

12. Geometrische Modelle

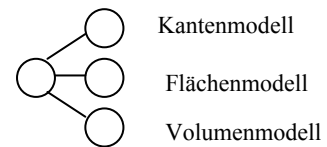
In diesem Abschnitt soll von geometrischen Modellen und ihren rechnerinternen Repräsentationen die Rede sein. Derartige Modelle sind sowohl in der graphischen Datenverarbeitung als auch im CAD-Bereich von großer Bedeutung. Zunächst soll eine grobe Klassifizierung (Einteilung) vorgenommen werden. Eine Klassifikation nach verschiedenen Gesichtspunkten soll uns die wesentlichen Unterschiede verdeutlichen. Zur Erinnerung: **Geometrische Modelle** beschreiben im Gegensatz zu graphischen Modellen (Datenstrukturen wie Szenengraphen) nur **geometrische** und **topologische Eigenschaften** der modellierten Objekte und beinhalten keinerlei Information, die sich auf die Darstellung (Visualisierung) derselben bezieht. Mit anderen Worten: Kamerastandpunkte, Attribute von Linien, etc. sind nicht Bestandteil eines reinen geometrischen Modells.

12.1. Eine grobe Klassifikation geometrischer Modelle

Eine sehr grobe Unterscheidung können wir treffen, wenn wir von 2D- und 3D-Modellierung sprechen. Wir wollen später nur noch 3D-Modelle berücksichtigen. Anfang der 70er Jahre wurde in CAD-Modellen die Form eines zu konstruierenden Gegenstandes durch seine **(technische) Zeichnung** repräsentiert. Dies entspricht genau der herkömmlichen Methode ein 3D-Objekt durch mehrere Ansichten darzustellen. Ein derartiges Modellierungsschema ist sehr robust. So ist es vielfach möglich aus 2 Ansichten eine 3. Ansicht abzuleiten. Dennoch ist es möglich bei der Konstruktion Fehler zu machen und "unsinnige" Objekte zu erzeugen. Vorteile, die sich aus dem Einsatz eines Computers ergaben, waren vor allem die Möglichkeit zur selektiven Änderung an einer technischen Zeichnung und die Ausgabe der Ergebnisse.

Für **echte 3D-Modelle** ist die Einteilung entsprechend

Abb.12.1 üblich und sinnvoll.



12.1.1. 3D - Kantenmodell (Drahtmodell, wire frame model)

Diesem Repräsentationsschema liegt die Vorstellung zugrunde, dass ein 3D-Körper durch seine Oberfläche begrenzt wird. Diese besteht möglicherweise aus mehreren Teilflächen (z.B. 6 Flächen bei einem Würfel). Die Teilflächen (auch Facetten genannt) stoßen an Kanten aneinander. Die Kanten sind sichtbar (wegen der Unstetigkeit beim Übergang von einer Fläche zur anderen) und werden daher im Modell repräsentiert. Die Beschreibung enthält also **Kanten** (Linien) und die sie begrenzenden **Ecken** (Endpunkte).

Abb. 12.1: Geometrische Modelle

In Abb. 12.2. ist die rechnerinterne Darstellung (RID) als Graph (Prinzip) dargestellt. Beachten Sie den hierarchischen Aufbau des Modells.

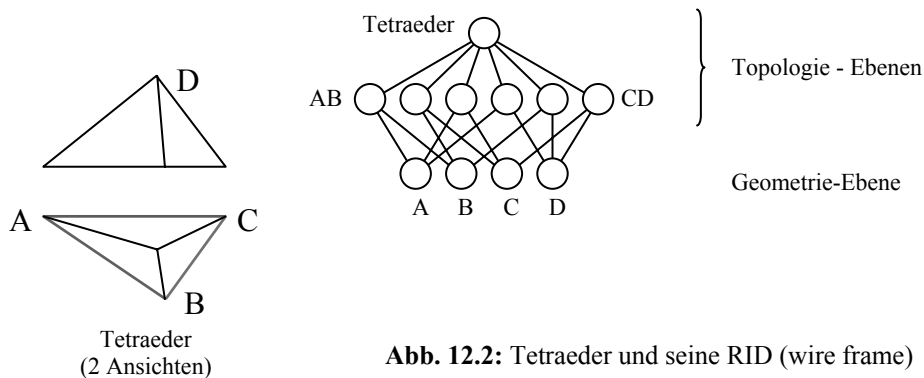


Abb. 12.2: Tetraeder und seine RID (wire frame)

Das Beispielsmodell enthält 4 Eckpunkte A bis D, die paarweise durch Kanten verbunden sind. Die Menge aller Kanten bildet das Gesamtobjekt, den Tetraeder. Hieraus ergibt sich eine allgemeingültige Definition für eine Kante: Eine **Kante** ist eine (nicht notwendigerweise geradlinige) Verbindung, die stets in einem Punkt beginnt und in einem (möglicherweise dem selben) Punkt endet.

