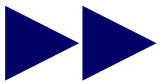
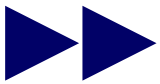
Theoretische Informatik
Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



Gliederung der Vorlesung

Theoretische Informatik
Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



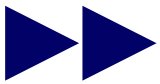
Reguläre Sprachen

Abschlußeigenschaften regulärer Sprachen

... formale Sprachen, also auch reguläre Sprachen, sind Teilmengen der Menge aller Wörter über dem zugrunde liegenden Alphabet

... es gibt eine Reihe von Mengenoperationen: Durchschnitt, Vereinigung, Komplement, Differenz

Was passiert, wenn man diese Operationen auf reguläre Sprachen anwendet?



Reguläre Sprachen

Beispiel

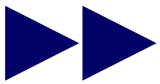
L = { w | w $\in$ { a, b }*, w enthält nicht das Teilwort abb }

... nachzuweisen, daß L regulär ist, scheint komplizierter

L‘ = { w | w $\in$ { a, b }*, w enthält das Teilwort abb }

... es ist einfach nachzuweisen, daß L regulär ist

es gilt: L = { a, b }* \ L‘



Reguläre Sprachen

Beispiel

$L = \{ w \mid w \in \{ 0, 1 \}^*$, w ist Binärdarstellung einer Zahl, die durch 4 oder 8 teilbar ist $\}$

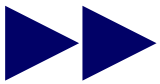
... komplizierter

$L_1 = \{ w \mid w \in \{ a, b \}^*$, w ist Binärdarstellung einer Zahl, die durch 4 teilbar ist $\}$

$L_2 = \{ w \mid w \in \{ a, b \}^*$, w ist Binärdarstellung einer Zahl, die durch 8 teilbar ist $\}$

... jeweils einfacher

es gilt: $L = L_1 \cup L_2$



Reguläre Sprachen

Beispiel

$L = \{ (0100)^n \mid n \geq 0 \}$

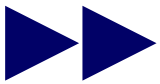
... komplizierter

$L_1 = \{ 0100 \}$

... einfacher

es gilt: $L = (L_1)^* = \{ \varepsilon \} \cup \{ w^n \mid w \in L_1, n \geq 1 \}$

Theoretische Informatik
Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



Reguläre Sprachen

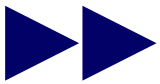
es seien Σ' und Σ'' die zugrunde liegenden Alphabete

es seien $L_1 \subseteq (\Sigma')^*$ und $L_2 \subseteq (\Sigma'')^*$ reguläre Sprachen über

Dann gilt:

- $L_1 \cup L_2$ ist eine reguläre Sprache
- $L_1 \cap L_2$ ist eine reguläre Sprache
- $L_1 \setminus L_2$ ist eine reguläre Sprache
- $L_1 \circ L_2 = \{ wv \mid w \in L_1, w \in L_2 \}$ ist eine reguläre Sprache
- $(L_1)^* = \{ \varepsilon \} \cup \{ w_1 w_2 ... w_n \mid n \geq 1, w_1 \in L_1, w_2 \in L_1, ..., w_n \in L_1 \}$ ist eine reguläre Sprache

... Spezialfall: wenn $L_1 = \Sigma^*$, so ist $L_1 \setminus L_2 = co(L_2) = \{ w \mid w \in \Sigma, w \notin L_2 \}$



Reguläre Sprachen

zum Nachweis der Abgeschlossenheitseigenschaften hilft es, sich daran zu erinnern, daß man aus folgenden Ansätzen wählen kann, um nachzuweisen, daß eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ regulär ist

- es gibt eine reguläre Grammatik G mit L(G) = L
- es gibt einen DFA A mit L(A) = L
- es gibt einen NFA B mit L(B) = L

... man wählt jeweils die „passenden“ Beschreibungsmittel

Reguläre Sprachen

$L_1 \cup L_2$ ist eine reguläre Sprache

→ man wähle reguläre Grammatiken G_1 und G_2 für L_1 und L_2

$S \rightarrow 0S \mid 1A$
$A \rightarrow 0S \mid 1A' \mid 1$
$A' \rightarrow 0 \mid 1 \mid 0A' \mid 1A'$

$S \rightarrow 0S \mid 1A$
$A \rightarrow 0$

$S \rightarrow S_1$
$S \rightarrow S_2$
$S_1 \rightarrow 0S_1 \mid 1A_1$
$A_1 \rightarrow 0S_1 \mid 1A'_1 \mid 1$
$A'_1 \rightarrow 0 \mid 1 \mid 0A'_1 \mid 1A'_1$
$S_2 \rightarrow 0S_2 \mid 1A_2$
$A_2 \rightarrow 0$

