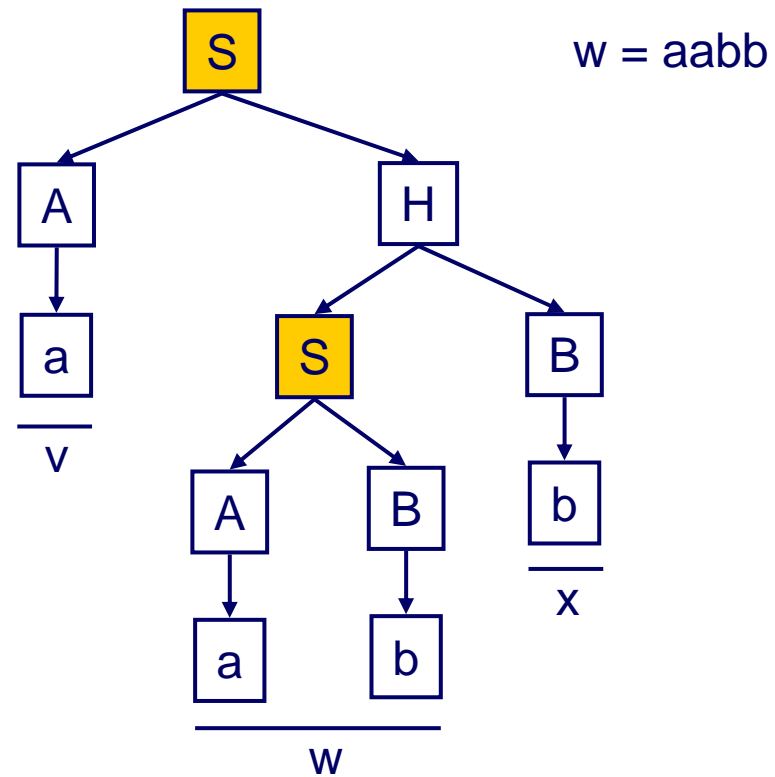


### Kontextfreie Sprachen

#### Beispiel 1

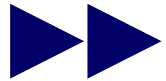
$\Sigma = \{ a, b \}$   
 $V = \{ S, A, B, H \}$   
S

$S \rightarrow AH$   
 $S \rightarrow AB$   
 $H \rightarrow SB$   
 $A \rightarrow a$   
 $B \rightarrow b$



# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie

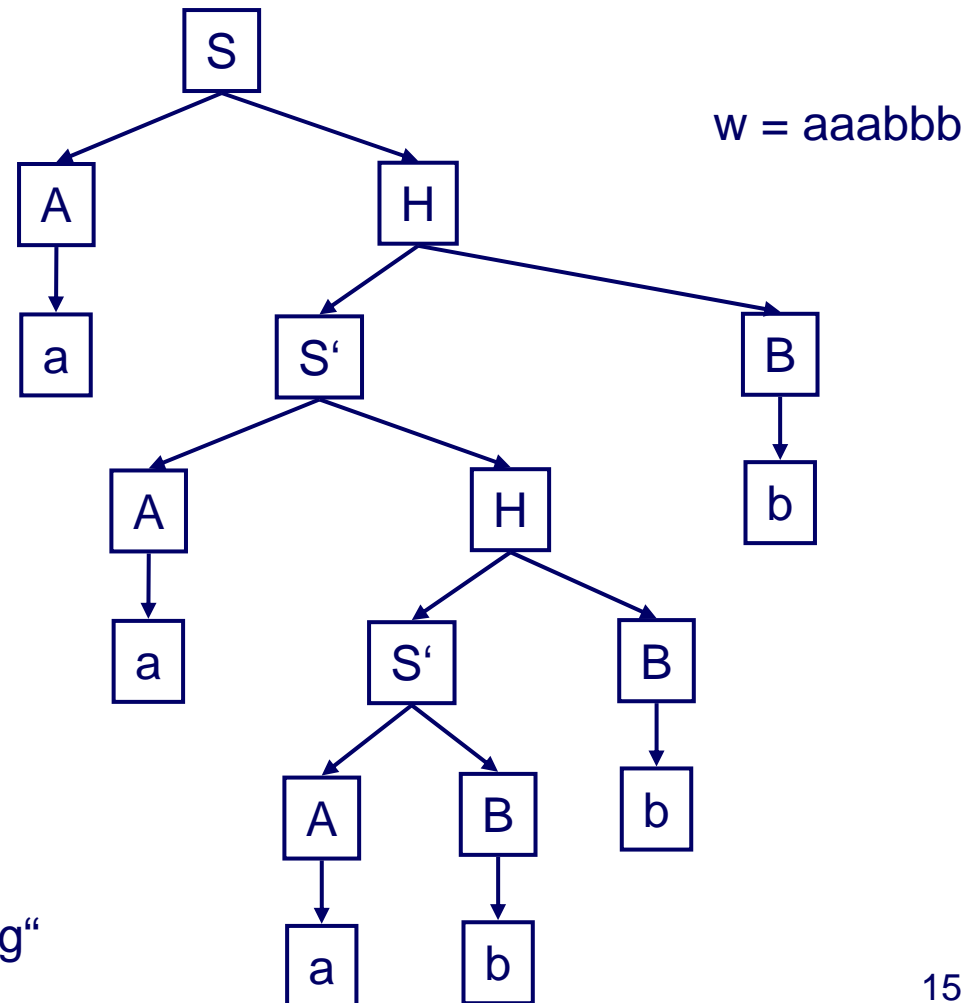


### Kontextfreie Sprachen

#### Beispiel 2

$\Sigma = \{ a, b \}$   
 $V = \{ S, A, B, H \}$   
S

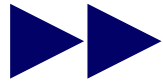
$S \rightarrow AH$   
 $S \rightarrow AB$   
 $H \rightarrow S'B$   
 $A \rightarrow a$   
 $B \rightarrow b$   
 $S' \rightarrow AH$   
 $S' \rightarrow AB$