Abb. 12.2 stellt einen schleifenfreien gerichteten Graph dar. Die unterste Ebene enthält die geometrische Information des Objekts, die Koordinaten der Eckpunkte, während die Ebenen darüber die sog. Topologie (z.B. die Verbindungsvorschriften und Zusammenhänge) des Objekts beschreiben. Trennung von **Geometrie** und **Topologie** ist eine grundlegende Forderung bei der Erstellung geometrischer Modelle. Dies hat zahlreiche Vorteile z.B.:

1. Änderungen an der Geometrie (Verschiebung eines Punktes) lassen die Topologie unverändert.
2. Wird z.B. in Abb. 12.2 der Punkt D gelöscht, entfallen damit automatisch alle zu D führenden Kanten. Es bleibt nur das Dreieck ABC übrig.
3. Entfällt eine Kante (z.B. die Verbindungslinie zwischen den beiden Kreisen in Abb. 12.3), so ändert sich an der Geometrie nichts, obwohl das Objekt in 2 getrennte Kreise zerfällt.

Abb. 12.3. zeigt ein Drahtmodell, das aus 3 Kanten und 2 Punkten besteht. Beachten Sie bei diesem Beispiel folgendes: Sollte der "Konstrukteur" die Absicht gehabt haben ein Drahtgerüst, bestehend aus 2 Ringen und einer Verbindung dazwischen, zu modellieren, so ist dieses Modell eindeutig (und damit vollständig). Sollte er beabsichtigt haben einen zylindrischen Vollkörper oder eine (vielleicht offene) zylindrische Fläche (=geöffnete Konservendose) zu modellieren, so ist ihm dieses nicht eindeutig gelungen.

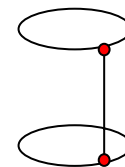


Abb. 12.3: Gültiges Kantenmodell

Allgemeine Schlussfolgerung: Flächenhafte Objekte und Vollkörper lassen sich mit Hilfe von Drahtmodellen nicht **eindeutig (=vollständig)** modellieren.

Unabhängig von einem speziellen Beispiel lässt sich auch allgemeiner formulieren, welche Information ein 3D-Drahtmodell enthalten muss (Abb 12.4):

1. Ein Objekt enthält eine Menge von Kanten .
2. Jede Kante ist durch ein Punktpaar (Anfangs- und Endpunkt) definiert. Beachte, dass die Reihenfolge der beiden Punkte keine Rolle spielt.
3. Jeder Punkt ist durch ein geordnetes Tripel von Koordinatenwerten definiert.

$$O := \{ K_{i,j} \} \quad i,j \in \mathbb{N}$$

$$K_{i,j} := \{ (P_i, P_j) \}$$

$$P_i := \langle x_i, y_i, z_i \rangle$$

Abb. 12.4: Bestandteile eines Kantenmodells

Verwendung von Drahtmodellen:

- Historisch wegen geringer Renderingzeiten,
- zur Ausgabe von Objekten auf vektoriellen Ausgabegeräten,
- zur Visualisierung sonst verdeckter Teile (s. Abb. 12.5).

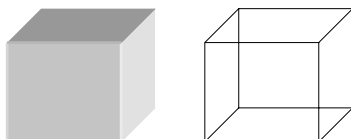


Abb. 12.5: Visualisierung verdeckter Teile

12.1.2. Flächenmodell (surface model)

Wie wir festgestellt haben, lässt sich ein flächenhaftes Objekt (s. offene Konservendose) durch ein Drahtgittermodell nicht eindeutig repräsentieren. Dem Modell muss Information hinzugefügt werden, die aussagt, an welchen Stellen das Objekt mit einer Fläche "überzogen" ist. In Abb. 12.6 besteht das Modell einmal aus 2 Kreisscheiben, die durch eine Kante zusammengehalten werden. Daneben sollte eine geöffnete Blechbüchse und ganz rechts ein offenes Ofenrohr modelliert werden. Alle 3 Modelle wären als Drahtgittermodell möglicherweise wie in Abb 12.6 links repräsentiert worden.

