Theoretische Informatik
Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie

Gliederung der Vorlesung

0. Grundbegriffe
1. Formale Sprachen/Automatentheorie
   - 1.1. Grammatiken
   - 1.2. Reguläre Sprachen
   - **1.3. Kontextfreie Sprachen**
2. Berechnungstheorie
   - 2.1. Berechenbarkeitsmodelle
   - 2.2. Die Churchsche These
   - 2.3. Unentscheidbarkeit
3. Komplexitätstheorie
   - 3.1. Nicht-deterministische Turing Maschinen
   - 3.2. Komplexitätsmaße
   - 3.3. Das P=NP? Problem

Kontextfreie Sprachen

algorithmischer Aspekt

auf den ersten Blick scheint alles klar

... aber ist die Idee, zunächst eine gegebene kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform zu überführen und dann den CYK-Algorithmus anzuwenden, wirklich praktikabel ?

... zur Beantwortung dieser Frage muß man zunächst die Eigenschaften kontextfreier Sprachen besser verstehen...

Beispiel: prüfen, ob der Quellcode eines Programm syntaktisch korrekt ist

Annahme: unser Rechner schafft 10^9 Operationen pro Sekunde

Länge des Quellcodes	CYK-Algorithmus
100 Zeichen	0.001s
1000 Zeichen	1s
10000 Zeichen	$\geq$ 16 min

... man sollte über Alternativen nachdenken !!!

Kontextfreie Sprachen

konzeptioneller Aspekt

... ein besseres Verständnis für die Ausdrucksfähigkeit von kontextfreien Grammatiken bekommen

insbesondere:
Grenzen der Ausdrucksfähigkeit

Kontextfreie Sprachen

Feststellung

alle regulären Sprachen sind kontextfrei
insbesondere sind alle endlichen Sprachen kontextfrei

welche Aussagen können wir über unendliche Sprachen treffen?

Was ist allen unendlichen kontextfreien Sprachen gemein?

Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Es sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine unendliche Sprache.

Wenn L kontextfrei ist, so gibt es eine Zahl n,

so daß für alle Wörter $s \in L$ mit $|s| \geq n$, gilt:

es gibt Wörter u, v, w, x und y aus Σ^*, so daß gilt:

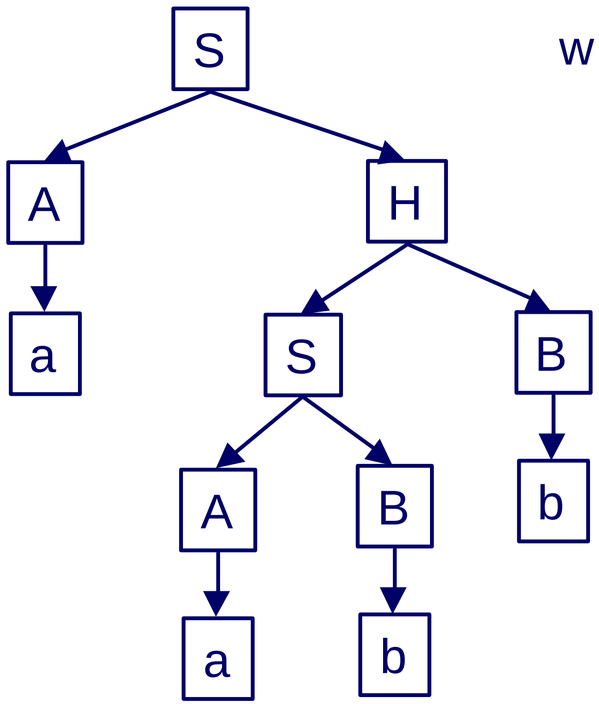
(i) $s = u \cdot v \cdot w \cdot x \cdot y$
(ii) $|v| + |x| \geq 1$
(iii) $|v| + |w| + |x| \leq n$
(iv) $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y \in L$ für alle $k \geq 0$

