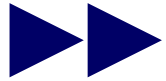


# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie

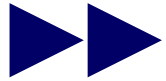


### *Gliederung der Vorlesung*

- 0. Grundbegriffe
- 1. Formale Sprachen/Automatentheorie
  - 1.1. Grammatiken
  - 1.2. Reguläre Sprachen**
  - 1.3. Kontext-freie Sprachen
- 2. Berechnungstheorie
  - 2.1. Berechenbarkeitsmodelle
  - 2.2. Die Churchsche These
  - 2.3. Unentscheidbarkeit
- 3. Komplexitätstheorie
  - 3.1. Nicht-deterministische Turing Maschinen
  - 3.2. Komplexitätsmaße
  - 3.3. Das P=NP? Problem

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Reguläre Sprachen*

Wie weit tragen die Beschreibungsmittel für reguläre Sprachen?

- jede endliche Sprache ist regulär
- es gibt unendliche Sprachen, die regulär sind
- es gibt unendliche Sprachen, die nicht regulär sind

Beispiele:

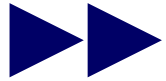
$$L = \{ 0^n 1^n \mid n > 1 \}$$

$$L' = \{ w \mid w \in \{ 0,1 \}^*, \#_0(w) = \#_1(w) \}$$

Hinweis:  $\#_0(w)$  und  $\#_1(w)$  bezeichnen, wie oft eine 0 bzw. eine 1 in  $w$  vorkommen

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Reguläre Sprachen*

**Was ist allen unendlichen regulären Sprachen gemein?**

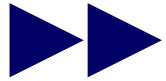
... um die Frage zu beantworten, muß man sich die zur Verfügung stehenden Beschreibungsmittel genauer ansehen

... die jeweils betrachteten Beschreibungsmittel haben Einfluß auf die Antworten und den Weg diese zu finden

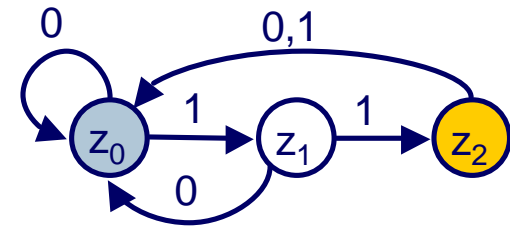
... wählen deterministische endliche Automaten

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### Reguläre Sprachen



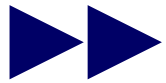
$L(A)$  ist eine unendliche Sprache, da ...

es sei  $s \in L(A)$  mit  $|s| \geq 3$

... dann muß der mit  $s$  markierte Weg durch den deterministischen endlichen Automaten  $A$  mindestens einen Knoten zweimal durchlaufen

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### Reguläre Sprachen

markierte Wege

akzeptierte Wörter

$z_0z_0z_1z_2$

011

$z_0z_0z_0z_1z_2$

0011

$z_0z_1z_0z_1z_2$

1011

$z_0z_0z_0z_0z_1z_2$

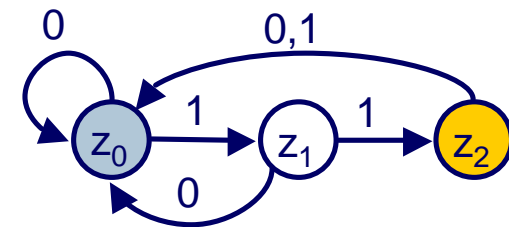
00011

$z_0z_0z_1z_0z_1z_2$

01011

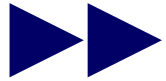
...

...



# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### Reguläre Sprachen

markierte Wege

$z_0 z_0 z_1 z_2$

$z_0 z_0 z_0 z_1 z_2$

$z_0 z_1 z_0 z_1 z_2$

$z_0 z_0 z_0 z_0 z_1 z_2$

$z_0 z_0 z_1 z_0 z_1 z_2$

...

akzeptierte Wörter

**011**

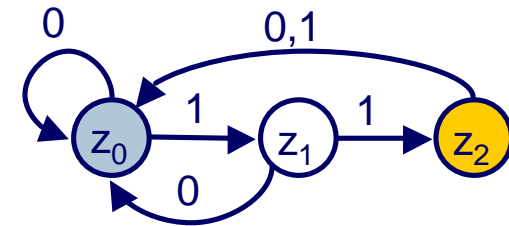
**0011**

1011

**00011**

01011

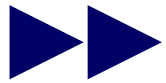
...



