Lineare Algrabra I für Informatiker

Joachim Ohser

11. November 2004

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

Kapitel 2

Komplexe Zahlen

Kapitel 3

Vektorrechnung

Kapitel 4

Matrizen und lineare Gleichungssysteme

4.1 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Definition.

(i) Es seien $x_1, \ldots, x_m$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ reelle Zahlen. Dann heißt die Summe

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k$$

Linearkombination der Vektoren $x_1, \ldots, x_m$.

(ii) Die Vektoren $x_1, \ldots x_m$ heißen *linear unabhängig*, wenn

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

Andernfalls heißen die Vektoren *linear abhängig*.

Beispiele.

(i) Es seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt aus

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

unmittelbar

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 0,$$

d. h., die Vektoren x_1 und x_2 sind linear unabhängig. Jeder weitere Vektor $x_3 \in \mathbb{R}^2$ lässt sich als Linearkombination von x_1 und x_2 darstellen, z. B.

$$x_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 5x_1 - 3x_2.$$

Die drei Vektorn x_1, x_2, x_3 sind jedoch linear abhängig. Das folgt unmittelbar aus

$$5x_1 - 3x_2 - x_3 = 0.$$

(ii) Aus den gleichen Gründen wie in Beispiel (i) sind die Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig.

(iii) Gegeben seien die Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$$

d. h.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist ein lineares Gleichungssystem für die Variablen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, das auch in der Form

$$\begin{array}{rrrcl} \lambda_1 & +3\lambda_2 & & = & 0 \\ 2\lambda_1 & +4\lambda_2 & +2\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_2 & +5\lambda_2 & +4\lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

geschrieben werden kann. Eine Lösung (von unendlich vielen möglichen Lösungen) ist

$$\lambda_1 = -3, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 1.$$

Durch Umformen der Gleichung $-3x_1 + x_2 + x_3 = 0$ erhält man beispielsweise $x_2 = 3x_1 - x_3$, d. h., der Vektor x_2 ist Linearkombination der beiden Vektoren x_1 und x_3.

Allgemein gilt:

(i) Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ und $x_1, x_2 \neq 0$. Die beiden Vektoren x_1, x_2 sind linear unabhängig genau dann, wenn x_1 und x_2 nicht parallel sind.

(ii) Seien $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$ und $x_1, x_2, x_3 \neq 0$. Die Vektoren x_1, x_2, x_3 sind linear unabhängig genau dann, wenn sie nicht in einer Ebene liegen.

(iii) Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren im $\mathbb{R}^n$ ist n.

(iv) Ein System von Vektoren, welches den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.

(v) In einem System linear abhängiger Vektoren lässt sich mindestens ein Vektor als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen.

4.2 Matrizen

Definition. Ein rechteckiges Schema von $m \cdot n$ reellen Zahlen $a_{ik} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$, der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt *Matrix* vom Typ (m, n) oder kurz (m, n)-Matrix. Dabei ist m die Anzahl der Zeilen, n die Anzahl der Spalten, i der Zeilenindex und j der Spaltenindex. Die reellen Zahlen a_{ik} heißen *Elemente* oder (im Kontext linearer Gleichungssysteme) *Koeffizienten* der Matrix A.

Abkürzend wird auch die Schreibweise $A = (a_{ik})_{mn}$ oder $A = (a_{ik})$ verwendet. Um Missverständnisse zu vermeiden, werden die Indizes manchmal durch Komma getrennt, $A = (a_{i,k})$.

Bemerkungen

(i) Eine Matrix vom Typ $(1, n)$ ist ein Zeilenvektor der Länge n, eine Matrix vom Typ $(m, 1)$ ist ein Spaltenvektor der Länge m.

(ii) Eine Matrix, die nur Nullen enthält, heißt *Nullmatrix*.

(iii) Eine Matrix vom Typ (n, n) heißt *quadratisch*. Die Elemente $a_{11}, \dots, a_{nn}$ bilden die Hauptdiagonale der quadratischen Matrix A. Eine Matrix heißt *Diagonalmatrix*, wenn nur die Elemente der Hauptdiagonalen verschieden von Null sind, wenn

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(iv) Eine quadratische Matrix mit $a_{ik} = 1$ für $i = k$ und $a_{ik} = 0$ für $i \neq k$ heißt *Einheitsmatrix* und wird mit I bezeichnet,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

(v) Eine quadratische Matrix heißt *symmetrisch*, wenn $a_{ik} = a_{ki}$ für $i, k = 1, \ldots, n$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(vi) Die quadratischen Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

heißen *obere* bzw. *untere Dreicksmatrix.* Die Elemente unter- bzw. oberhalb der Hauptdiagonalen sind gleich Null.

