

Lineare Algebra II für Informatiker, 2. Semester

Übungsaufgaben, Serie 1

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Geben Sie die Eigenvektoren in normierter Form an.

3. Bestimmen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Für welche Werte $\varphi \in \mathbb{R}$ sind die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

reellwertig?

5. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bildet der Ausdruck $x'A'Ax$ eine quadratische Form? Ist die Menge

$$E = \{x \in \mathbb{R}^2 : x'A'Ax \leq 1\}$$

eine Ellipse?