$$L' = \{ 011, 0011, 00011, \dots \}$$
$$= \{ v^n w \mid v = 0, w = 11, n > 0 \}$$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### Reguläre Sprachen

markierte Wege

$z_0 z_0 z_1 z_2$

$z_0 z_0 z_0 z_1 z_2$

$z_0 z_1 z_0 z_1 z_2$

$z_0 z_0 z_0 z_0 z_1 z_2$

$z_0 z_0 z_1 z_0 z_1 z_2$

...

akzeptierte Wörter

011

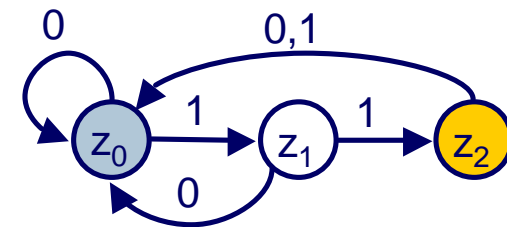
0011

1011

00011

01011

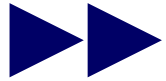
...



$$L' = \{ 1011, 101011, 10101011, \dots \}$$
$$= \{ v^n w \mid v = 10, w = 11, n > 0 \}$$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### Reguläre Sprachen

markierte Wege

$z_0 z_0 z_1 z_2$

$z_0 z_0 z_0 z_1 z_2$

$z_0 z_1 z_0 z_1 z_2$

$z_0 z_0 z_0 z_0 z_1 z_2$

$z_0 z_0 z_1 z_0 z_1 z_2$

..

akzeptierte Wörter

011

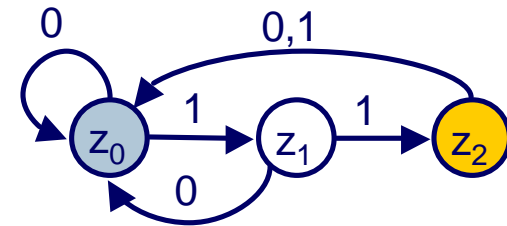
0011

1011

00011

**01011**

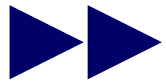
...



$$L' = \{ 01011, 001011, 0001011, \dots \}$$
$$= \{ v^n w \mid v = 0, w = 1011, n > 0 \}$$

# Theoretische Informatik

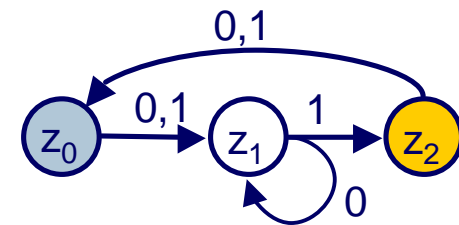
## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### Reguläre Sprachen

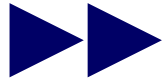
markierte Wege      akzeptierte Wörter

$z_0 z_1 z_1 z_2$	001
$z_0 z_1 z_1 z_2$	101
$z_0 z_1 z_1 z_1 z_2$	0001
$z_0 z_1 z_1 z_1 z_2$	1001
...	...
$z_0 z_1 z_2 z_0 z_1 z_2$	11011
...	...



# Theoretische Informatik

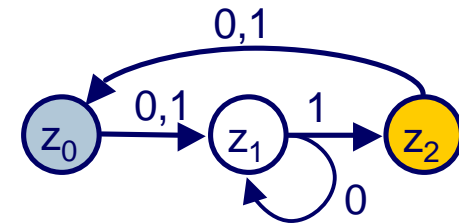
## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### Reguläre Sprachen

markierte Wege      akzeptierte Wörter

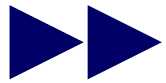
$z_0 z_1 z_1 z_2$	<b>001</b>
$z_0 z_1 z_1 z_2$	101
$z_0 z_1 z_1 z_1 z_2$	<b>0001</b>
$z_0 z_1 z_1 z_1 z_2$	1001
...	...
$z_0 z_1 z_2 z_0 z_1 z_2$	11011
...	...



$$L' = \{ 001, 0001, 00001, \dots \}$$
$$= \{ uv^n w \mid u = 0, v = 0, w = 1, n > 0 \}$$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### Reguläre Sprachen

markierte Wege

akzeptierte Wörter

$z_0 z_1 z_1 z_2$

001

$z_0 z_1 z_1 z_2$

101

$z_0 z_1 z_1 z_1 z_2$

0001

$z_0 z_1 z_1 z_1 z_2$

1001

...