(vii) Zwei Matizen $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ sind gleich, wenn sie vom gleichen Typ sind und ihre Elemente übereinstimmen,

$$a_{ik} = b_{ik}, \qquad i = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, n.$$

(viii) Eine Untermatrix der Matrix A erhält man durch „Streichen“ einer Zeile und einer Spalte. Die ik-te Untermatrix A_{ik} von A ist definiert durch

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{m,k-1} & a_{m,k+1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Elementare Operationen für Matrizen

(i) *Transponieren.* Die *transponierte Matrix* A' einer (m, n)-Matrix A erhält man durch Vertauschen ihre Zeilen mit ihren Spalten,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Die transponierte Matrix ist also vom Typ (n, m).

Eine quadratische Matrix A ist symmetrisch, genau dann wenn $A = A'$

(ii) *Multiplikation mit einem Skalar.* Für jede Zahl $c\mathbb{R}$ gilt

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & \dots & ca_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ca_{m1} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix},$$

d. h. A wird elementweise mit c multipliziert. Es gilt $cA = Ac$.

(iii) *Addition.* Zwei Matrizen $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ können addiert werden, wenn sie vom gleichen Typ sind. Es gilt

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Außerdem gelten die einfachen Rechenregeln

$$\begin{aligned} A + B &= B + A \\ (A + B) + C &= A + (B + C) \\ (A + B)' &= A' + B' \\ c(A + B) &= cA + cB, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(iv) *Subtraktion.* Zwei Matrizen $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ können voneinander subtrahiert werden, wenn sie vom gleichen Typ sind. Es gilt

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}.$$

(v) *Multiplikation.* Zwei Matrizen $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ vom Typ (m_1, n_1) bzw. (m_2, n_2) können multipliziert werden, wenn $n_1 = m_2$, d. h., die Anzahl n_1 der Spalten der Matrix A muss gleich der Anzahl m_2 der Zeilen der Matrix B sein. Es gilt $A \cdot B = C$, wobei $C = (c_{ik})$ eine Matrix vom Typ (m_1, n_2) mit den Elementen

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} \cdot b_{jk}, \qquad i = 1, \dots, m_1,\ k = 1, \dots, n_2,$$

d. h., c_{ik} ist das Skalarprodukt zweier Vektoren – des i-ten Zeilenvektors der Matrix A und des j-ten Spaltenvektors der Matrix B. Es gelten die Regeln

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= AB + AC \\ A \cdot (B \cdot C) &= (A \cdot B) \cdot C \\ (A \cdot B)' &= B' \cdot A'. \end{aligned}$$

Beispiele

(i) Gegeben seien zwei Matrizen A und B vom Typ $(4,2)$ bzw. $(2,3)$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 10 \\ -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ihr Produkt $C = A \cdot B$ ist vom Typ $(4,3)$, und es gilt

$$C = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + (-4)\cdot 0 & 2\cdot(-7) + (-4)\cdot 3 & 2\cdot 2 + (-4)\cdot(-1) \\ 1\cdot 1 + 10\cdot 0 & 1\cdot(-7) + 10\cdot 3 & 1\cdot 2 + 10\cdot(-1) \\ -3\cdot 1 + 0\cdot 0 & -3\cdot(-7) + 0\cdot 3 & -3\cdot 2 + 0\cdot(-1) \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot(-7) + 1\cdot 3 & 1\cdot 2 + 1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -26 & 8 \\ 1 & 23 & -8 \\ -3 & 21 & -6 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hilfreich für die Ausführung einer Multiplikation ist das *Falksche Schema*,

$$\begin{array}{rr|rrr} & & 1 & -7 & 2 \\ & & 0 & 3 & -1 \\ \hline 2 & -4 & 2 & -26 & 8 \\ 1 & 10 & 1 & 23 & -8 \\ -3 & 0 & -3 & 21 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \end{array}$$

in dem die bei der Matrixmultiplikation zu berechnenten Skalarprodukte übersichtlich dargestellt sind.