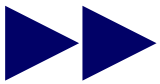
fast ok

... Variablen in G_1 und G_2 so umbenennen, daß V_1 und V_2 disjunkt werden

Reguläre Sprachen

$S \rightarrow S_1$
$S \rightarrow S_2$
$S_1 \rightarrow \boxed{0S_1 \mid 1A_1}$
$A_1 \rightarrow 0S_1 \mid 1A'_1 \mid 1$
$A'_1 \rightarrow 0 \mid 1 \mid 0A'_1 \mid 1A'_1$
$S_2 \rightarrow \boxed{0S_2 \mid 1A_2}$
$A_2 \rightarrow 0$

$S \rightarrow \boxed{0S_1 \mid 1A_1}$
$S \rightarrow \boxed{0S_2 \mid 1A_2}$
$S_1 \rightarrow 0S_1 \mid 1A_1$
$A_1 \rightarrow 0S_1 \mid 1A'_1 \mid 1$
$A'_1 \rightarrow 0 \mid 1 \mid 0A'_1 \mid 1A'_1$
$S_2 \rightarrow 0S_2 \mid 1A_2$
$A_2 \rightarrow 0$



Reguläre Sprachen

$L_1 \cup L_2$ ist eine reguläre Sprache

→ man wähle reguläre Grammatiken G_1 und G_2 für L_1 und L_2

konstruiere die gesuchte Grammatik G für $L_1 \cup L_2$ wie folgt:

Schritt 1: ...

Schritt 2: ...

Schritt 3: ...

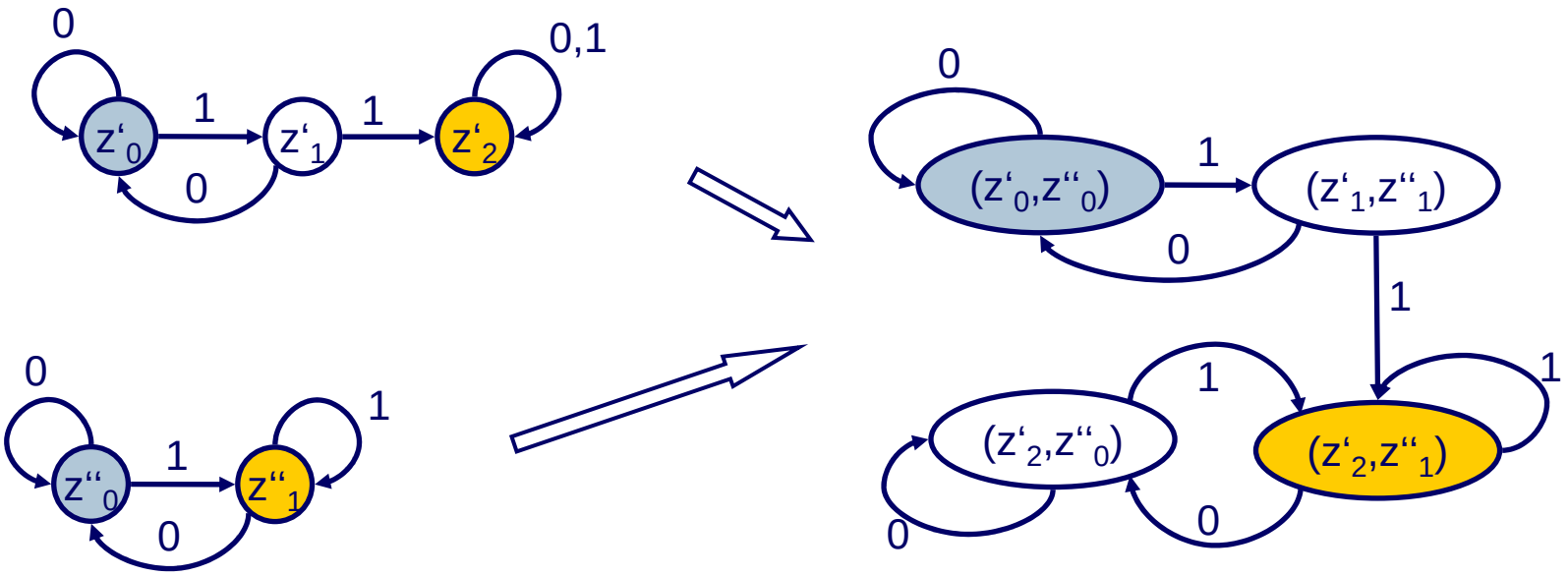
Bitte selber ergänzen!