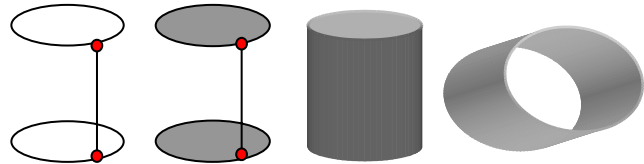


Abb. 12.6: Kantenmodell und 3 verschiedene Flächenmodelle

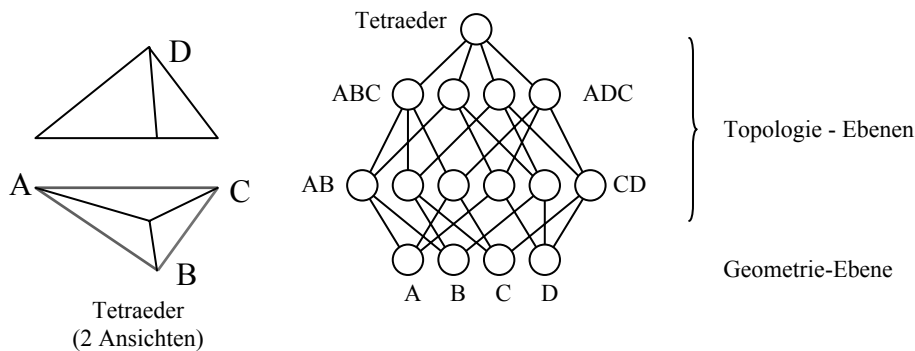


Abb. 12.7: Tetraeder und seine RID (surface model)

Gegenüber dem Drahtgittermodell enthält die RID eine zusätzliche Topologie-Ebene, die eine Folge von Kanten (= geschlossene Kontur) enthält. Die Kontur ist die Begrenzung einer Teilfläche (=Facette) des Objekts. In der Graphik und im CAD-Bereich sind Facetten sehr häufig Dreiecke. Dies hat u.a. folgende Gründe: 3 Punkte (im Gegensatz zu 4 Punkten) liegen grundsätzlich in einer Ebene. Dreiecke sind immer konvex. Letzteres vereinfacht viele Algorithmen (s. z.B. Vektor/Rasterkonvertierung).

Neben der Verwendung von **Dreiecken** gibt es noch einen weiteren Gesichtspunkt bei der Verwendung von Facetten: Eine Facette sollte i.a. eine **Richtung** besitzen, die es ermöglicht, Vorder- und Rückseite zu unterscheiden. Dies ist z.B. erforderlich, wenn bei der Visualisierung die beiden Seiten unterschiedlich eingefärbt werden sollen, wenn Licht auf die Facette fällt (die Helligkeit einer Fläche ist u.a. von der Richtung der Flächennormalen abhängig), oder

$$\begin{aligned}
 \mathbf{O} &:= \{ \mathbf{F}_{i,j,k} \} \quad i, j, k \in \mathbb{N} \\
 \mathbf{F}_{i,j,k} &:= \langle \mathbf{K}_{i,j}, \mathbf{K}_{j,k}, \mathbf{K}_{k,i} \rangle \\
 \mathbf{K}_{i,j} &:= \{ (\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j) \} \\
 \mathbf{P}_i &:= \langle x_i, y_i, z_i \rangle
 \end{aligned}$$

Abb. 12.8: Bestandteile eines Flächenmodells (Dreiecks-Facetten)