(ii) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

ist ein linearer Operator, der eine Drehung eines ebenen Koordinatensystems um den Winkel φ bewirkt. Das Zentrum der Drehung ist der Koordinatenursprung. Sind u_1 und u_2 die Basisvektoren des Ausgangssystems, dann sind $v_1 = Ax_1$ und $v_2 = Ax_2$ die Basisvektoren des neuen Koordinatensystems. Die Matrix A ist abhängig von derm Winkel φ, $A = A_\varphi$. Eine Drehung eines Vektors x relativ zum Koordinatensystem mit den Basisvektoren v_1 und v_2 erfolgt durch die transponierte Matrix A', siehe Beispiel (iii) auf Seite 25.

Gegeben sei ein Polygon mit den Eckpunkten

$$P_1 = (4,4), \quad P_2 = (0,5), \quad P_3 = (-4,5), \quad P_4 = (-3,-4), \quad P_5 = (4,-3),$$

siehe Abbildung 4.1a. Zu berechnen sind die Koordinaten der Eckpunkte nach einer Drehung des Polygons um den Winkel $\varphi_1 = \frac{\pi}{3} = 60°$ bzw. $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} = 90°$.

Es gilt

$$A_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fasst mann die zu den Punkten $P_1, \ldots, P_5$ gehörigen Vektorn zu einer Matrix B zusammen,

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & 5 & -4 & -3 \end{pmatrix},$$

dann ergibt sich

$$\begin{aligned} A'_{\varphi_1} \cdot B &= \begin{pmatrix} 2-2\sqrt{3} & -\frac{5\sqrt{3}}{2} & -2-\frac{5\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2}+2\sqrt{3} & 2+\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 2\sqrt{3}+2 & \frac{5}{2} & -2\sqrt{3}+\frac{5}{2} & -\frac{3\sqrt{3}}{2}-2 & 2\sqrt{3}-\frac{3}{2} \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} -1,46 & -4,33 & -6,33 & 1,96 & 4,60 \\ 5,46 & 2,50 & -0,96 & -4,60 & 1,96 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bzw.

$$A'_{\varphi_2} \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -5 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & -4 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

woraus sich die Koordinaten der Eckpunkte der beiden gedrehten Polygone direkt ablesen lassen. Die Fünfecke $A'_{\varphi_1} \cdot B$ und $A'_{\varphi_2} \cdot B$ sind in den Abbildungen 4.1d bzw. 4.1f dargestellt.

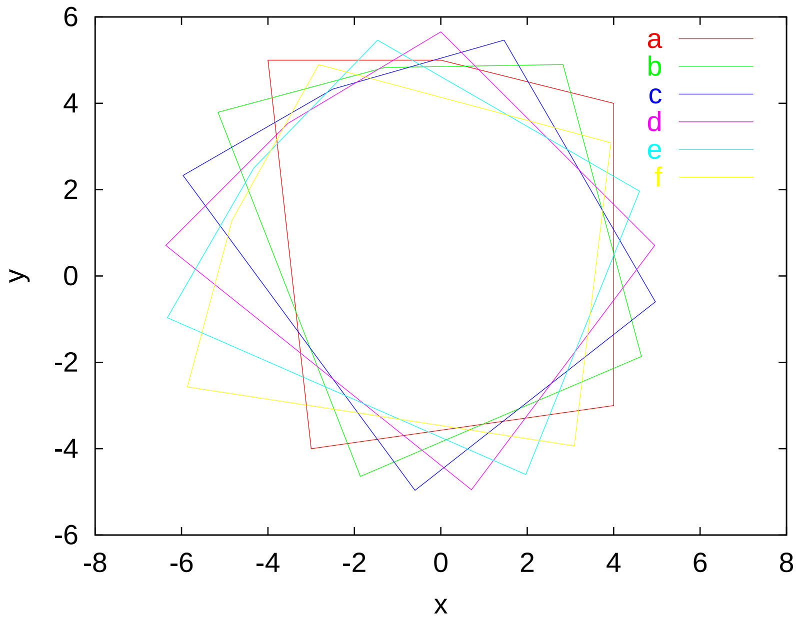

Abbildung 4.1: (a) ein Fünfeck und (b)...(f) seine Drehumgen um die Winkel $\varphi = \frac{1\cdot\pi}{12}, \ldots, \frac{6\cdot\pi}{12}$.

