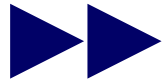


Theoretische Informatik

Kap 0: Grundbegriffe



Gliederung der Vorlesung

0. Grundbegriffe

- 1. Formale Sprachen/Automatentheorie
 - 1.1. Grammatiken
 - 1.2. Reguläre Sprachen
 - 1.3. Kontext-freie Sprachen

2. Berechnungstheorie

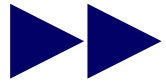
- 2.1. Berechenbarkeitsmodelle
- 2.2. Die Churchsche These
- 2.3. Unentscheidbarkeit

3. Komplexitätstheorie

- 3.1. Nicht-deterministische Turing Maschinen
- 3.2. Komplexitätsmaße
- 3.3. Das P=NP? Problem

Theoretische Informatik

Kap 0: Grundbegriffe



Alphabete, Zeichenketten, Sprachen

- Ein *Alphabet* Σ ist eine endliche Menge von Symbolen (bzw. Zeichen).

$$\Sigma = \{ a, b, c, \dots, z \}$$

$$\Sigma' = \{ A, B, C, \dots, Z \}$$

$$\Sigma'' = \{ 0, 1, \dots, 9 \}$$

...

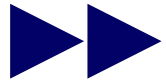
- Eine *Zeichenkette* ist eine endliche Folge von Symbolen.

anton, 123, ACHTUNG

besondere Zeichenkette: ε

Theoretische Informatik

Kap 0: Grundbegriffe



Alphabete, Zeichenketten, Sprachen

- Die *Länge* einer Zeichenkette u ist die Anzahl der Symbole von u .

$$|\text{Anton}| = 5$$

$$|121| = 3$$

$$|\varepsilon| = 0$$

- Das Ergebnis der *Konkatenation* von zwei Zeichenketten u und v ist die Zeichenkette, die entsteht, wenn v an u angehängt wird.

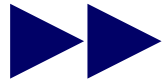
$$u = abc ; v = DEF \rightarrow uv = abcDEF$$

$$u' = aa ; v' = bb \rightarrow u'v' = aabb$$

$$u'' = aba ; v'' = \varepsilon \rightarrow u''v'' = v''u'' = u'' = aba$$

Theoretische Informatik

Kap 0: Grundbegriffe



Alphabete, Zeichenketten, Sprachen

es sei $\Sigma = \{ a, b \}$

$$\Sigma^0 = \{ \varepsilon \}$$

$$\Sigma^1 = \{ a, b \}$$

$$\Sigma^2 = \{ aa, ab, ba, bb \}$$

$$\Sigma^3 = \{ aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb \}$$

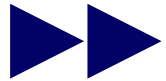
...

$$\Sigma^* = \{ \varepsilon, a, b, aa, \dots, bb, aaa, \dots, bbb, aaaa, \dots, bbbb, \dots \}$$

Σ^* ist die Menge aller Zeichenketten über dem Alphabet Σ

Theoretische Informatik

Kap 0: Grundbegriffe



Alphabete, Zeichenketten, Sprachen

... ein wenig formaler

es sei Σ das zugrunde liegende Alphabet

$$\Sigma^0 = \{ \varepsilon \}$$

$$\Sigma^1 = \Sigma$$

$$\Sigma^{n+1} = \{ wa \mid w \in \Sigma^n, a \in \Sigma \}$$

(/* Zeichenketten der Länge 0 */)

(/* Zeichenketten der Länge 1 */)

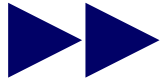
(/* Zeichenketten der Länge n+1 */)

$$\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \dots$$

(/* alle Zeichenketten über Σ */)

Theoretische Informatik

Kap 0: Grundbegriffe



Alphabete, Zeichenketten, Sprachen

- Jedes Anfangsstück einer Zeichenkette u heißt *Präfix* von u .

$u = \text{anton} \rightarrow \varepsilon, a, an, ant, anto, anton$

$u' = 121 \rightarrow \varepsilon, 1, 12, 121$

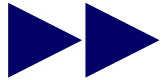
- Jedes Endstück einer Zeichenkette u heißt *Suffix* von u .

$u = \text{anton} \rightarrow \varepsilon, n, on, ton, nton, anton$

$u' = 121 \rightarrow \varepsilon, 1, 21, 121$

Theoretische Informatik

Kap 0: Grundbegriffe



Alphabete, Zeichenketten, Sprachen

... ein wenig formaler

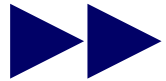
es sei Σ das zugrunde liegende Alphabet
es sei u ein Wort in Σ^*

Ein Wort $p \in \Sigma^*$ ist ein Präfix von u
gdw.
es gibt ein Wort $w \in \Sigma^*$, so daß gilt: $pw = u$.

Ein Wort $s \in \Sigma^*$ ist ein Suffix von u
gdw.
es gibt ein Wort $w \in \Sigma^*$, so daß gilt: $ws = u$.

Theoretische Informatik

Kap 0: Grundbegriffe



Mengen, Relationen

- Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von Elementen.