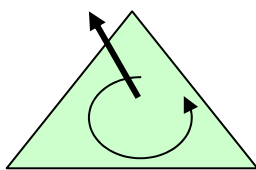
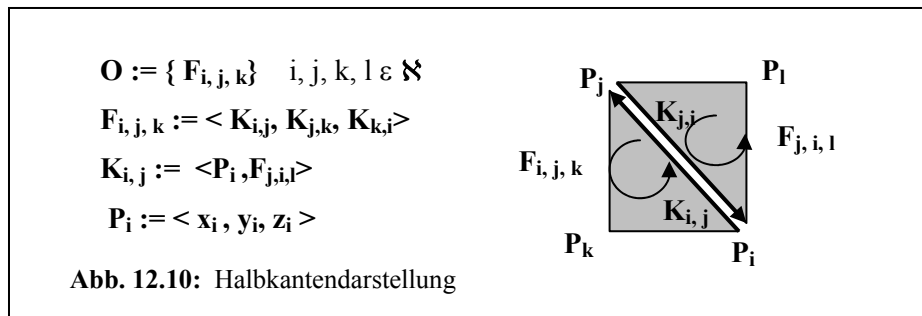


Abb. 12.9: Flächennormale aus Umlaufsinn

wenn bei einer geschlossenen Fläche der Innen- vom Außenraum unterschieden werden soll.

Abb. 12.8 zeigt die Erweiterung der Abb. 12.4 zum Flächenmodell. Hierbei ist die Facette bereits als geordnete Folge von Kanten repräsentiert. Damit ist der **Umlaufsinn** implizit festgelegt. Aus dem Umlaufsinn kann nun die Richtung der **Flächennormalen** ermittelt werden (s. Abb. 12.9).

Setzt man nun voraus, dass die Konturen einer Facette stets im gleichen Umlaufsinn (z.B. mathematisch positiv) durchlaufen wird, so kann man eine elegantere Darstellung, als die in Abb. 12.8 verwendete, finden. Dies ist die sog. *Halbkantendarstellung*.



Der Halbkantendarstellung liegen folgende Überlegungen zu Grunde: Benachbarte Facetten werden stets durch eine Kante voneinander getrennt. Bei der Einhaltung eines einheitlichen Umlaufsinnns wird die Trennkante für jede der beiden Facetten stets in entgegengesetztem Sinn durchlaufen. Es genügt daher für jede Kante nur den Anfangspunkt zu definieren. Man stellt sich vor, dass die Trennkante $K_{i,j}$ aus Abb. 12.8 längsseitig aufgespalten wird. Hierdurch entstehen die beiden entgegengesetzten Halbkanten $K_{i,j}$ und $K_{j,i}$ (Abb. 12.10). Im Prinzip würde die Angabe des Startpunktes genügen um eine Halbkante zu definieren (dann würde es sich dabei eigentlich nicht mehr um eine Kante handeln). Man fügt der Definition der Halbkante gern noch (redundant) die angrenzende Nachbarfläche hinzu. Dies erleichtert die Bearbeitung einer Oberfläche, weil dadurch der Übergang von einer Facette auf ihre Nachbarn sehr einfach möglich wird.

12.1.3. Volumenmodell (solid model)

Die durch Flächenmodelle repräsentierten Objekte können offene Raumflächen (wie ein fliegender Teppich) oder geschlossene Oberflächen (wie eine Coladose) sein. Will man wirklich Körper, die über einen Innen- und Außenraum verfügen, definieren, so ist es erforderlich, dem Modell noch weitere Information hinzuzufügen, damit die Repräsentation eindeutig wird. Hierdurch wird es möglich für jeden Punkt des Raumes zu entscheiden, ob er im Inneren des Körpers liegt oder außerhalb. Damit ist auch der Begriff Volumenmodell definiert: Ein Modell, das zur eindeutigen Repräsentation eines Körpers geeignet ist, d.h. bei dem für jeden Raumpunkt entscheidbar ist ob er sich im Inneren des Körpers befindet oder nicht. Im Kapitel 12.3 werden die heute gebräuchlichen Repräsentationsschemata für Volumenmodelle genannt.

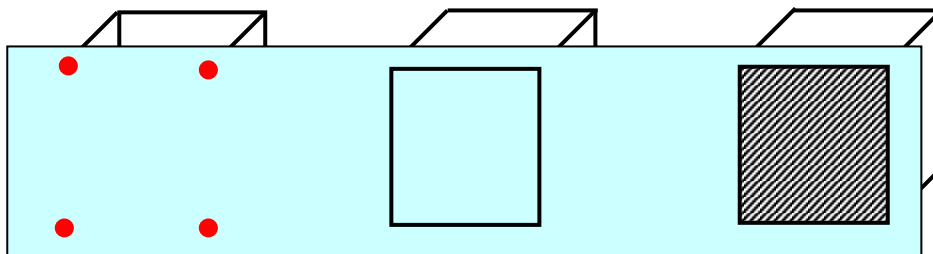


Abb. 12.11: Ergebnisse eines Schnitts durch ein Draht-, ein Flächen- und ein Volumenmodell

Abb. 12.11 zeigt in einer Gegenüberstellung die verschiedenen Ergebnisse, die beim Schnitt einer Ebene mit einem Kanten-, Flächen- und Volumenmodell entstehen können. Es sind dies Punkte, Linien bzw. Flächen.

