

# Lineare Algebra II für Informatiker, 2. Semester

## Übungsaufgaben, Serie 2

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte und ein maximales System linear unabhängiger Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

a)  $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ , b)  $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ , c)  $\begin{pmatrix} 2+i & \sqrt{5}+2i \\ -\sqrt{5}+2i & 2+i \end{pmatrix}$ , d)  $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & -i \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

2. Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal?

a)  $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , b)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ , c)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$   
d)  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ , e)  $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 2 & \sqrt{5} \\ 3 & \sqrt{5} & -3 \\ \sqrt{5} & -3 & 2 \end{pmatrix}$ , f)  $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ ,

3. Für welche Werte  $\vartheta, \varphi \in [0, 2\pi)$  sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

orthogonal?

4. Bestimmen Sie die Menge aller  $(2, 2)$ -Matrizen, die sowohl orthogonal als auch symmetrisch sind.

5. Welche der folgenden Matrizen sind positiv definit bzw. positiv semidefinit?

a)  $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , b)  $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ , c)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , d)  $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  
e)  $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ , f)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ , g)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

6. Gegeben sei eine beliebige  $(2, 2)$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

mit (beliebigen) reellwertigen Koeffizienten,  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass die Matrix  $A'A$  positiv semidefinit ist.

7. Bestimmen Sie die Längen und Richtungen (d. h. die Winkel) der Halbachsen der durch die Ungleichungen

a)  $x' \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x \leq 1$ , b)  $x' \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x \leq 2$

beschriebenen Ellipsen. Berechnen Sie die Ellipsenflächen.

8. Bestimmen Sie die Längen und Richtungen (d. h. die Richtungsvektoren) der Halbachsen des durch die Ungleichung

$$x' \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} x \leq 1$$

beschriebenen Ellipsoids. Berechnen Sie das Volumen des Ellipsoids.

9. Gegeben sei eine Matrix  $A$  durch

$$A = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

mit  $\vartheta \in [0, 2\pi)$  und  $s, t > 0$ ,  $s \neq t$ . Bestimmen Sie die Längen und die Richtungen der Halbachsen der Ellipse

$$E = \{x \in \mathbb{R}^2 : x' A' A x \leq 1\}.$$

10. Bestimmen Sie die Hauptrichtung der in Abbildung 1 dargestellten Zusammenhangskomponente (Objekt) eines Binärbildes.

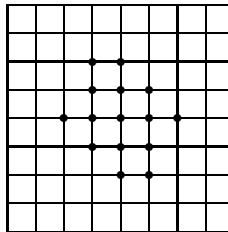


Abbildung 1: Binärbild mit einer Zusammenhangskomponente (Objekt, Bildvordergrund).

11. Berechnen Sie für die Daten in Tabelle 1 den Winkel zwischen der x-Achse und der Richtung des zum Eigenwert gehörenden Eigenvektors. Interpretieren Sie dabei den Fernsehkonsum als x-Wert und die Arbeitslosigkeit als y-Wert.

Bundesland	Arbeitslosigkeit [%]	Fernsehkonsum [min/Tag]
Schleswig-Holstein	9,8	191
Mecklenburg-Vorpommern	20,5	236
Hamburg	9,7	218
Bremen	13,3	238
Berlin	17,6	237
Niedersachsen	9,6	198
Sachsen-Anhalt	20,3	275
Brandenburg	18,7	232
Nordrhein-Westfalen	10,2	221
Thüringen	16,7	223
Sachsen	17,8	232
Hessen	8,2	204
Rheinland-Pfalz	7,7	192
Saarland	9,2	224
Bayern	6,9	180
Baden-Württemberg	6,2	198

Tabelle 1: Arbeitslosenquoten (Jahresdurchschnitt 2004) und tägliche Fernsehdauer (2004) in den Bundesländern, veröffentlicht in der FAZ am 20. Januar 2005.