Kontextfreie Sprachen

Beispiel 1

$\Sigma = \{ a, b \}$
$V = \{ S, A, B, H \}$
S

$S \rightarrow AH$
$S \rightarrow AB$
$H \rightarrow SB$
$A \rightarrow a$
$B \rightarrow b$



w = aabb

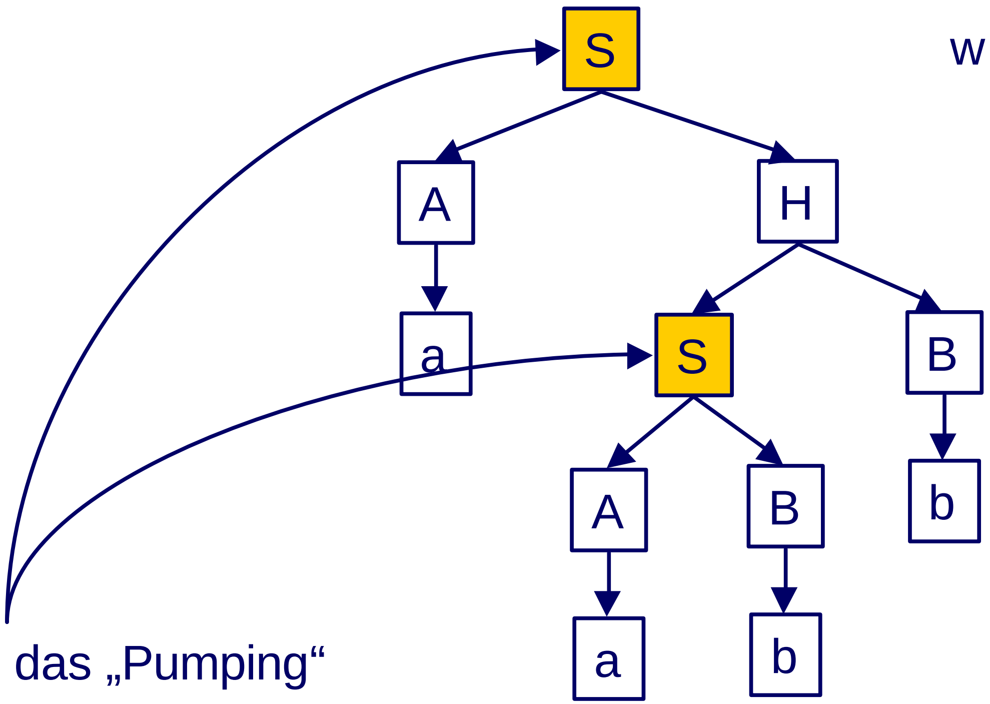
Theoretische Informatik
Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie

Kontextfreie Sprachen

Beispiel 1

$\Sigma = \{ a, b \}$
$V = \{ S, A, B, H \}$
S

$S \rightarrow AH$
$S \rightarrow AB$
$H \rightarrow SB$
$A \rightarrow a$
$B \rightarrow b$



w = aabb

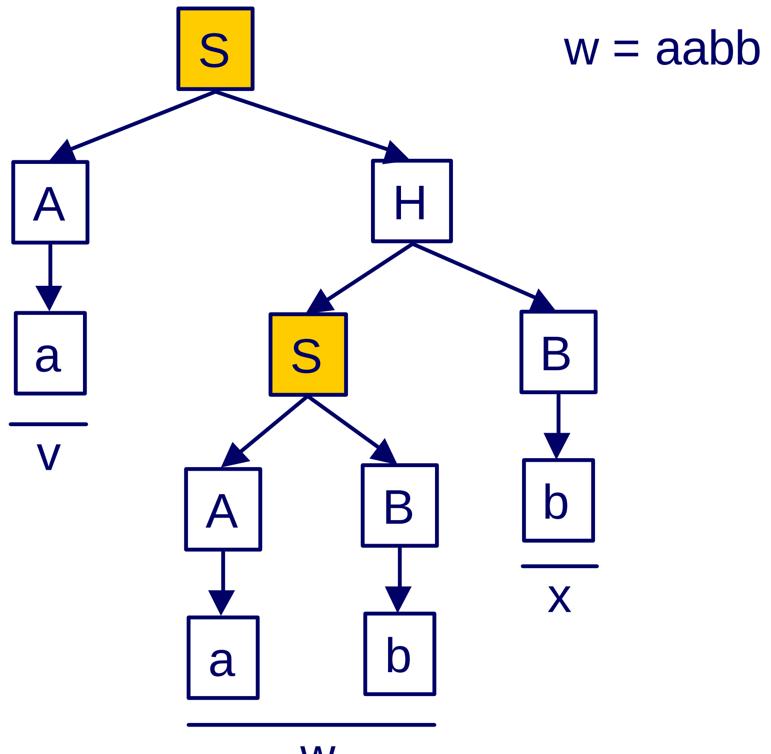
Startpunkte für das „Pumping“

Kontextfreie Sprachen

Beispiel 1

$\Sigma = \{ a, b \}$
$V = \{ S, A, B, H \}$
S

$S \rightarrow AH$
$S \rightarrow AB$
$H \rightarrow SB$
$A \rightarrow a$
$B \rightarrow b$