Theoretische Informatik
Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie

Reguläre Sprachen

$L_1 \cap L_2$ ist eine reguläre Sprache

→ man wähle deterministische endliche Automaten A_1 und A_2 für L_1 und L_2



Reguläre Sprachen

$L_1 \cap L_2$ ist eine reguläre Sprache

→ man wähle deterministische endliche Automaten A_1 und A_2 für L_1 und L_2

$A_1 = [Z', \Sigma', \delta', z'_0, E']$

$A_2 = [Z'', \Sigma'', \delta'', z''_0, E'']$

⟹

$A = [Z, \Sigma, \delta, z_0, E]$ für $L_1 \cap L_2$:

- $Z = \{ (z', z'') \mid z' \in Z' \text{ und } z'' \in Z'' \}$
- $\Sigma = \Sigma' \cap \Sigma''$
- $z_0 = (z'_0, z''_0)$
- $E = \{ (z', z'') \mid z' \in E' \text{ und } z'' \in E'' \}$
- für alle $(z', z'') \in Z$ und alle $a \in \Sigma$ gilt:
  - $\delta((z', z''), a) = (x', y')$, wobei
    $x' = \delta'(z', a)$ und $y'' = \delta''(z'', a)$

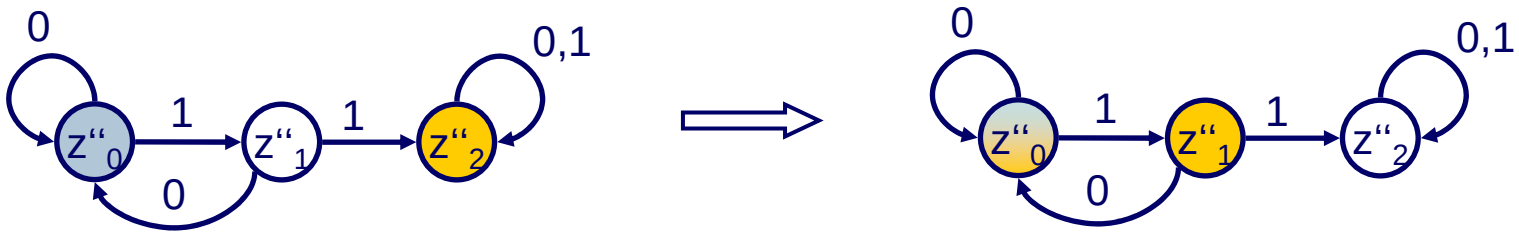
Theoretische Informatik
Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie

Reguläre Sprachen

$L_1 \setminus L_2$ ist eine reguläre Sprache

Spezialfall: $L_1 = \Sigma^*$, dann ist $L_1 \setminus L_2 = co(L_2)$

→ man wähle einen deterministischen endlichen Automat A_2 für L_2



Reguläre Sprachen

$L_1 \setminus L_2$ ist eine reguläre Sprache

Spezialfall: $L_1 = \Sigma^*$, dann ist $L_1 \setminus L_2 = co(L_2)$

→ man wähle einen deterministischen endlichen Automat A_2 für L_2

$A_2 = [Z‘,\Sigma‘,\delta‘,z‘_0,E‘]$ ⟹

$A = [Z,\Sigma,\delta,z_0,E]$ für $co(L_2)$:

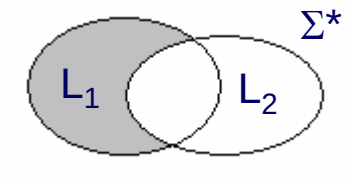
- $Z = Z‘$
- $\Sigma = \Sigma‘$
- $z‘_0$
- $E = Z \setminus E‘$
- für alle $z \in Z$ und alle $a \in \Sigma$ gilt:
  - $\delta(z,a) = \delta‘(z,a)$

Reguläre Sprachen

$L_1 \setminus L_2$ ist eine reguläre Sprache

allgemeiner Fall

offenbar gilt: $L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap (\Sigma^* \setminus L_2)$