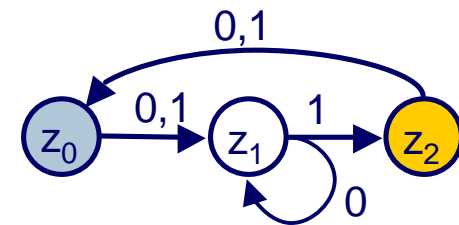
...

$z_0 z_1 z_2 z_0 z_1 z_2$

11011

...

...

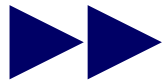


$$L' = \{ 101, 1001, 10001, \dots \}$$

$$= \{ uv^n w \mid u = 1, v = 0, w = 1, n > 0 \}$$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### Reguläre Sprachen

markierte Wege

akzeptierte Wörter

$z_0 z_1 z_1 z_2$

001

$z_0 z_1 z_1 z_2$

101

$z_0 z_1 z_1 z_1 z_2$

0001

$z_0 z_1 z_1 z_1 z_2$

1001

...

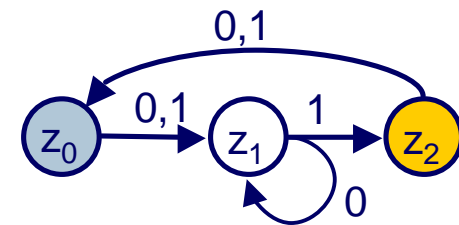
...

$z_0 z_1 z_2 z_0 z_1 z_2$

11011

...

...

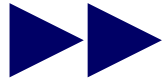


$$L' = \{ 11011, 11011011, 11011011011, \dots \}$$

$$= \{ v^n w \mid v = 110, w = 11, n > 0 \}$$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Reguläre Sprachen*

#### Zwischenfazit

es sei  $A$  ein DFA mit  $n$  Zuständen

es sei  $L(A)$  eine unendliche Sprache

es sei  $s$  ein Wort aus  $L(A)$  mit  $|s| \geq n$

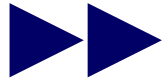
dann gibt es Wörter  $u$  und  $w$  und ein Wort  $v \neq \varepsilon$ , so daß gilt:

- $u \cdot v \cdot w = s$
- $u \cdot v^k \cdot w \in L(A)$  für alle  $k > 0$

... es gilt außerdem  $|u| + |v| \leq n$  und  $u \cdot w \in L(A)$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Reguläre Sprachen*

**allgemein**

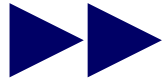
... was ist unendlichen regulären Sprachen  $L$  gemein

... es gibt ein DFA  $A = [Z, \Sigma, \delta, z_0, E]$  mit  $L(A) = L$

... es gibt ein  $n > 0$  mit  $\text{card}(Z) = n$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Reguläre Sprachen*

#### **Pumping-Lemma für reguläre Sprachen**

Es sei  $L \subseteq \Sigma^*$  eine unendliche Sprache.

Wenn  $L$  regulär ist, so gibt es eine Zahl  $n$ ,

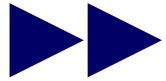
so daß für alle Wörter  $s \in L$  mit  $|s| \geq n$ , gilt:

es gibt Wörter  $u, v$  und  $w$  aus  $\Sigma^*$ , so daß gilt:

- (i)  $s = u \cdot v \cdot w$
- (ii)  $|v| \geq 1$
- (iii)  $|u| + |v| \leq n$
- (iv)  $u \cdot v^k \cdot w \in L$  für alle  $k \geq 0$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Reguläre Sprachen*

**Was kann man mit dem Pumping-Lemma anfangen?**

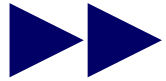
es sei  $L \subseteq \Sigma^*$  eine unendliche Sprache

- wenn  $L$  regulär ist, so gelten die Aussagen des Pumping-Lemma für  $L$
- wenn die Aussagen des Pumping-Lemma für  $L$  nicht gelten, so ist  $L$  nicht regulär

... das Pumping-Lemma kann demzufolge benutzt werden, um nachzuweisen, daß eine Sprache  $L$  nicht regulär ist