(iii) Eine Drehung des kartesischen Koordinatensystems im dreidimensionalen Raum um die *Euler-Winkel* ϕ, ϑ, φ entspricht einer nacheinander Ausführung einer Drehund um die z-Achse, um die x-Achse und noch einmal um die z-Achse. Die entsprechende lineare Transformation A ist übersichtlich als Produkt von drei Matrizen darstellbar,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

wobei bei einer Ausführung einer Multiplikation Ax der Matrix A mit einem Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ die Drehung um den Winkel $-\phi$ zuerst ausgeführt wird, anschließend um $-\vartheta$ und schließlich um $-\varphi$.

4.3 Rang und Determinante

Der Rang und die Determinante sind Operatoren, die einer Matrix eine nicht negative ganze Zahl bzw. eine reelle Zahl zuordnen. Während der Rang für alle Rechteckmatrizen erkärt ist, ist die Determinante nur für quadratische Matrizen definiert.

4.3.1 Der Rang einer Matrix

Zur Einführung des Ranges einer Matrix werden die Zeilen bzw. Spalten einer Matrix als Vektoren auf. Dann gilt die folgende Aussage:

Satz. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen einer Matrix A ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Spalten von A.

Definition. Der *Rang* $\mathrm{rg}\,(A)$ einer Matrix A ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren.

Bemerkungen

(i) Der Rang einer Matrix ist sowohl für quadratische Matrizen als auch für Rechteckmatrizen erklärt.

(ii) Für eine (m, n)-Matrix A gilt $\mathrm{rg}\, A \leq \min\{m, n\}$ und $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, A'$.

(iii) Der Rang der Nullmatrix ist gleich Null.

Beispiel

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ihr Rang ist 4, $\mathrm{rg}\, A = 4$, denn das homogene Gleichungssystem

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat genau eine Lösung für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, nämlich die Triviallösung

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

An einer Dreiecksmatrix lässt sich der Rang leicht ablesen. Daraus leitet sich unmittelbar ein Verfahren zur Bestimmung des Rangs einer Matrix ab.

Das Gauß-Verfahren zur Bestimmung des Rangs einer Matrix

Das Ziel des *Gauß-Verfahrens* ist die Transformation einer gegebenen Matrix A in eine Matrix B mit Dreiecksgestalt, wobei nur solche Umformungen verwendet werden, die den Rang nicht ändern, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$.

Rangerhaltende Umformungen sind

(i) das Vertauschen von zwei Zeilen oder zwei Spalten,

(ii) die Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit einer von Null verschiedenen Konstanten und

(iii) die Addition oder Subtraktion einer Zeile oder Spalte zu einer anderen Zeile bzw. Spalte.

Allgemein gilt

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \dots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \dots & & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ 0 & & & \dots & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & & & \dots & & 0 \end{pmatrix} = k,$$

falls die Elemente $a_{11}, \dots, a_{kk}$ verschieden von Null sind.

Beispiel

Gegeben sei eine Matrix A durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & 9 & -2 & -11 \\ 4 & 12 & -6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} A &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -20 \\ 0 & 0 & 10 & -20 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 10 & 0 & -20 \\ 0 & 10 & 0 & -20 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 10 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2. \end{aligned}$$

4.3.2 Die Determinante einer Matrix

Die Determinante $\det(A)$ einer quadratischen Matrix A ist eine reelle Zahl. Neben der Schreibweise $\det(A)$ wird auch $|A|$ verwendet, $\det(A) = |A|$.

Bevor wir eine Formel für die Berechnung der Determinante für den allgemeinen Fall einer quadratischen (n, n)-Matrix angeben, sollen zunächst einfache Fälle betrachtet werden.

Wichtige Spezialfälle

(i) $n = 1$. Für eine $(1, 1)$-Matrix $A = (a_{11})$ ist die Determinante von A gleich dem Wert a_{11},

$$\det(a_{11}) = a_{11}.$$

(ii) $n = 2$. Für

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ist

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

(iii) $n = 3$.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} \\ -a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} \end{array}$$

Im allgemeinen Fall einer (n, n)-Matrix $A = (a_{ik})$ kann die Rekursionsvorschrift

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \cdot \det A_{ik} \qquad \text{(Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile)}$$

verwendet werden, wobei A_{ik} die i, k-te Untermatrix von A bezeichnet. Mit Hilfe dieser Formel wird die Berechnung der Determinante einer (n, n)-Matrix auf die Berechnung der Determinanten ihrer Untermatrizen zurückgeführt, die vom Typ $(n - 1, n - 1)$ sind.