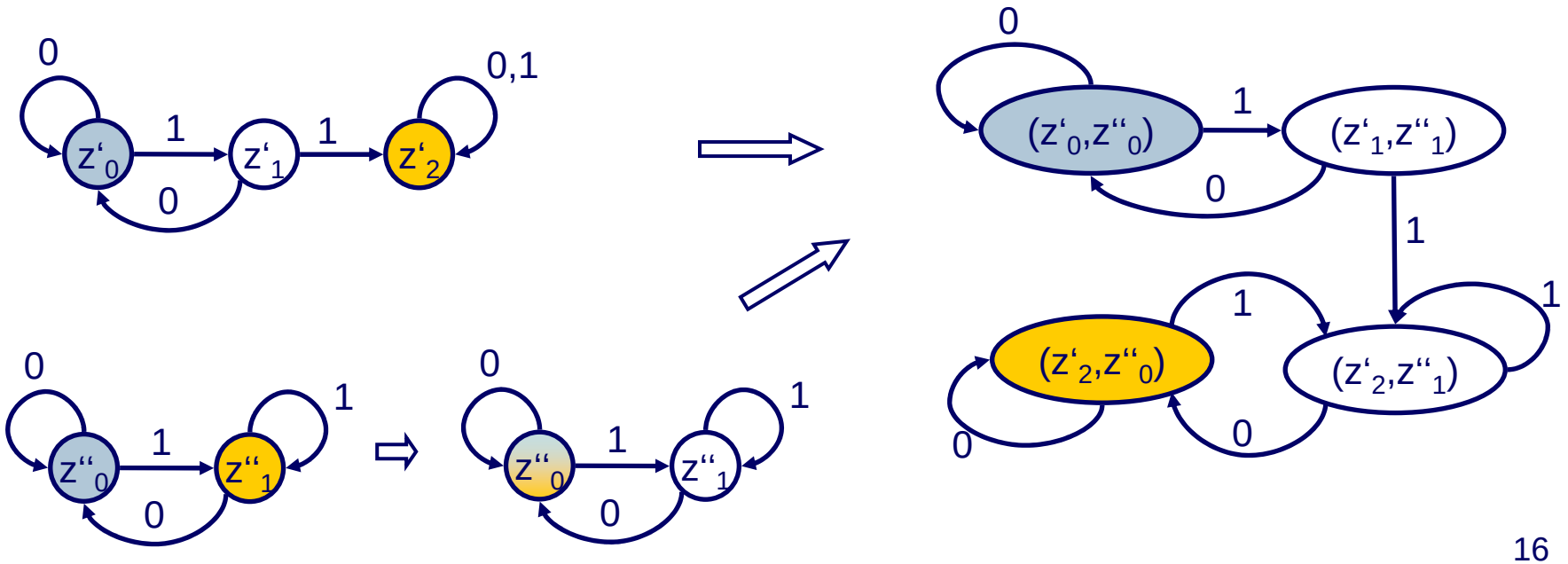
... daraus läßt sich auch eine „Konstruktionsvorschrift“ ableiten

Theoretische Informatik
Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie

Reguläre Sprachen

$L_1 \setminus L_2$ ist eine reguläre Sprache

→ man wähle deterministische endliche Automaten A_1 und A_2 für L_1 und L_2



Reguläre Sprachen

$L_1 \setminus L_2$ ist eine reguläre Sprache

→ man wähle deterministische endliche Automaten A_1 und A_2 für L_1 und L_2

$A_1 = [Z', \Sigma', \delta', z'_0, E']$

$A_2 = [Z'', \Sigma'', \delta'', z''_0, E'']$

⟹

$A = [Z, \Sigma, \delta, z_0, E]$ für $L_1 \setminus L_2$:

- $Z = \{ (z', z'') \mid z' \in Z' \text{ und } z'' \in Z'' \}$
- $\Sigma = \Sigma' \cap \Sigma''$
- $z_0 = (z'_0, z''_0)$
- $E = \{ (z', z'') \mid z' \in E' \text{ und } z'' \notin E'' \}$
- für alle $(z', z'') \in Z$ und alle $a \in \Sigma$ gilt:
  - $\delta((z', z''), a) = (x', y'')$, wobei
    $x' = \delta'(z', a)$ und $y'' = \delta''(z'', a)$

Theoretische Informatik
Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie

Reguläre Sprachen

$L_1 \circ L_2$ ist eine reguläre Sprache

→ man wähle reguläre Grammatiken G_1 und G_2 für L_1 und L_2

$S \rightarrow 0S \mid 1A$
$A \rightarrow 0S \mid 1A' \mid 1$
$A' \rightarrow 0 \mid 1 \mid 0A' \mid 1A'$

⇨

$S_1 \rightarrow 0S_1 \mid 1A_1$
$A_1 \rightarrow 0S_1 \mid 1A'_1 \mid 1S_2$
$A'_1 \rightarrow 0S_2 \mid 1S_2 \mid 0A'_1 \mid 1A'_1$