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Reguläre Sprachen*

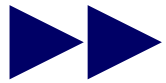
#### Was kann man mit dem Pumping-Lemma anfangen?

es sei  $L \subseteq \Sigma^*$  eine unendliche Sprache

- wenn  $L$  regulär ist, so gibt es ein  $n$ , so daß  
für alle  $s \in L$  mit  $|s| \geq n$  die im Pumping-Lemma formulierten Eigenschaften gelten
- wenn es kein  $n$  gibt, so daß  
für alle  $s \in L$  mit  $|s| \geq n$  die im Pumping-Lemma formulierten Eigenschaften gelten,  
so ist  $L$  nicht regulär

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



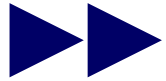
### *Reguläre Sprachen*

es sei  $L \subseteq \Sigma^*$  eine unendliche Sprache

- wenn es kein  $n$  gibt, so daß  
    für alle  $s \in L$  mit  $|s| \geq n$  die im Pumping-Lemma formulierten  
    Eigenschaften gelten,  
so ist  $L$  nicht regulär
- wenn es zu jedem  $n$   
    ein  $s \in L$  mit  $|s| \geq n$  gibt, so daß für  $s$  die im Pumping-  
    Lemma formulierten Eigenschaften nicht gelten,  
so ist  $L$  nicht regulär

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



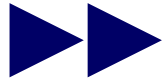
### Reguläre Sprachen

es sei  $L \subseteq \Sigma^*$  eine unendliche Sprache

- wenn es zu jedem  $n$   
ein  $s \in L$  mit  $|s| \geq n$  gibt, so daß für  $s$  die im Pumping-Lemma formulierten Eigenschaften nicht gelten,  
so ist  $L$  nicht regulär
- wenn es zu jedem  $n$   
ein  $s \in L$  mit  $|s| \geq n$  gibt, so daß für alle  $u, v$  und  $w$  aus  $\Sigma^*$   
nicht gleichzeitig die Bedingungen (i), (ii), (iii) und (iv) erfüllt sind,  
so ist  $L$  nicht regulär

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### Reguläre Sprachen

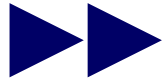
**Beispiel**  $L = \{ a^z b^z \mid z > 0 \}$

n	Kandidaten für s
0	ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, ...
1	ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, ...
2	ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, ...
3	aabb, aaabbb, aaaabbbb, ...
4	aabb, aaabbb, aaaabbbb, ...
...	...

geeignete Auswahl treffen ... zu n wählen wir hier das Wort  $s_n = a^n b^n$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### Reguläre Sprachen

**Beispiel**  $L = \{ a^z b^z \mid z > 0 \}$  (/\*  $n = 2$ ,  $s_n = aabb$  \*/)

nachweisen, daß alle  $u$ ,  $v$  und  $w$  aus  $\Sigma^*$  nicht gleichzeitig (i), (ii), (iii) und (iv) erfüllen können

... aber es gibt unendlich viele  $u$ ,  $v$  und  $w$  in  $\Sigma^*$

... aber es gibt nur endlich viele  $u$ ,  $v$ ,  $w$  in  $\Sigma^*$ , die gleichzeitig (i), (ii) und (iii) erfüllen

(i)  $s_n = u \cdot v \cdot w$

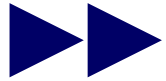
(ii)  $|v| \geq 1$

(iii)  $|u| + |v| \leq n$

(iv)  $u \cdot v^k \cdot w \in L$  für alle  $k \geq 0$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### Reguläre Sprachen

**Beispiel**  $L = \{ a^z b^z \mid z > 0 \}$  (/\*  $n = 2$ ,  $s_n = aabb$  \*/)

Idee: für die endlich vielen  $u$ ,  $v$  und  $w$  aus  $\Sigma^*$ , die gleichzeitig (i), (ii) und (iii) erfüllen, zeigen, daß sie nicht (iv) erfüllen

Beobachtung:  $u$ ,  $v$  und  $w$  aus  $\Sigma^*$  erfüllen (iv) nicht, falls gilt:  
es gibt ein  $k \geq 0$ , so daß gilt:  $u \cdot v^k \cdot w \notin L$

$$(i) \quad s_n = u \cdot v \cdot w$$

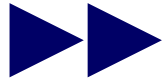
$$(ii) \quad |v| \geq 1$$

$$(iii) \quad |u| + |v| \leq n$$

$$(iv) \quad u \cdot v^k \cdot w \in L \text{ für alle } k \geq 0$$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### Reguläre Sprachen