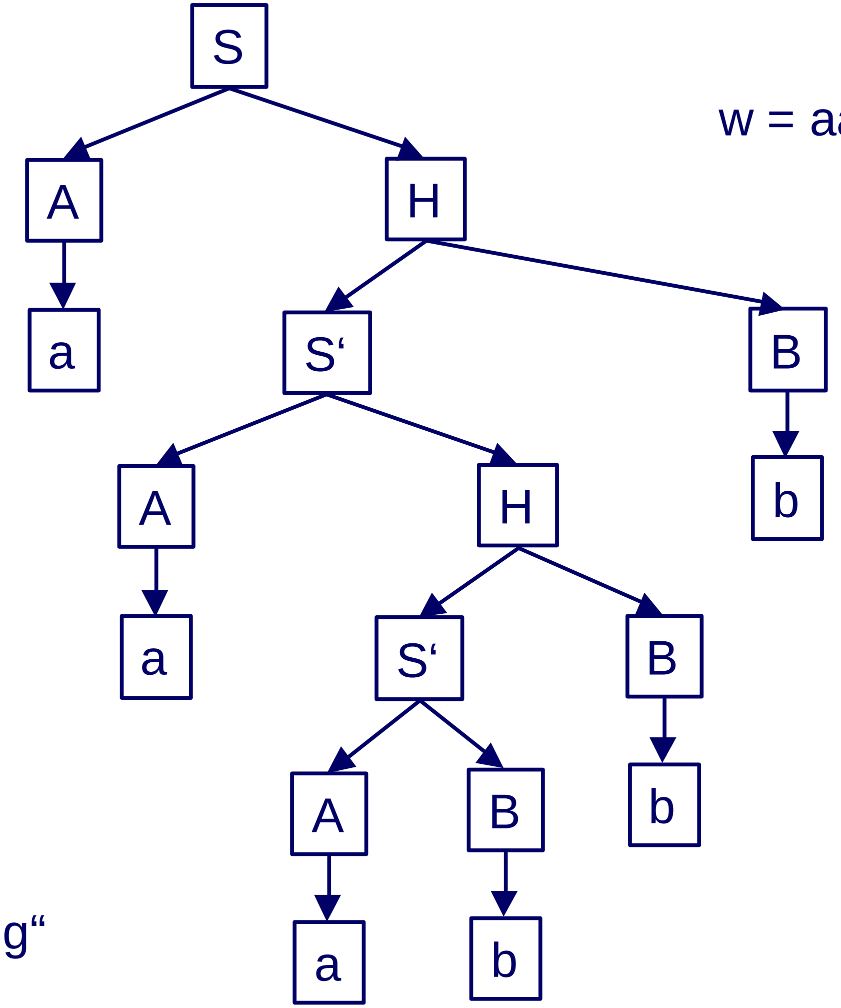
Kontextfreie Sprachen

Beispiel 2

$\Sigma = \{ a, b \}$
$V = \{ S, A, B, H \}$
S

$S \rightarrow AH$
$S \rightarrow AB$
$H \rightarrow S'B$
$A \rightarrow a$
$B \rightarrow b$
$S' \rightarrow AH$
$S' \rightarrow AB$