Startpunkte für das „Pumping“

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



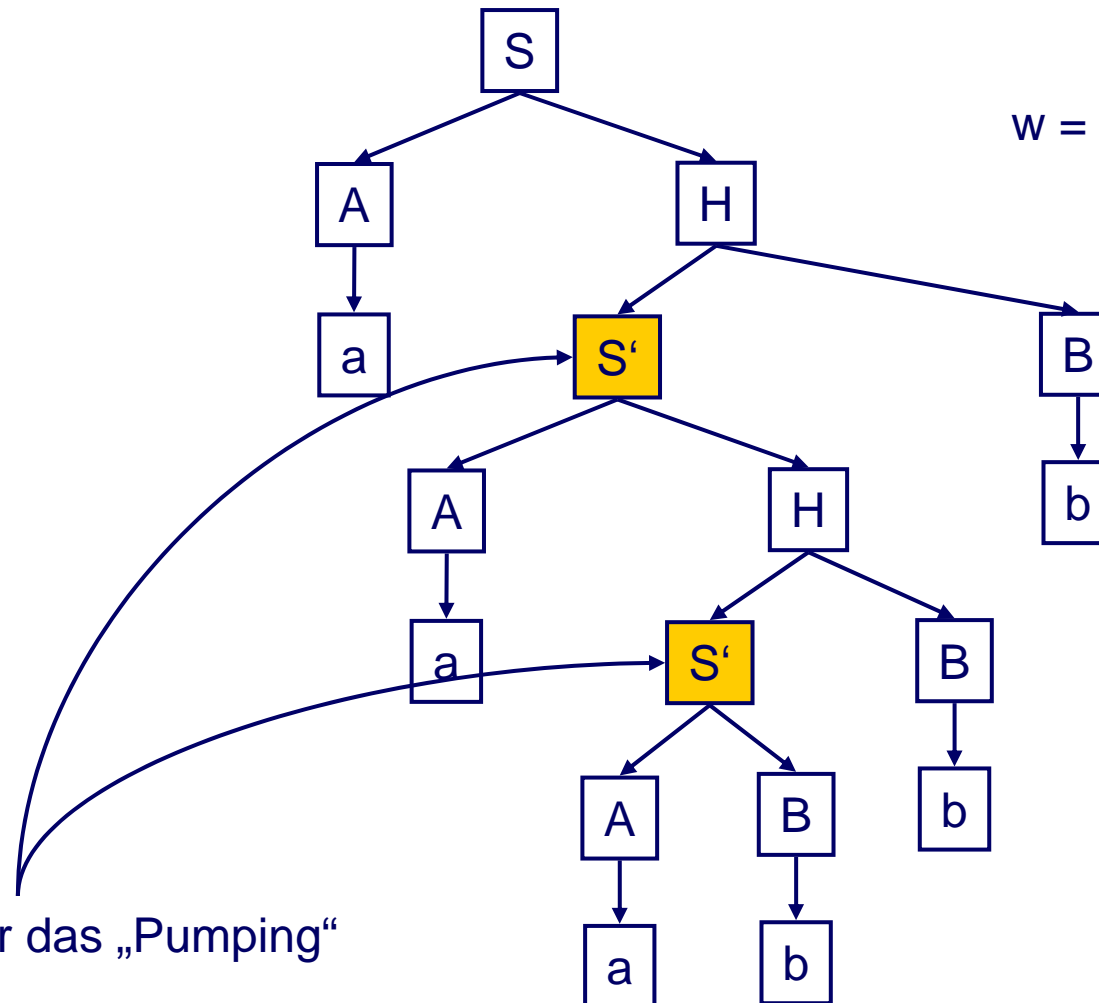
### Kontextfreie Sprachen

#### Beispiel 2

$\Sigma = \{ a, b \}$   
 $V = \{ S, A, B, H \}$   
 $S$

$S \rightarrow AH$   
 $S \rightarrow AB$   
 $H \rightarrow S'B$   
 $A \rightarrow a$   
 $B \rightarrow b$   
 $S' \rightarrow AH$   
 $S' \rightarrow AB$