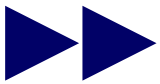
⇘

$S \rightarrow 0S \mid 1A$
$A \rightarrow 0$

⟹

$S_1 \rightarrow 0S_1 \mid 1A_1$
$A_1 \rightarrow 0S_1 \mid 1A'_1 \mid 1S_2$
$A'_1 \rightarrow 0S_2 \mid 1S_2 \mid 0A'_1 \mid 1A'_1$
$S_2 \rightarrow 0S_2 \mid 1A_2$
$A_1 \rightarrow 0$

... Variablen in G_1 und G_2 so umbenennen, daß V_1 und V_2 disjunkt werden



Reguläre Sprachen

$L_1 \circ L_2$ ist eine reguläre Sprache

→ man wähle reguläre Grammatiken G_1 und G_2 für L_1 und L_2

konstruiere die gesuchte Grammatik G für $L_1 \circ L_2$ wie folgt:

Schritt 1: ...

Schritt 2: ...

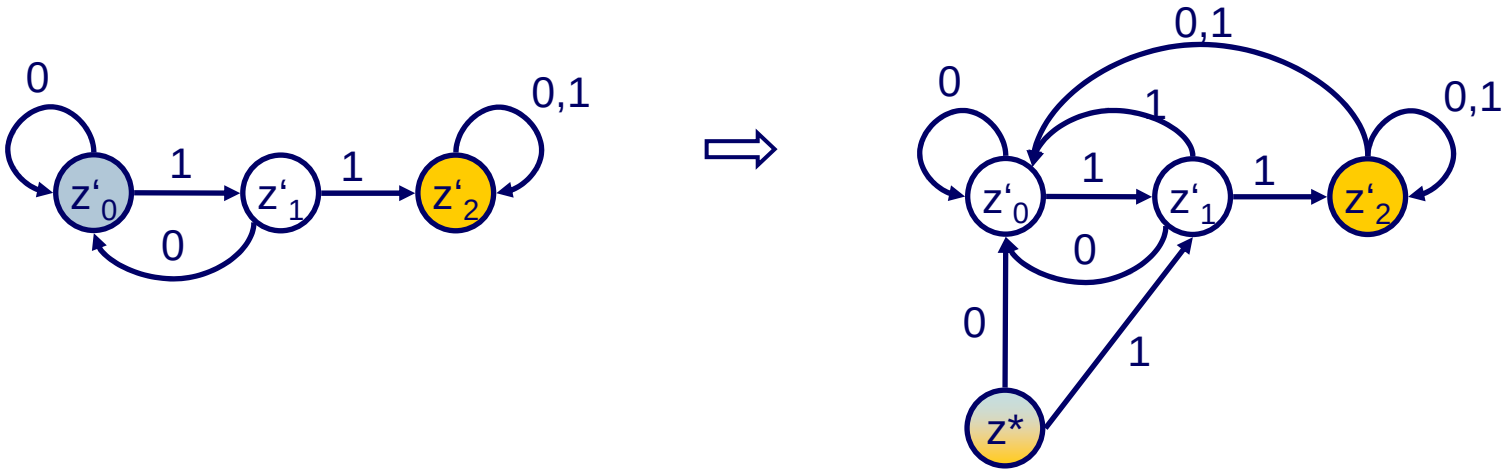
Schritt 3: ...

Bitte selber ergänzen!

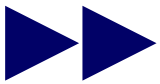
Reguläre Sprachen

$(L_1)^*$ ist eine reguläre Sprache

→ man wähle einen deterministischen endlichen Automat A_1 für L_1



... es entsteht ein NFA



Reguläre Sprachen

$(L_1)^*$ ist eine reguläre Sprache

→ man wähle einen vollständig definierten DFA A_1 für L_1

$A_1 = [Z', \Sigma', \delta', z'_0, E']$ ⟹

$B = [Z, \Sigma, \delta, z_0, E]$ für $(L_1)^*$:

- $Z = Z' \cup \{ z^* \}$ mit $z^* \notin Z'$
- $\Sigma = \Sigma'$
- $z_0 = z^*$
- $E = E' \cup \{ z^* \}$
- für alle $z \in Z$ und alle $a \in \Sigma$ gilt:
  - wenn $z \neq z^*$, so $\delta'(z,a) \in \delta(z,a)$
  - wenn $\delta(z,a) \in E'$, so $z'_0 \in \delta'(z,a)$
  - wenn $z = z^*$, so $\delta'(z'_0,a) \in \delta(z,a)$