w = aaabbb

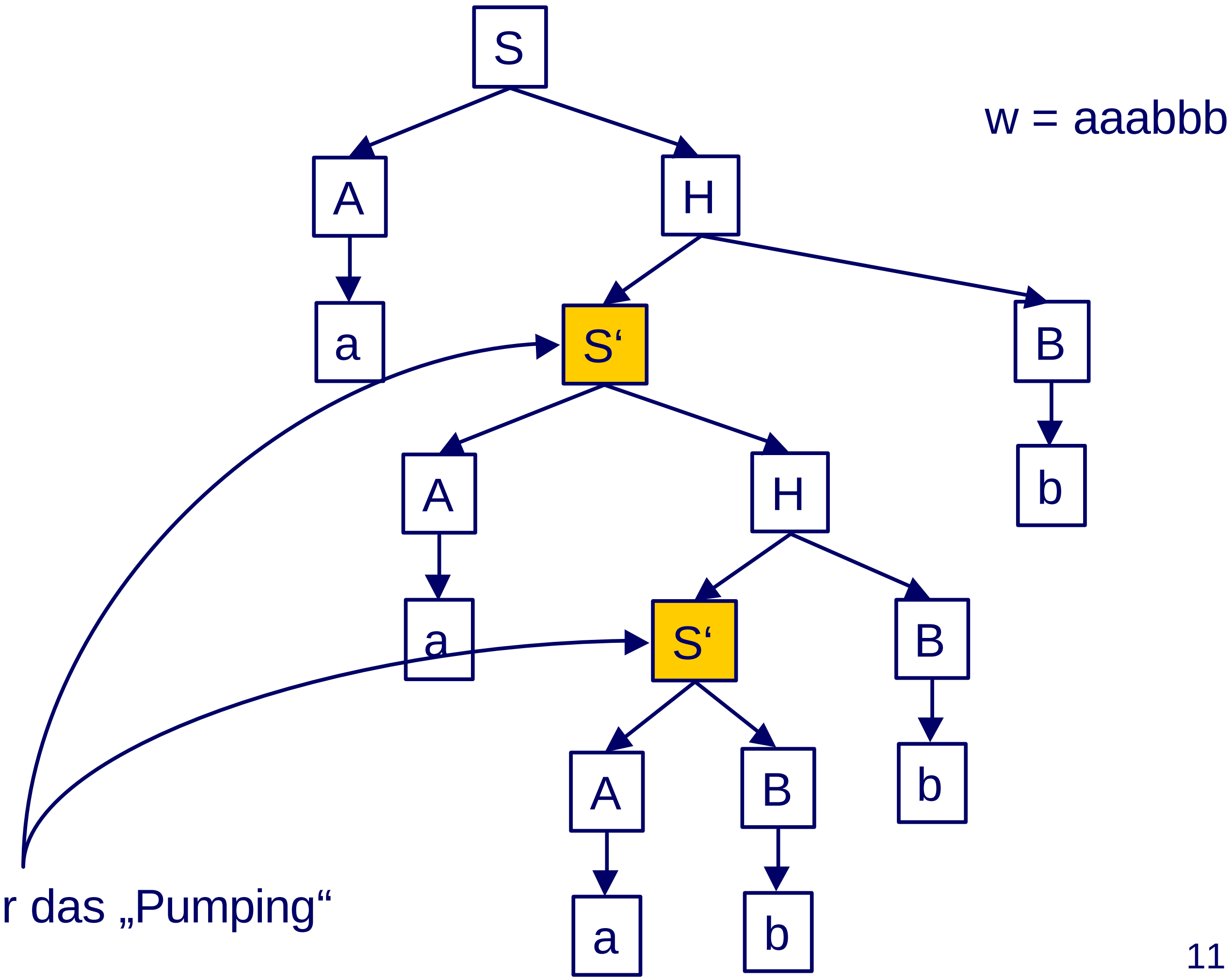


Startpunkte für das „Pumping“

Beispiel 2

Σ = { a, b }
V = { S, A, B, H }
S

S → AH
S → AB
H → S'B
A → a
B → b
S' → AH
S' → AB

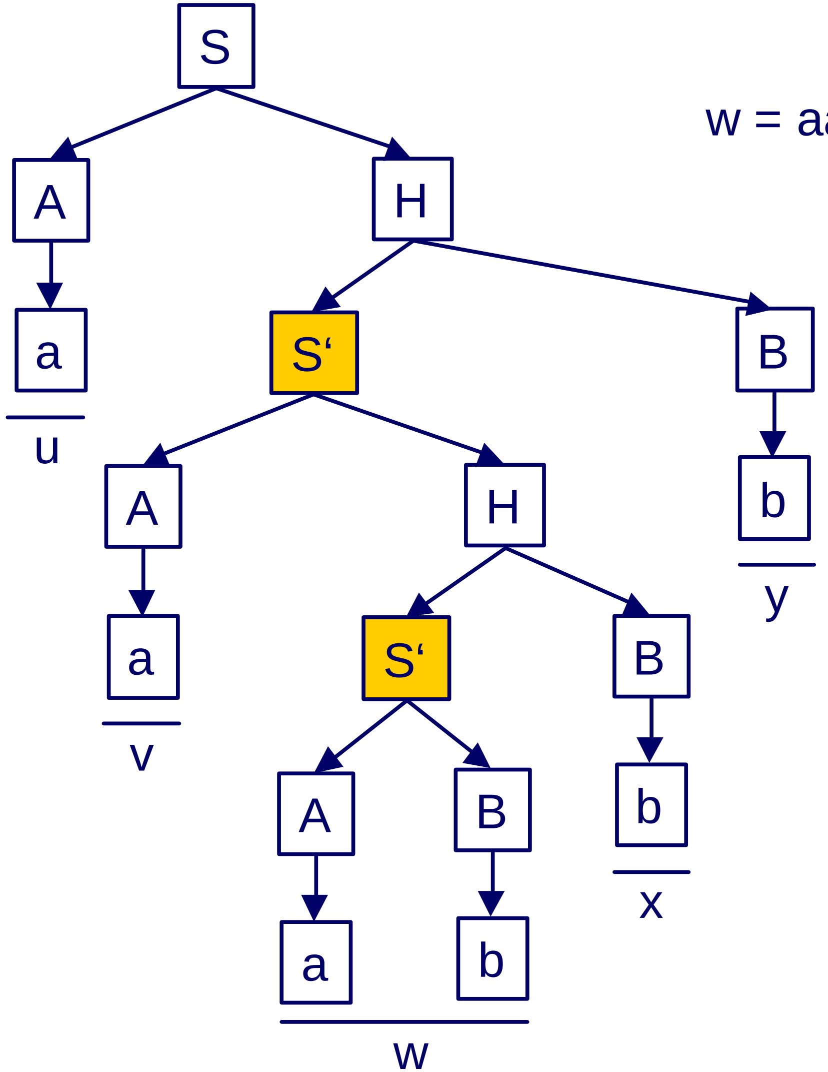


Beispiel 2

Σ = { a, b }
V = { S, A, B, H }
S

S → AH
S → AB
H → S‘B
A → a
B → b
S‘ → AH
S‘ → AB

w = aaabbb



Hintergrund

es sei G ist eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform, die k Variablen enthält

es sei $w \in L(G)$ mit $|w| = 2^k$

Dann gibt es im Ableitungsbaum von w einen Pfad der Länge k+1. In diesem Pfad muß eine Variable mehrfach vorkommen.

Kontextfreie Sprachen

es sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine unendliche Sprache

um nachzuweisen, daß L nicht kontextfrei ist, gehe wie folgt vor:

Schritt 1:

wähle zu jedem $n > 0$ ein $s_n \in L$ mit $|s_n| \geq n$ (/* geschickt */)

Schritt 2:

zeige für jedes $n > 0$ und alle u, v, w, x und y aus Σ^* mit:

$s_n = u \cdot v \cdot w \cdot x \cdot y$, $|v| + |x| \geq 1$ und $|v| + |w| + |x| \leq n$

daß für ein $k \geq 0$ gilt:

$u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y \notin L$

Kontextfreie Sprachen

Beispiel 1 $L = \{ a^z b^z a^z \mid z \geq 1 \}$

für jedes $n > 0$ sei $s_n = a^n b^n a^n$

es sei $n > 0$ beliebig, aber fest

wenn u, v, w, x und z aus Σ^* gleichzeitig (i), (ii) und (iii) erfüllen, so muß gelten:

Fall 1: $v \cdot x = a^r$ für ein r mit $0 < r \leq n$

also gilt für $k = 0$ entweder a) oder b):

a) $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^{n-r} b^n a^n \notin L$

b) $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^n b^n a^{n-r} \notin L$

Kontextfreie Sprachen

Beispiel 1 $L = \{ a^z b^z a^z \mid z \geq 1 \}$

für jedes $n > 0$ sei $s_n = a^n b^n a^n$

es sei $n > 0$ beliebig, aber fest

wenn u, v, w, x und z aus Σ^* gleichzeitig (i), (ii) und (iii) erfüllen, so muß gelten:

Fall 2: $v \cdot x = b^r$ für ein r mit $0 < r \leq n$

also gilt für $k = 0$:

- $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^n b^{n-r} a^n \notin L$

Kontextfreie Sprachen

Beispiel 1 $L = \{ a^z b^z a^z \mid z \geq 1 \}$

für jedes $n > 0$ sei $s_n = a^n b^n a^n$

es sei $n > 0$ beliebig, aber fest

wenn u, v, w, x und z aus Σ^* gleichzeitig (i), (ii) und (iii) erfüllen, so muß gelten:

Fall 3: $v \cdot x = a^r b^{r'}$ für ein r, r‘ mit $0 < r + r' \leq n$

also gilt für $k = 0$:

- $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^{n-r} b^{n-r'} a^n \notin L$

Kontextfreie Sprachen

Beispiel 1 $L = \{ a^z b^z a^z \mid z \geq 1 \}$

für jedes $n > 0$ sei $s_n = a^n b^n a^n$

es sei $n > 0$ beliebig, aber fest

wenn u, v, w, x und z aus Σ^* gleichzeitig (i), (ii) und (iii) erfüllen, so muß gelten:

Fall 4: $v \cdot x = b^r a^{r'}$ für ein r, r‘ mit $0 < r + r' \leq n$

also gilt für $k = 0$:

- $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^n b^{n-r} a^{n-r'} \notin L$

also ist L nicht kontextfrei !!!

Kontextfreie Sprachen

Beispiel 2 $L = \{ ww \mid w \in \{ a, b \}^* \}$

für jedes $n > 0$ sei $s_n = a^n b^n a^n b^n$

es sei $n > 0$ beliebig, aber fest

wenn u, v, w, x und z aus Σ^* gleichzeitig (i), (ii) und (iii) erfüllen, so muß gelten:

Fall 1: $v \cdot x = a^r$ für ein r mit $0 < r \leq n$

also gilt für $k = 0$ entweder a) oder b):

a) $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^{n-r} b^n a^n b^n \notin L$

b) $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^n b^n a^{n-r} b^n \notin L$

Kontextfreie Sprachen

Beispiel 2 $L = \{ ww \mid w \in \{ a, b \}^* \}$

für jedes $n > 0$ sei $s_n = a^n b^n a^n b^n$

es sei $n > 0$ beliebig, aber fest

wenn u, v, w, x und z aus Σ^* gleichzeitig (i), (ii) und (iii) erfüllen, so muß gelten:

Fall 2: $v \cdot x = b^r$ für ein r mit $0 < r \leq n$

also gilt für $k = 0$ entweder a) oder b):

a) $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^n b^{n-r} a^n b^n \notin L$

b) $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^n b^n a^n b^{n-r} \notin L$

Beispiel 2 $L = \{ ww \mid w \in \{ a, b \}^* \}$

für jedes $n > 0$ sei $s_n = a^n b^n a^n b^n$

es sei $n > 0$ beliebig, aber fest

wenn u, v, w, x und z aus Σ^* gleichzeitig (i), (ii) und (iii) erfüllen,
so muß gelten:

Fall 3: $v \cdot x = a^r b^{r'}$ für ein r, r' mit $0 < r + r' \leq n$

also gilt für $k = 0$ entweder a) oder b):

a) $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^{n-r} b^{n-r'} a^n b^n \notin L$

b) $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^n b^n a^{n-r} b^{n-r'} \notin L$

Beispiel 2 $L = \{ ww \mid w \in \{ a, b \}^* \}$

für jedes $n > 0$ sei $s_n = a^n b^n a^n b^n$

es sei $n > 0$ beliebig, aber fest

wenn u, v, w, x und z aus Σ^* gleichzeitig (i), (ii) und (iii) erfüllen, so muß gelten:

Fall 4: $v \cdot x = b^r a^{r'}$ für ein r, r‘ mit $0 < r + r' \leq n$

also gilt für $k = 0$:

- $u \cdot v^k \cdot w \cdot x^k \cdot y = u \cdot w \cdot y = a^n b^{n-r} a^{n-r'} b^n \notin L$

also ist L nicht kontextfrei !!!