12.2. Freiformkurven und -flächen

In diesem Abschnitt wird lediglich auf einige prinzipielle Gesichtspunkte eingegangen, nicht jedoch. Auf die mathematische Behandlung der Problematik.

Kurven (natürlich auch Flächen) können auf verschiedene Art definiert werden (vgl. Kapitel 10):

- **Implizite Darstellung** (für die 2D-Kurve: $F(x,y) = 0$; für die Raum-Fläche: $F(x,y,z) = 0$),
- **Explizite Darstellung** (für die 2D-Kurve: $y = f(x)$; für die Raum-Fläche: $z = f(x,y)$)
- **Parameterdarstellung** (für die 3D-Kurve: $x = f_x(u)$, $y = f_y(u)$, $z = f_z(u)$
für die Raum-Fläche: $x = f_x(u,v)$, $y = f_y(u,v)$, $z = f_z(u,v)$).

An dieser Stelle sollen nur einige kurze Bemerkungen zur Parameterdarstellung sogenannter Freiformkurven und Freiformflächen gemacht werden. Der Einfachheit halber soll mit Kurven begonnen werden.

Zur Definition einer Freiformkurve sind zunächst sogenannte Stützpunkte (Punkte im Raum) erforderlich. Das Ergebnis einer **Interpolation** und einer **Approximation** unterscheidet sich dadurch, dass im ersten Fall die Kurve durch alle Stützpunkte verläuft, im 2. Fall diese Forderung jedoch nicht besteht. Beispiele von Bedeutung sind Splines, Bézierkurven, B-Splinekurven und NURBS (vgl. Abb. 12.12).

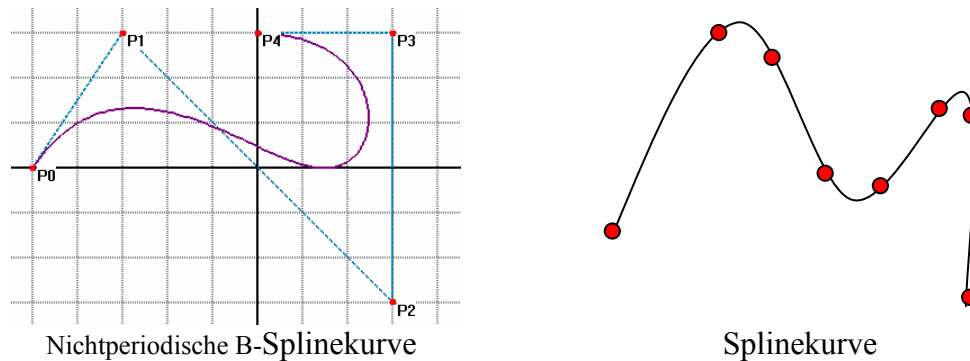


Abb. 12.12: Beispiel einer Approximation und einer Interpolation

Sollen statt Kurven Flächen modelliert werden, so ist ein Netz von Stützpunkten erforderlich.

12.3. Volumenmodelle

Das Volumenmodell stellt für Körper das einzige wirklich eindeutige Modell dar. Für jeden Punkt des Raumes ist entscheidbar, ob dieser zum Inneren des Körpers gehört, oder nicht. Schnittflächen können vollautomatisch schraffiert werden. Verdeckte Kanten können stets automatisch entfernt werden. Volumen- und Massenberechnungen sind möglich.

In der Literatur werden die Techniken der Volumenmodellierung in 6 Gruppen eingeteilt. Diese werden im Folgenden kurz beschrieben.

12.3.1. Enumerationsverfahren ('spatial occupancy matrix')

Prinzip:

Der Raum wird in eine Menge disjunkter Teile (Zellen) unterteilt.

Das Objekt wird dadurch beschrieben, dass angegeben wird, welche dieser Zellen belegt sind.

