Theoretische Informatik
Kap 0: Grundbegriffe

Gliederung der Vorlesung

0. Grundbegriffe
1. Formale Sprachen/Automatentheorie
   - 1.1. Grammatiken
   - 1.2. Reguläre Sprachen
   - 1.3. Kontext-freie Sprachen

2. Berechnungstheorie
   - 2.1. Entscheidungsprobleme
   - 2.2. Berechenbarkeitsmodelle
   - 2.3. Die Churchsche These
   - 2.4. Unentscheidbarkeit

3. Komplexitätstheorie
   - 3.1. Nicht-deterministische Turing Maschinen
   - 3.1 Komplexitätsmaße
   - 3.2. Das P=NP? Problem

Theoretische Informatik
Kap 0: Grundbegriffe

Alphabete, Zeichenketten, Sprachen

- Ein Alphabet Σ ist eine endliche Menge von Symbolen (bzw. Zeichen).

  Σ = { a,b,c,...,z}
  Σ‘ = { A,B,C,...,Z }
  Σ“ = { 0,1,...,9 }
  …

- Eine Zeichenkette ist eine endliche Folge von Symbolen.

  anton, 123, ACHTUNG
  besondere Zeichenkette: ε

Alphabete, Zeichenketten, Sprachen

- Die Länge einer Zeichenkette u ist die Anzahl der Symbole von u.

  |Anton| = 5
  |121| = 3
  $|\varepsilon| = 0$

- Das Ergebnis der Konkatenation von zwei Zeichenketten u und v ist die Zeichenkette, die entsteht wenn v an u angehängt wird.

  u = abc ; v= DEF → uv = abcDEF
  u‘ = aa ; v‘= bb → u‘v‘ = aabb
  u“ = aba; v“ = ε → u“v“ = v“u“ = u“ = aba

Alphabete, Zeichenketten, Sprachen

es sei $\Sigma = \{ a, b \}$

$\Sigma^0 = \{ \varepsilon \}$
$\Sigma^1 = \{ a, b \}$
$\Sigma^2 = \{ aa, ab, ba, bb \}$
$\Sigma^3 = \{ aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb \}$
...

$\Sigma^* = \{ \varepsilon, a, b, aa, ..., bb, aaa, ..., bbb, aaaa, ..., bbbb, ...\}$

Σ^* ist die Menge aller Zeichenketten über dem Alphabet Σ

Theoretische Informatik
Kap 0: Grundbegriffe

Alphabete, Zeichenketten, Sprachen

... ein wenig formaler

es sei Σ das zugrunde liegende Alphabet

$\Sigma^0 = \{ \varepsilon \}$ (/* Zeichenketten der Länge 0 */)
$\Sigma^1 = \Sigma$ (/* Zeichenketten der Länge 1 */)
$\Sigma^{n+1} = \{ wa \mid w \in \Sigma^n, a \in \Sigma \}$ (/* Zeichenketten der Länge n+1 */)

$\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup ...$ (/* alle Zeichenketten über Σ */)

Theoretische Informatik
Kap 0: Grundbegriffe

▶▶ *Alphabete, Zeichenketten, Sprachen*

- Jedes Anfangsstück einer Zeichenkette u heißt Präfix von u.

  u = anton → ε, a, an, ant, anto, anton
  u' = 121 → ε, 1, 12, 121

- Jedes Endstück einer Zeichenkette u heißt Suffix von u.

  u = anton → ε, n, on, ton, nton, anton
  u' = 121 → ε, 1, 21, 121

Theoretische Informatik
Kap 0: Grundbegriffe

Alphabete, Zeichenketten, Sprachen

... ein wenig formaler

es sei das zugrunde liegende Alphabet
es sei u ein Wort in Σ^*

Ein Wort $p \in \Sigma^*$ ist ein Präfix (bzw. Suffix) von u
gdw.
es gibt ein Wort $w \in \Sigma^*$, so daß gilt: $pw = u$ (bzw. $ws = u$).

Mengen, Relationen

- Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Elementen.

  $M = \{ n \mid n \in \text{Nat und } n \bmod 2 = 0 \}$
  $M' = \{ v111 \mid v \in \{ 0,1 \}^* \}$

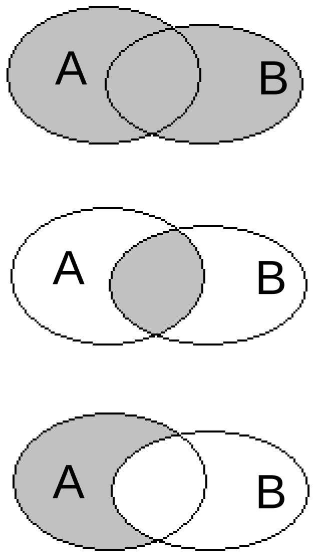
- Beziehungen zwischen Mengen (Teilmenge, Obermenge)