Diese Formel ist äquivalent zu

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \cdot \det A_{ik} \qquad \text{(Entwicklung nach der } k\text{-ten Spalte).}$$

Die Entscheidung darüber, ob eine Zeilen- oder Spaltenentwicklung zur Berechnung der Determinante verwendet und nach welcher Zeile bzw. Spalt entwickelt wird, ist abhängig von den Koeffizienten der Matrix. Meist wählt man eine Zeile oder Spalte mit möglichst vielen Elementen, die gleich Null sind. (Denn falls $a_{ik} = 0$ ist, kann man sich die Berechnung der Determinante der Untermatrix A_{ik} sparen; das Produkt $a_{ik} \cdot \det A_{ik}$ ist ja ohnehin gleich Null.)

Wichtige Rechenregeln

Es seien A, B quadratische Matrizen vom Typ (n, n). Dann gilt

$$\begin{aligned}
\det A &= \det A', \\
\det(A \cdot B) &= \det A \cdot \det B, \\
\det(cA) &= c^n \det A, \qquad c \in \mathbb{R}, \\
\det A &\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rg} A = n.
\end{aligned}$$

Eine Matrix mit $\det A \neq 0$ heißt *regulär*.

Außerdem folgt direkt aus dem Entwicklungssatz für Diagonal- bzw. Dreicksmatrizen

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^{n} a_{kk},$$

d. h., die Determinante von Diagonal- bzw. Dreicksmatrizen ist gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente. Insbesondere gilt

$$\det I = 1.$$

Schließlich wird noch darauf verwiesen, dass sich mit Hilfe der Determinante das Vektor- bzw. Spatprodukt von Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

in der From

$$a \times b = \det \begin{pmatrix} e_x & e_y & e_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \qquad (a \times b) \cdot c = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann. Dabei sind e_x, e_y, e_z die Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$.

Beispiele

(i) Zur Berechnung der Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

empfiehlt sich eine Entwicklung nach der letzten Spalte,

$$\begin{aligned}
\det A &= (-1)\cdot 4\cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + (+1)\cdot 1\cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + 0 + 0 \\
&= (-4)\cdot(16-21-15-14+18+20) + 1\cdot(-6-3-4+4) \\
&= (-4)\cdot 4 + 1\cdot(-9) \\
&= -25.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 3\cdot(-1)\cdot 4\cdot 1 = -12$$

(iii) Gesucht ist eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, so dass der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$$

in der Ebene

$$\left\{ x \ : \ x = s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \ s,t\in\mathbb{R} \right\}$$

liegt. Die Vektorn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

müssen also linear unabhängig sein. Es muss daher gelten

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} = 0$$

d. h.

$$a - 6 + 1 + 6 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad a + 1 = 0,$$

und daraus folgt $a = -1$.

(iv) Die Determinante der auf Seite 16, Formel (4.1), gegebenen „Drehmatrix“ ist

$$\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

für alle Winkel φ.

4.4 Die inverse Matrix

Gibt es zu jeder quadratische Matrix A zwei Matrizen B und C, so dass

$$A \cdot B = C \cdot A = I$$

gilt? Wenn es zwei solche Matrizen A und B gibt, dann müssen wegen

$$B = I \cdot B = (C \cdot A) \cdot B = C \cdot (A \cdot B) = C$$

beide Matrizen gleich sein, $B = C$.

Satz. Falls $\det A \neq 0$, dann existiert eine Matrix $B = C$ mit $A \cdot B = C \cdot A = I$.

Definition. Es sei A eine reguläre Matrix. Eine Matrix A^{-1} mit der Eigenschaft

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

heißt *inverse Matrix* zu A.

Für reguläre (n, n)-Matrizen A und B gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
(A \cdot B)^{-1} &= B^{-1} \cdot A^{-1}, \\
(c \cdot A)^{-1} &= \frac{1}{c} \cdot A^{-1}, \qquad c \in \mathbb{R},\ c \neq 0, \\
(A^{-1})' &= (A')^{-1}, \\
\det(A^{-1}) &= \frac{1}{\det A}.
\end{aligned}$$

Ausserdem gilt

$$I^{-1} = I.$$

Brechnung der inversen Matrix

Es sei $A = (a_{ik})$ eine reguläre (n, n)-Matrix. Die Elemente der zugehörige Inversen $A^{-1} = B = (b_{ik})$ können durch

$$b_{ik} = (-1)^{i+k} \frac{\det A_{ki}}{\det A}, \qquad i, k = 1, \ldots, n,$$

berechnet werden, wobei A_{ik} die ik-te Untermatrix von A bezeichnet. Das bedeutet, A_{ki} ist die ik-te Untermatrix von A'.

