

Aufgabe 36

Die Lebensdauer eines Elektronikteils in einem Computer besitze eine Verteilung der Form

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\frac{x}{10}), & \text{für } 0 \leq x \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Verifizieren Sie, daß es sich wirklich um eine Verteilungsfunktion handelt! Wie sieht die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte aus? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig ausgewähltes Elektronikteil eine Lebensdauer zwischen 5 und 12 Jahren hat?

Aufgabe 37

Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen aus Aufgabe 32 und Aufgabe 36.

Zur Erinnerung: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \exp(-\lambda x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Aufgabe 38

Sei X eine diskrete oder stetige Zufallsvariable und seinen $a, b \in \mathbb{R}$ sowie $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeigen Sie, daß für die linear transformierte Zufallsvariable $Y := aX + b$ bzw. für die Zufallsvariable Z , die der n -fachen Summe der Zufallsvariable X entspricht, $Z := \underbrace{X + X + \dots + X}_{n\text{-mal}}$, folgende Formeln gelten:

$$\begin{aligned} E(Y) &= aE(X) + b \\ \text{Var}(Y) &= a^2 \text{Var}(X) \\ E(Z) &= \underbrace{E(X) + E(X) + \dots + E(X)}_{n\text{-mal}} = nE(X) \end{aligned}$$

Aufgabe 39

Mit einem Zufallsgenerator, der reelle Zufallszahlen zwischen -1 und 1 erzeugt, wird folgendes Spiel organisiert: Jeder Zufallszahl wird ihr Quadrat als Gewinnausschüttung zugeschrieben. Wie hoch muß der Grundeinsatz sein, damit das Spiel fair ist? Zeigen Sie dazu zunächst, daß der Zufallsgenerator als stetige Zufallsvariable X mit Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben werden kann.

Aufgabe 40

Die Skalierung des Intelligenzquotienten beruht auf der Annahme der Normalverteilung der Meßwerte mit einem Erwartungswert von 100 und einer Standardabweichung von 15. Beantworten Sie folgende Fragen:

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine zufällig ausgewählte Person einen Intelligenzquotienten von höchstens 105 Punkten hat?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine zufällig ausgewählte Person einen Intelligenzquotienten von mindestens 80 Punkten hat?
- Wieviel Prozent der Bevölkerung haben ein Intelligenzquotienten zwischen 90 und 110 Punkten?

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat jemand einen Intelligenzquotienten von genau 97 Punkten?
- Welches Mindestintelligenzquotienten haben die 5% klügsten Menschen?