Hierbei kann ein fest vordefiniertes Raumgitter verwendet werden (Abb. 12.13). Alle Zellen besitzen dann dieselbe Form und Größe. Der Aufwand für eine Repräsentation kann gewaltig sein.

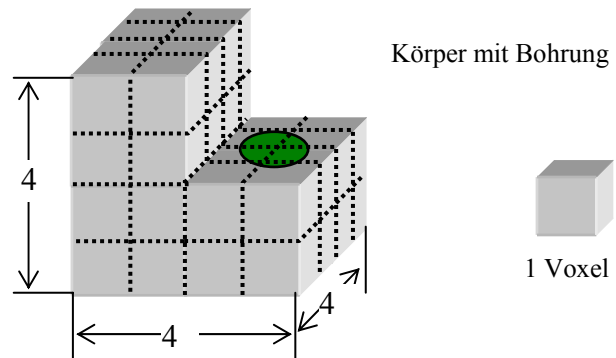


Abb. 12.13: Körper durch Voxel approximiert

Anwendung: Z.B. in der Biomedizin (Computertomographie). Die Raumzellen werden auch 'voxel' = volume element genannt.

12.3.2. Zellzerlegung ('cell decomposition')

Prinzip:

Der Körper wird aus einfachen (parametrisierten) Bausteinen (Zellen) zusammengesetzt (Abb. 12.14). In einem Repräsentationsschema wird eine Menge solcher Zellen (parametrisierte Primitive) definiert. Die Zellen können auch gekrümmte Oberflächen aufweisen.

Anwendung: Bei der Finite Elemente Methode (FEM). Die Erzeugung dieser Repräsentation erfolgt häufig aus anderen Darstellungsformen (Repräsentationsschemata) heraus.

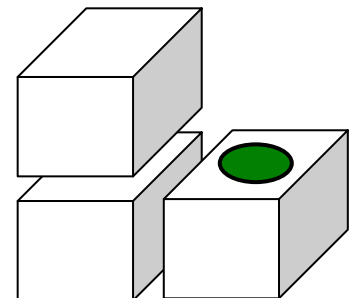
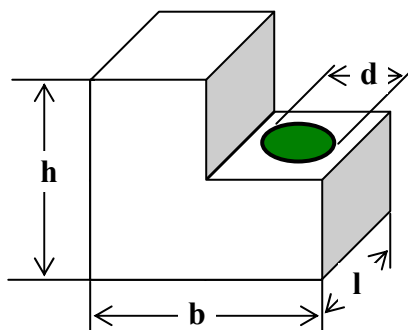


Abb. 12.14: Zellzerlegung

12.3.3. Parametrisierung ('primitive instancing')

Prinzip:

Mit Hilfe variabler Größen und Abmessungen werden *Teilfamilien (Varianten)* und Baugruppen beschrieben. Jedes Element wird durch eine feste Anzahl von Parametern beschrieben (Abb. 12.15). Ein parametrisiertes primitives Element wird als Teilfamilie (Prototyp) angesehen. Die Mitglieder der Familie unterscheiden sich nur durch die Parameterwerte.



	l	b	h	d
Variante 1	100	80	80	20
Variante 2	100	100	100	20
Variante 3

Abb. 12.15: Körper als Mitglied einer Teilfamilie

Anwendung: Bei der Konstruktion komplexer Gebilde, da die Mitglieder der Teilefamilie sehr einfach beschrieben werden können. Das Schema begünstigt die Standardisierung, ist aber unflexibel.

12.3.4. Sweeping

Prinzip:

Eine Fläche (oder ein Volumen) wird im Raum bewegt. Der dabei überstrichene Bereich gehört zum Inneren des Körpers. Bei diesem sehr gebräuchlichen Verfahren können einige Sonderfälle unterschieden werden.

Sonderfall 1: Profilkörper

Der Übergang $2D \rightarrow 3D$ erfolgt durch Hinzufügen einer Tiefe (" $2.5 D$ "). Die Leitgerade (das ist die Gerade entlang der die Bewegung der Fläche erfolgt) kann senkrecht oder schräg auf der Fläche stehen (Abb. 12.16).