Im Spezialfall $n = 2$ folgt daraus unmittelbar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Beispiele

(i) Sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

invers zueinander? Wegen

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist A invers zu B und B invers zu A.

(ii) Zu berechnen ist die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Man erhält

$$\det A = 13$$

und

$$\begin{aligned}
\det A_{11} &= \det \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -8, & b_{11} &= -8, \\
\det A_{12} &= \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3, & b_{21} &= -3, \\
\det A_{13} &= \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 7, & b_{31} &= 7, \\
\det A_{21} &= \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -6, & b_{12} &= 6, \\
\det A_{22} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1, & b_{22} &= -1, \\
\det A_{23} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2, & b_{32} &= -2, \\
\det A_{31} &= \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = 9, & b_{13} &= 9, \\
\det A_{32} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -5, & b_{23} &= 5, \\
\det A_{33} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = -3, & b_{23} &= -3.
\end{aligned}$$

Und damit ist

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -8 & 6 & 9 \\ -3 & -1 & 5 \\ 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(iii) Die Inverse der auf Seite 16, Formel (4.1), gegebenen „Drehmatrix“ ist

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = A' \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) \\ -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Erwartungsgemäß ist also die inverse Drehung eine Drehung um den Winkel $-\varphi$. Außerdem ist in diesem Fall $A^{-1} = A'$.

(iv) Analog ist die Inverse der auf Seite 17, Formel (4.2), gegebenen „dreidimensionalen Drehmatrix“ $A = A_\varphi \cdot A_\vartheta \cdot A_\phi$ gegeben durch

$$\begin{aligned} A^{-1} &= A_\phi^{-1} \cdot A_\vartheta^{-1} \cdot A_\varphi^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= A'_\phi \cdot A'_\vartheta \cdot A'_\varphi \\ &= A'. \end{aligned}$$

4.5 Lineare Gleichungssysteme

Definition. Ein System von m linearen Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ der Form

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

mit den Koeffizienten $a_{ik} \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, m$ und der „rechten Seite“ $b_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, m$, heißt *lineares Gleichungssystem*. Falls die „rechte Seite“ des Gleichungssystems gleich Null ist, $b_i = 0,\ i = 1, \ldots, m$, dann heißt das lineare Gleichungssystem *homogen*, andernfalls *inhomogen*.

In der im vorigen Abschnitt eingeführten Matrixnotation kann dieses Gleichungssystem rationell und übersichtlich in der Form

$$Ax = b$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

geschrieben werden.

Das Ziel ist die Bestimmung einer Lösung des linearen Gleichungssystems, d. h. die Berechnung des Vektors $x \in \mathbb{R}^n$, wobei die Koeffizientenmatrix A und die „rechte Seite“ $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben sind.

In diesem Abschnitt sollen die folgenden Fragestellungen behandelt werden:

- Ist das lineare Gleichungssystem lösbar?
- Gibt es eine oder mehrere Lösungen?
- Welche (einfachen) Kriterien für die Lösbarkeit können angewendet werden?
- Welche Lösungsverfahren stehen zur Verfügung?

4.5.1 Charakterisierung der Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

Zur Beantwortung der Frage nach der Lösbarkeit wird zunächst der einfachste Fall $m = n = 1$ betrachtet:

(i) Die linearen Gleichungssysteme

$$1 \cdot x = 1, \qquad 1 \cdot x = 0$$

haben genau eine Lösung $x = 1$ bzw. $x = 0$.

(ii) Das lineare Gleichungssystem

$$0 \cdot x = 1$$

hat keine Lösung, es gibt keinen Wert x, für den $0 \cdot x = 1$ gilt.

(iii) Das lineare Gleichungssystem

$$0 \cdot x = 0$$

hat unendlich viele Lösungen, jeder Wert $x \in \mathbb{R}$ ist Lösung.