  - $A \subseteq B$, d.h. jedes Element von A ist auch ein Element von B
  - $A \supseteq B$, d.h. jedes Element von B ist auch ein Element von A

Mengen, Relationen

- Operationen mit Mengen (/* Vereinigung, Durchschnitt, Differenz, Potenzmengenbildung */)

  - $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ oder } x \in B \}$
  - $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ und } x \in B \}$
  - $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ und } x \notin B \}$
  - $2^A = \{ M \mid M \subseteq A \}$



- einfache Zusammenhänge

  - $A \subseteq (A \cup B)$, $B \subseteq (A \cup B)$
  - $(A \cap B) \subseteq A$, $(A \cap B) \subseteq B$
  - $(A \setminus B) \subseteq A$
  - $\{\} \in 2^A$, $A \in 2^A$

Mengen, Relationen

$A = \{ a, b , c \}$

→ $2^A = \{ \{ \}, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a, b, c \} \}$

$A = \{ 0, 1, 2, ... \}$

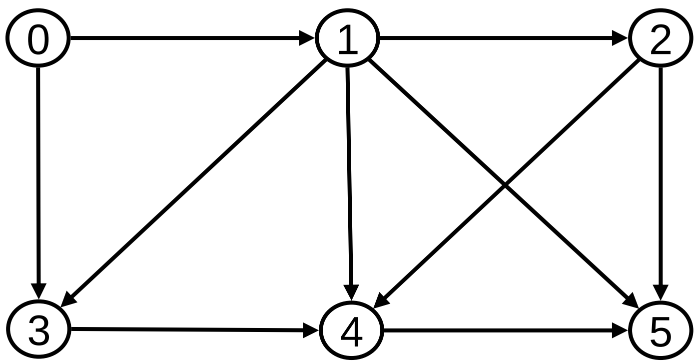
→ 2^A = Menge aller Teilmenge von A
u.a. die leere Menge, die Menge aller geraden Zahlen, ...

Mengen, Relationen

- Eine binäre Relation R über A und B ist eine Menge von geordneten Paaren, d.h. $R \subseteq \{ (a,b) \mid a \in A \text{ und } b \in B \}$.

alternative Schreibweise: aRb
Speziallfall: A = B → Relation auf A

A = { 0, 1, 2, 3 , 4, 5 }
R = { (0,1), (0,3),
(1,2), (1,3), (1,4), (1,5),
(2,4), (2,5),
(3,4),
(4,5) }



Mengen, Relationen

- Eigenschaften von Relationen

  es sei R eine Relation auf A

  - R ist reflexiv, falls für alle $a \in A$ gilt:
    $(a,a) \in R$
  - R ist symmetrisch, falls für alle $a,b \in A$ gilt:
    wenn $(a,b) \in R$, so $(b,a) \in R$
  - R ist transitiv, falls für alle $a,b,c \in A$ gilt:
    wenn $(a,b) \in R$ und $(b,c) \in R$, so auch $(a,c) \in R$

- Hüllen von Relationen

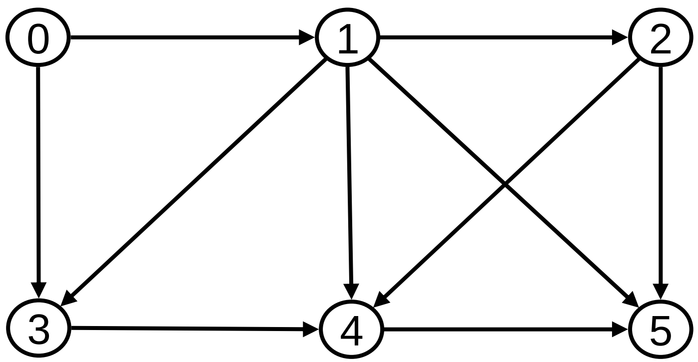
  es sei R eine Relation auf A

  - Die transitive Hülle von R (bezeichnet mit R^+) ist die kleinste Relation mit folgenden Eigenschaften:
    - wenn $(a,b) \in R$, so $(a,b) \in R^+$
    - wenn $(a,b) \in R^+$ und $(b,c) \in R^+$, so $(a,c) \in R^+$

  - Die reflexive, transitive Hülle von R (bezeichnet mit R^*) ist die wie folgt definierte Relation: $R^* = R^+ \cup \{ (a,a) \mid a \in A \}$

Mengen, Relationen

A = { 0, 1, 2, 3 , 4, 5 }
R = { (0,1), (0,3),
(1,2), (1,3), (1,4), (1,5),
(2,4), (2,5),
(3,4),
(4,5) }



A = { 0, 1, 2, 3 , 4, 5 }
R^+ = { (0,1), (0,3), (0,2) , (0,4) , (0,5),
(1,2), (1,3), (1,4), (1,5),
(2,4), (2,5),
(3,4), (3,5),
(4,5) }