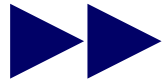
$w = aaabbb$



Startpunkte für das „Pumping“

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie

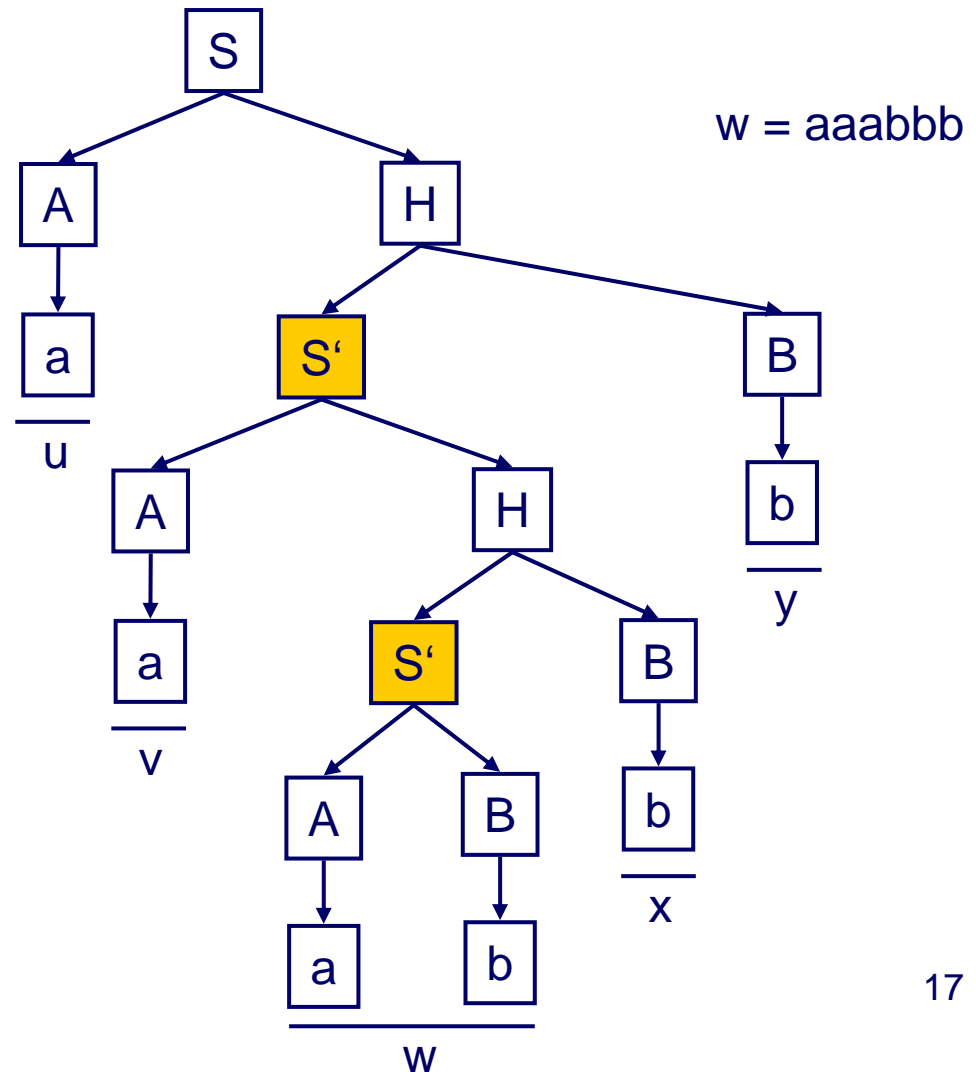


### Kontextfreie Sprachen

#### Beispiel 2

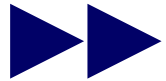
$\Sigma = \{ a, b \}$   
 $V = \{ S, A, B, H \}$   
 $S$

$S \rightarrow AH$   
 $S \rightarrow AB$   
 $H \rightarrow S'B$   
 $A \rightarrow a$   
 $B \rightarrow b$   
 $S' \rightarrow AH$   
 $S' \rightarrow AB$



# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Kontextfreie Sprachen*

#### Hintergrund

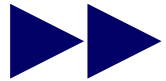
es sei  $G$  ist eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform,  
die  $k$  Variablen enthält

es sei  $w \in L(G)$  mit  $|w| = 2^k$

Dann gibt es im Ableitungsbaum von  $w$  einen Pfad der Länge  $k+1$ .  
In diesem Pfad muß eine Variable mehrfach vorkommen.

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Kontextfreie Sprachen*

es sei  $L \subseteq \Sigma^*$  eine unendliche Sprache

um nachzuweisen, daß  $L$  nicht kontextfrei ist, gehe wie folgt vor:

Schritt 1:

wähle zu jedem  $n > 0$  ein  $s_n \in L$  mit  $|s_n| \geq n$  (/ \* geschickt \*/)

Schritt 2:

zeige für jedes  $n > 0$  und alle  $u, v, w, x$  und  $y$  aus  $\Sigma^*$  mit:

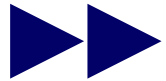
$$s_n = u \cdot v \cdot w \cdot x \cdot y, |v| + |x| \geq 1 \text{ und } |v| + |w| + |x| \leq n$$

daß für ein  $k \geq 0$  gilt:

$$u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y \notin L$$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Kontextfreie Sprachen*

**Beispiel 1**  $L = \{ a^z b^z a^z \mid z \geq 1 \}$

für jedes  $n > 0$  sei  $s_n = a^n b^n a^n$

es sei  $n > 0$  beliebig, aber fest

wenn  $u, v, w, x$  und  $z$  aus  $\Sigma^*$  gleichzeitig (i), (ii) und (iii) erfüllen,  
so muß gelten:

Fall 1:  $v \cdot x = a^r$  für ein  $r$  mit  $0 < r \leq n$

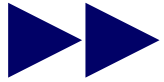
also gilt für  $k = 0$  entweder a) oder b):

a)  $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^{n-r} b^n a^n \notin L$

b)  $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^n b^n a^{n-r} \notin L$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Kontextfreie Sprachen*

**Beispiel 1**  $L = \{ a^z b^z a^z \mid z \geq 1 \}$

für jedes  $n > 0$  sei  $s_n = a^n b^n a^n$

es sei  $n > 0$  beliebig, aber fest

wenn  $u, v, w, x$  und  $z$  aus  $\Sigma^*$  gleichzeitig (i), (ii) und (iii) erfüllen,  
so muß gelten:

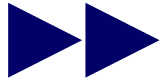
Fall 2:  $v \cdot x = b^r$  für ein  $r$  mit  $0 < r \leq n$

also gilt für  $k = 0$ :

- $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^n b^{n-r} a^n \notin L$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Kontextfreie Sprachen*

**Beispiel 1**  $L = \{ a^z b^z a^z \mid z \geq 1 \}$

für jedes  $n > 0$  sei  $s_n = a^n b^n a^n$

es sei  $n > 0$  beliebig, aber fest

wenn  $u, v, w, x$  und  $z$  aus  $\Sigma^*$  gleichzeitig (i), (ii) und (iii) erfüllen,  
so muß gelten:

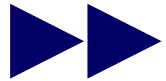
Fall 3:  $v \cdot x = a^r b^{r'}$  für ein  $r, r'$  mit  $0 < r + r' \leq n$

also gilt für  $k = 0$ :

- $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^{n-r} b^{n-r'} a^n \notin L$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Kontextfreie Sprachen*

**Beispiel 1**  $L = \{ a^z b^z a^z \mid z \geq 1 \}$

für jedes  $n > 0$  sei  $s_n = a^n b^n a^n$

es sei  $n > 0$  beliebig, aber fest

wenn  $u, v, w, x$  und  $z$  aus  $\Sigma^*$  gleichzeitig (i), (ii) und (iii) erfüllen,  
so muß gelten:

Fall 4:  $v \cdot x = b^r a^{r'}$  für ein  $r, r'$  mit  $0 < r + r' \leq n$

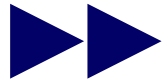
also gilt für  $k = 0$ :

- $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^n b^{n-r} a^{n-r'} \notin L$

also ist  $L$  nicht kontextfrei !!!

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Kontextfreie Sprachen*

**Beispiel 2**  $L = \{ ww \mid w \in \{ a, b \}^* \}$

für jedes  $n > 0$  sei  $s_n = a^n b^n a^n b^n$

es sei  $n > 0$  beliebig, aber fest

wenn  $u, v, w, x$  und  $z$  aus  $\Sigma^*$  gleichzeitig (i), (ii) und (iii) erfüllen,  
so muß gelten:

Fall 1:  $v \cdot x = a^r$  für ein  $r$  mit  $0 < r \leq n$

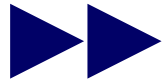
also gilt für  $k = 0$  entweder a) oder b):

a)  $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^{n-r} b^n a^n b^n \notin L$

b)  $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^n b^n a^{n-r} b^n \notin L$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Kontextfreie Sprachen*

**Beispiel 2**  $L = \{ ww \mid w \in \{ a, b \}^* \}$

für jedes  $n > 0$  sei  $s_n = a^n b^n a^n b^n$

es sei  $n > 0$  beliebig, aber fest

wenn  $u, v, w, x$  und  $z$  aus  $\Sigma^*$  gleichzeitig (i), (ii) und (iii) erfüllen,  
so muß gelten:

Fall 2:  $v \cdot x = b^r$  für ein  $r$  mit  $0 < r \leq n$

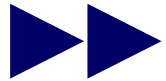
also gilt für  $k = 0$  entweder a) oder b):

a)  $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^n b^{n-r} a^n b^n \notin L$

b)  $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^n b^n a^n b^{n-r} \notin L$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Kontextfreie Sprachen*

**Beispiel 2**  $L = \{ ww \mid w \in \{ a, b \}^* \}$

für jedes  $n > 0$  sei  $s_n = a^n b^n a^n b^n$

es sei  $n > 0$  beliebig, aber fest

wenn  $u, v, w, x$  und  $z$  aus  $\Sigma^*$  gleichzeitig (i), (ii) und (iii) erfüllen,  
so muß gelten:

Fall 3:  $v \cdot x = a^r b^{r'}$  für ein  $r, r'$  mit  $0 < r + r' \leq n$

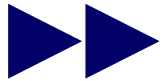
also gilt für  $k = 0$  entweder a) oder b):

a)  $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^{n-r} b^{n-r'} a^n b^n \notin L$

b)  $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^n b^n a^{n-r} b^{n-r'} \notin L$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Kontextfreie Sprachen*

**Beispiel 2**  $L = \{ ww \mid w \in \{ a, b \}^* \}$

für jedes  $n > 0$  sei  $s_n = a^n b^n a^n b^n$

es sei  $n > 0$  beliebig, aber fest

wenn  $u, v, w, x$  und  $z$  aus  $\Sigma^*$  gleichzeitig (i), (ii) und (iii) erfüllen,  
so muß gelten:

Fall 4:  $v \cdot x = b^r a^{r'}$  für ein  $r, r'$  mit  $0 < r + r' \leq n$

also gilt für  $k = 0$ :

- $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^n b^{n-r} a^{n-r'} b^n \notin L$

also ist  $L$  nicht kontextfrei !!!