Mit (A, b) wird die um den Vektor b ergänzte Matrix A bezeichnet,

$$(A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe dieser Notation lassen sich allemeinen Fall folgende Kriterien formulieren:

Satz. Es sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten.

(i) Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist lösbar genau dann, wenn $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b)$, und es nicht lösbar, genau dann wenn $\operatorname{rg} A < \operatorname{rg}(A, b)$.

(ii) $Ax = b$ besitzt genau eine Lösung genau dann, wenn $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b) = n$.

(iii) $Ax = b$ besitzt unendlich viele Lösungen genau dann, wenn $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b) < n$.

Beispiel

Die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & = & 7 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 10x_3 & + & 6x_4 & = & 13 \\ -2x_1 & & & + & x_3 & + & \alpha x_4 & = & \beta \end{array}$$

hängt von der Wahl der freien Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ab. Für welche Werte von α und β ist dieses Gleichungssystem lösbar und hat genau eine Lösung?

Die Bestimmung des Rangs der Matrix (A, b) mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus liefert

$$\begin{aligned} & \operatorname{rg}\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 11 & 5 & 7 \\ 3 & 8 & 10 & 6 & 13 \\ -2 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 4 & 9 & \alpha+6 & \beta+2 \end{array}\right) \\ = \; & \operatorname{rg}\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & \alpha+8 & \beta-8 \end{array}\right) = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5\alpha+34 & 5\beta-25 \end{array}\right). \end{aligned}$$

Nach den allgemeinen Kriterien für die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme besitzt das Gleichungssystem

(i) keine Lösung, wenn $5\alpha + 34 = 0$ und $5\beta - 25 \neq 0$, d. h.

$$\alpha = -\frac{34}{5} \qquad \text{und} \qquad \beta \neq 5,$$

(ii) genau eine Lösung, wenn

$$\alpha \neq -\frac{34}{5}, \qquad \beta \in \mathbb{R} \quad (\text{d. h. } \beta \text{ beliebig}),$$

(iii) unendlich viele Lösungen, falls

$$\alpha = -\frac{34}{5} \qquad \text{und} \qquad \beta = 5.$$

Spezialfälle

(i) Ist die Anzahl der Gleichungen m kleiner als die Anzahl der Unbekannten n, dann ist stets

$$\operatorname{rg} A \leq m < n$$

und das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar, es besitzt also entweder keine oder unendlich viele Lösungen.

(ii) Ein homogenes Gleichungssystem

$$Ax = 0$$

ist wegen $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b)$ immer lösbar. Es besitzt nur die Triviallösung $x = 0$, falls $\operatorname{rg} A = n$, oder es besitzt unendlich viele Lösungen, wenn $\operatorname{rg} A < n$.

(iii) Ein quadratisches Gleichungssystem, d. h. ein Gleichungssystem mit quadratischer Koeffizientenmatrix ($m = n$), ist eindeutig lösbar genau dann, wenn $\det A \neq 0$. In diesem Fall existiert die Inverse A^{-1} von A und es gilt

$$x = A^{-1}b.$$

4.5.2 Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Wie wir soeben gesehen haben, kann die Lösung eines quadratischen linearen Gleichungssystems auf die Berechnung der Inversen seiner Koeffizientenmatrix zurückgeführt werden. Eine weitere Methode zur Lösung quadratischer Gleichungssysteme – die Cramersche Regel – baiert auf der Berechnung von Determinanten. Für Gleichungssysteme, die nicht notwendig quadratisch sind, wird der Gaußsche Algorithmus angewandt, der auch die Grundlage für numerische Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme ist.

Die Cramersche Regel

Die Lösung $x = (x_1, \ldots, x_n)'$ des quadratische Gleichungssystem $Ax = b$ kann durch

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

bestimmt werden, wobei die Matrix A_k aus der Matrix A erhalten wird, in dem die k-te Spalte von A durch die „rechte Seite“ b ersetzt wird,

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Beispiel

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, & \det A = -2-6+1+6 = -1, \\
A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}, & \det A_1 = -2-6+4+6 = 2, \\
A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, & \det A_2 = 0 \qquad (\text{da} \quad \operatorname{rg} A_2 < 3), \\
A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, & \det A_3 = 4+6-1-6 = 3.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$x_1 = \frac{2}{-1} = -2, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = \frac{3}{-1} = -3.$$

Das Verfahren von Gauß

Wir betrachten zunächst ein einfaches Beispiel eines linearen Gleichungssystems, in dem die Koffizientenmatrix Dreiecksgestalt hat.