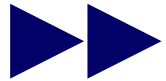
$$M = \{ n \mid n \in \text{Nat und } n \bmod 2 = 0 \}$$

$$M' = \{ v111 \mid v \in \{ 0,1 \}^* \}$$

- Beziehungen zwischen Mengen (Teilmenge, Obermenge)
 - $A \subseteq B$ bedeutet:
jedes Element von A ist auch ein Element von B
 - $A \supseteq B$ bedeutet:
jedes Element von B ist auch ein Element von A

Theoretische Informatik

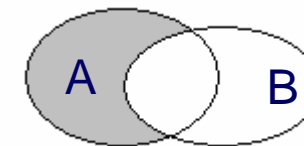
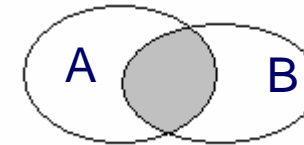
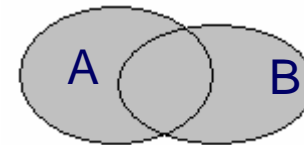
Kap 0: Grundbegriffe



Mengen, Relationen

- Operationen mit Mengen (/ * Vereinigung, Durchschnitt, Differenz, Potenzmengenbildung */)

- $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ oder } x \in B \}$
- $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ und } x \in B \}$
- $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ und } x \notin B \}$
- $2^A = \{ M \mid M \subseteq A \}$

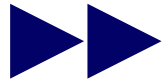


- einfache Zusammenhänge

- $A \subseteq (A \cup B), B \subseteq (A \cup B)$
- $(A \cap B) \subseteq A, (A \cap B) \subseteq B$
- $(A \setminus B) \subseteq A$
- $\{ \} \in 2^A, A \in 2^A$

Theoretische Informatik

Kap 0: Grundbegriffe



Mengen, Relationen

$$A = \{ a, b, c \}$$

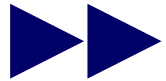
$$\rightarrow 2^A = \{ \{ \}, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a, b, c \} \}$$

$$A = \{ 0, 1, 2, \dots \}$$

$\rightarrow 2^A =$ Menge aller Teilmengen von A
u.a. die leere Menge, die Menge aller geraden Zahlen, ...

Theoretische Informatik

Kap 0: Grundbegriffe



Mengen, Relationen

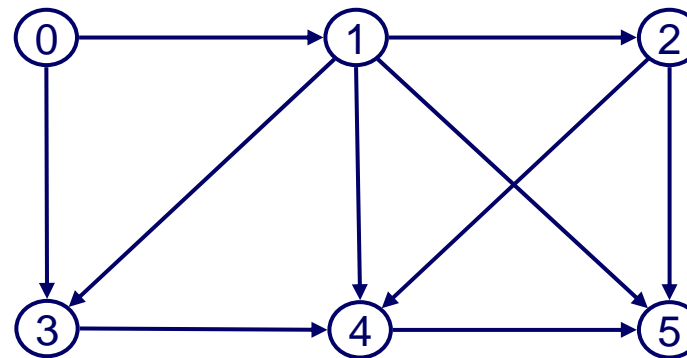
- Eine *binäre Relation* R über A und B ist eine Menge von geordneten Paaren, d.h. $R \subseteq \{ (a,b) \mid a \in A \text{ und } b \in B \}$.

alternative Schreibweise: aRb

Spezialfall: $A = B \rightarrow$ Relation auf A

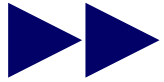
$A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$

$R = \{ (0,1), (0,3),$
 $(1,2), (1,3), (1,4), (1,5),$
 $(2,4), (2,5),$
 $(3,4),$
 $(4,5) \}$



Theoretische Informatik

Kap 0: Grundbegriffe



Mengen, Relationen

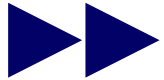
- Eigenschaften von Relationen

es sei R eine Relation auf A

- R ist *reflexiv*, falls für alle $a \in A$ gilt:
 $(a,a) \in R$
- R ist *symmetrisch*, falls für alle $a,b \in A$ gilt:
wenn $(a,b) \in R$, so $(b,a) \in R$
- R ist *transitiv*, falls für alle $a,b,c \in A$ gilt:
wenn $(a,b) \in R$ und $(b,c) \in R$, so auch $(a,c) \in R$

Theoretische Informatik

Kap 0: Grundbegriffe



Mengen, Relationen

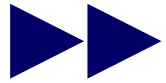
- Hüllen von Relationen

es sei R eine Relation auf A

- Die *transitive Hülle* von R (bezeichnet mit R^+) ist die kleinste Relation mit folgenden Eigenschaften:
 - wenn $(a,b) \in R$, so $(a,b) \in R^+$
 - wenn $(a,b) \in R^+$ und $(b,c) \in R^+$, so $(a,c) \in R^+$
- Die *reflexive, transitive Hülle* von R (bezeichnet mit R^*) ist die wie folgt definierte Relation: $R^* = R^+ \cup \{ (a,a) \mid a \in A \}$

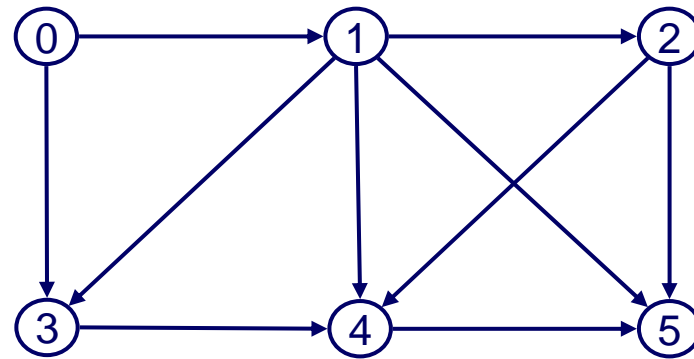
Theoretische Informatik

Kap 0: Grundbegriffe



Mengen, Relationen

$A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$
 $R = \{ (0,1), (0,3),$
 $(1,2), (1,3), (1,4), (1,5),$
 $(2,4), (2,5),$
 $(3,4),$
 $(4,5) \}$



$A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$
 $R^+ = \{ (0,1), (0,3), (0,2), (0,4), (0,5),$
 $(1,2), (1,3), (1,4), (1,5),$
 $(2,4), (2,5),$
 $(3,4), (3,5),$
 $(4,5) \}$

