Lineare Algebra II für Informatiker, 2. Semester

Übungsaufgaben, Serie 6, Wiederholung

1. Gegeben sei ein Ellipsoid durch

$$x' \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} x \leq 1.$$

Bestimmen Sie die Längen a, b, c der Hauptachsen, ihre Richtungen x_1, x_2, x_3 (als Punkte auf der Oberfläche der Einheitskugel) sowie das Volumen V des Ellipsoids.

2. a) Gegeben sei eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ im kartesischen Korrdinatensystem durch $\varphi(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine zu φ gehörende lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ der Form $\psi(y) = \Lambda y$, für die die Matrix Λ Diagonalgestalt hat.

b) Geben Sie die Basisvektoren von ψ an.

3. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung der LU-Zerlegung der Koeffizientenmatrix A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} der Matrix A unter Verwendung der LU-Zerlegung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Determinante von A.

5. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 6 & -15 & 3 \\ 12 & -18 & -6 \\ 6 & -7 & -11 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung der Faktorisierung der Koeffizientenmatrix A der Form $PA = LU$ mit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 12 & -18 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

6. a) Gegeben sei das überbestimmte lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Vektor x so, dass $|Ax - b|$ minimal ist. Verwenden Sie die Singulärwertzerlegung (SVD) der Koeffizientenmatrix A.

b) Bestimmen Sie den Wert $|Ax - b|$.

7. a) Gegeben sei das überbestimmte lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Vektor x so, dass $|Ax - b|$ minimal ist. Verwenden Sie die Singulärwertzerlegung (SVD) der Koeffizientenmatrix A.

b) Bestimmen Sie den Wert $|Ax - b|$.

8. Lösen Sie die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} z(x) &= x_1 + 2x_2 - 6 \longrightarrow \max \\ x_1 + 4x_2 &\leq 36 \\ x_1 + x2 &\leq 14 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 36 \end{aligned}$$

mit $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ mit Hilfe des Simplex-Algorithmus.

9. Gegeben sei die Adjazenzmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeichnen Sie einen planaren Graphen mit der Adjazenzmatrix A.

b) Bestimme mit Hilfe von A die Koordination, d. h. die mittlere Anzahl der Kanten pro Knoten.

10. Gegeben sei die Adjazenzmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass der entsprechende gerichtete Graph azyklisch ist.