Lineare Algebra II für Informatiker, 2. Semester

Übungsaufgaben, Serie 3

1. Führen Sie eine LU-Zerlegung der Matrix A gemäß $A = LU$ (ohne Pivotisierung) durch:

$$\text{a)}\quad A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b)}\quad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c)}\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -6 & -3 & -1 & 4 \\ -3 & -3 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & -1 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \end{array},$$

indem Sie zuvor eine LU-Zerlegung der Koeffizientenmatrix A durchführen (ohne Pivotisierung).

3. Bestimmen Sie die Lösungen der linearen Gleichungssysteme

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} 10^{-20} & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 10^{20} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{20} \end{pmatrix}$$

mit und ohne Pivotisierung. Verwenden Sie bei der Rechnung eine Mantisse mit 16 Dezimalstellen.

c) Verwenden Sie zur Lösung von b) zusätzlich eine Zeilenequilibrierung.

4. Gegeben sei die LU-Zerlegung eine Matrix A durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & 6 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Determinante von A.

b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -13 \\ -31 \end{pmatrix}.$$

5. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array}.$$

Nutzen Sie dabei aus, dass die Faktorisierung der Koeffizientenmatrix A gemäß $PA = LU$ mit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

6. Lösen Sie das das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

indem Sie zunächst die Koeffizientenmatrix A gemäß $PA = LU$ faktorisieren., d. h. bestimmen Sie zuerst die Matrizen P, L, U, und berechnen Sie dann x.

7. Berechnen Sie den linearen Zusammenhang zwischen der Arbeitslosigkeit und dem Fernsehkonsum auf der Grundlage der in Tabelle 1 gegebenen Daten. Verwenden Sie dabei den linearen Absatz $y = a + bx$, wobei Sie die Arbeitslosigkeit als x-Wert und den Fernsehkonsum als y-Wert interpretieren.

i	Bundesland	Arbeitslosigkeit x_i [%]	Fernsehkonsum y_i [min/Tag]
1	Schleswig-Holstein	9,8	191
2	Mecklemburg-Vorpommern	20,5	236
3	Hamburg	9,7	218
4	Bremen	13,3	238
5	Berlin	17,6	237
6	Niedersachsen	9,6	198
7	Sachsen-Anhalt	20,3	275
8	Brandenburg	18,7	232
9	Nordrhein-Westfalen	10,2	221
10	Thüringen	16,7	223
11	Sachsen	17,8	232
12	Hessen	8,2	204
13	Rheinland-Pfalz	7,7	192
14	Saarland	9,2	224
15	Bayern	6,9	180
16	Baden-Würtemberg	6,2	198

Tabelle 1: Arbeitslosenquoten (Jahresdurchschnitt 2004) und tägliche Fernsehdauer (2004) in den Bundesländern, veröffentlicht in der FAZ am 20. Januar 2005.

a) Berechnen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ als Vektor des Normalgleichungssystems $A'Ax = A'y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{16} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{16} \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Singulärwerte und die Kondition der Matrix A.