**Beispiel**  $L = \{ a^z b^z \mid z > 0 \}$  ( $/^* n = 2, s_n = aabb ^*/$ )

wenn  $u, v, w$  aus  $\Sigma^*$  gleichzeitig (i), (ii) und (iii) erfüllen, liegt einer der folgenden Fälle vor

Fall 1:  $v = a$

→ für  $k = 0$  gilt:  $u \cdot v^k \cdot w = abb \notin L$

Fall 2:  $v = aa$

→ für  $k = 0$  gilt:  $u \cdot v^k \cdot w = bb \notin L$

(i)  $s_n = u \cdot v \cdot w$

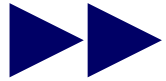
(ii)  $|v| \geq 1$

(iii)  $|u| + |v| \leq n$

(iv)  $u \cdot v^k \cdot w \in L$  für alle  $k \geq 0$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### Reguläre Sprachen

**Beispiel**  $L = \{ a^z b^z \mid z > 0 \}$  (/\* allgemein \*/)

für jedes  $n > 0$  sei  $s_n = a^n b^n$

es sei  $n$  beliebig, aber fest

wenn  $u$ ,  $v$  und  $w$  aus  $\Sigma^*$  gleichzeitig (i), (ii) und (iii) erfüllen,  
so muß gelten:

- $v = a^r$  für ein  $r$  mit  $0 < r \leq n$

also gilt für  $k = 0$ :

- $u \cdot v^k \cdot w = a^{n-r} b^n \notin L$

also ist  $L$  nicht regulär !!!

$$(i) \quad s_n = u \cdot v \cdot w$$

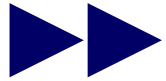
$$(ii) \quad |v| \geq 1$$

$$(iii) \quad |u| + |v| \leq n$$

$$(iv) \quad u \cdot v^k \cdot w \in L \text{ für alle } k \geq 0$$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Reguläre Sprachen*

es sei  $L \subseteq \Sigma^*$  eine unendliche Sprache

um nachzuweisen, daß  $L$  nicht regulär ist, gehe wie folgt vor:

Schritt 1:

wähle zu jedem  $n > 0$  ein  $s_n \in L$  mit  $|s_n| \geq n$  (/ \* geschickt \*/)

Schritt 2:

zeige für jedes  $n > 0$  und alle  $u, v$  und  $w$  aus  $\Sigma^*$  mit:

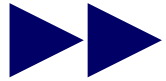
$$s_n = u \cdot v \cdot w, |v| \geq 1 \text{ und } |u| + |v| \leq n$$

daß für ein  $k \geq 0$  gilt:

$$u \cdot v^k \cdot w \notin L$$

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Reguläre Sprachen*

**Beispiel**  $L = \{ ww \mid w \in \{ a,b \}^* \}$

für jedes  $n > 0$  sei  $s_n = a^n b a^n b$

es sei  $n > 0$  beliebig, aber fest

wenn  $u$ ,  $v$  und  $w$  aus  $\Sigma^*$  gleichzeitig (i), (ii) und (iii) erfüllen,  
so muß gelten:

- $v = a^r$  für ein  $r$  mit  $0 < r \leq n$

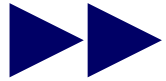
also gilt für  $k = 0$ :

- $u \cdot v^k \cdot w = a^{n-r} b a^n b \notin L$

also ist  $L$  nicht regulär !!!

# Theoretische Informatik

## Kap 1: Formale Sprachen/Automatentheorie



### *Reguläre Sprachen*

Begriffe:

- Chomsky-Grammatik, Ableitbarkeit
- reguläre Grammatik
- DFA, NFA

Sätze / Zusammenhänge:

- reguläre Grammatiken, DFA und NFA sind äquivalente Beschreibungsmittel für reguläre Sprachen
- Pumping-Lemma

Methoden / Techniken / Algorithmen:

- Übersetzung (/\* reguläre Grammatiken  $\leftrightarrow$  NFA  $\leftrightarrow$  DFA \*/) )
- Minimierungsalgorithmus
- Anwendung des Pumping-Lemma