Beispiel

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \\
 & & 2x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \\
 & & & & 3x_3 & = & 6
\end{array}
$$

Aus der dritten Gleichung folgt unmittelbar $x_3 = 2$, und durch „Rückwärtssubstitution“ erhält man

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
 & & 2x_2 & - & 5 \cdot 2 & = & -8 & \Rightarrow & x_2 = 1, \\
2x_1 & - & 4 \cdot 1 & + & 3 \cdot 2 & = & 8 & \Rightarrow & x_1 = 3.
\end{array}
$$

Wenn also die Koeffizientenmatrix Dreiecksgestalt hat, dann liegt die Lösung des linearen Gleichungssystems auf der Hand (ähnlich wie bei der Rangbestimmung, siehe Seite 19). Folglich ist es das Ziel eines Lösungsverfahrens, das lineare Gleichungssystem so umzuformen, dass die Koeffizientenmatrix Dreiecksgestalt erhält, wobei sich jedoch die Lösung x nicht ändern darf.

Es ist zu erwarten, dass sich die Umformungen mit auf die „rechte Seite“ b des Gleichungssystems beziehen müssen. Es wird daher die Matrix (A, b) betrachtet, für die folgende Umformungen möglich sind

(i) das Vertauschen von zwei Zeilen,

(ii) die Multiplikation einer Zeile mit einer von Null verschiedenen Konstanten und

(iii) die Addition oder Subtraktion einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Beispiele

(i)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_2 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -11 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & -2 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 14 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & = & -17 \end{array}$$

Gaußsches Verfahren:

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & 4 & -1 & 3 & -11 \\ 1 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ -2 & -4 & 5 & 2 & 14 \\ 4 & 6 & -2 & 5 & -17 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrr|r} 2 & 4 & -1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & -1 & -9 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrr|r} 2 & 4 & -1 & 3 & -11 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -31 & 31 \end{array}$$

„Rückwärtssubstitution“ liefert

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} & & & & & & - & & 31x_4 & = & 31 & \Rightarrow & x_4 = -1, \\ & & & & 4x_3 & & + & & 5\cdot(-1) & = & 3 & \Rightarrow & x_3 = 2, \\ & - & 2x_2 & + & 0\cdot 2 & & - & & (-1) & = & 5 & \Rightarrow & x_2 = -2, \\ 2x_1 & + & 4\cdot(-2) & - & 2 & & + & & 3\cdot(-1) & = & -11 & \Rightarrow & x_1 = 1. \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 3x_2 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 7 \end{array}$$

Gaußsches Verfahren:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & -14 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & -14 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Wegen $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b) < n$ hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen. „Rückwärtssubstitution“ liefert

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & & & 0\cdot x_3 & = & 0 & \Rightarrow & x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}, \\ & & 7x_2 & - & 14t & = & 5 & \Rightarrow & x_2 = -1+2t, \\ x_1 & - & 2\cdot(-1+2t) & + & 3t & = & 4 & \Rightarrow & x_1 = 2+t, \end{array}$$

d. h., die Lösung ist von einem freien Parameter t abhängig. Die Lösungsmenge kann durch

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

beschrieben werden, d. h., die Lösungsmenge entspricht einer Geraden. Die durch die drei Gleichungen des Gleichungssystems repräsentierten Ebenen schneiden sich in diesem Beispiel also nicht in einem Punkt (wie das bei einer eindeutig bestimmten Lösung der Fall gewesen wäre), sondern in einer Geraden.

(iii)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 6x_3 & = & 5 \\ 7x_1 & - & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 15 \end{array}$$

Gaußsches Verfahren:

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & +2 & +5 & 3 \\ 1 & -3 & -6 & 5 \\ 7 & -5 & -8 & 15 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -6 & 5 \\ 0 & 8 & 17 & -7 \\ 0 & -16 & -34 & 20 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -6 & 5 \\ 0 & 8 & 17 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}$$

Wegen $\operatorname{rg} A < \operatorname{rg}(A, b)$ ist dieses Gleichungssystem nicht lösbar.

Zwei der durch die drei Gleichungen des linearen Gleichungssystems repräsentierten Ebenen sind parallel. Es gibt daher keine gemeinsame Schnittmenge der drei Ebenen.

Kapitel 5

Algebraische Strukturen

Index