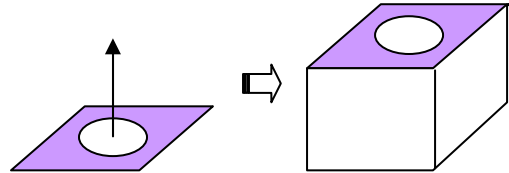


Abb. 12.16: Beispiel Profilkörper

Sonderfall 2: Rotationskörper

Der Übergang $2D \rightarrow 3D$ erfolgt durch eine Drehung (Abb. 12.17)

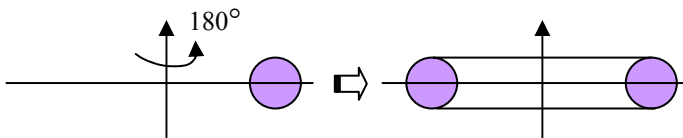


Abb. 12.17: Beispiel Rotationskörper

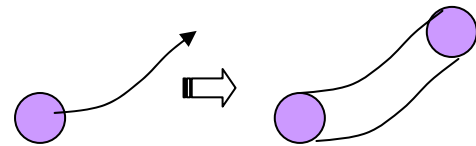


Abb. 12.18: Beispiel Allgemeines Sweeping

Allgemeines Sweeping

Eine beliebige Fläche (oder Volumen) wird entlang einer beliebigen Bahnkurve bewegt (Abb. 12.18). Dies ist die allgemeinste Form des Sweeping.

Anwendung: Die Sonderfälle (Translations- und Rotationskörper) kommen häufig vor. Die Beschreibung ist einfach. Das Schema wird oft zur Eingabe, aber weniger häufig zur internen Repräsentation verwendet. Es taucht oft im Zusammenhang mit anderen Repräsentationsschemata auf.

12.3.5. Flächenbegrenzungsdarstellung ('boundary representation' = BREP)

Prinzip:

Die (geschlossene) Oberfläche eines Körpers teilt den Raum in 2 Teile, von denen der eine zum Inneren, der andere zum Äußeren des Körpers gehört.

Die Oberfläche kann durch Facetten beschrieben werden (s. Flächenmodell). Man spricht dann auch hier von einem Facettenmodell. Die Facetten sind grundsätzlich orientiert, d.h. sie besitzen eine Außen- und eine Innenseite. Sie werden durch Kanten begrenzt.

Im Beispiel der Abb. 12.19 wird der Körper durch 8 ebene Flächen (2 davon mit Loch) und durch einen Zylindermantel begrenzt.

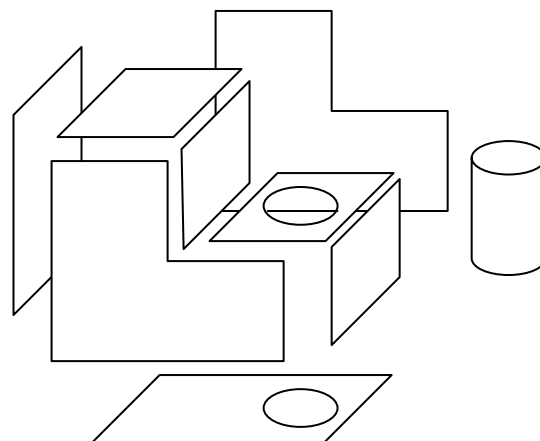


Abb. 12.19: Beispiel BREP

Anwendung: Die BREP ist das heute gebräuchlichste primäre Repräsentationsschema. Die Beschreibung eines Körpers bei der Eingabe durch alle seine Flächenteile und ihre Beziehungen zueinander ist allerdings häufig zu aufwendig. Die Eingabe erfolgt daher häufig in anderer Form (z.B. Sweeping oder CSG).

12.3.6. Festkörperdarstellung ('Constructive Solid Geometry' =CSG)

Prinzip:

Das Objekt wird aus (einfachen) Grundkörpern aufgebaut. Diese werden als Mengen von Punkten aufgefasst. Die Verknüpfung zu komplexen Körpern erfolgt durch *Mengenoperationen*.

Abb. 12.20 zeigt eine CSG-Hierarchie. Der Körper wird durch Vereinigung zweier Quader und anschließender Differenzbildung mit einem Zylinder (alle 3 Grundelemente sind Körper) gebildet.

Anwendung: Die CSG-Repräsentation ist das modernste Repräsentationsschema, ist aber noch nicht sehr weit verbreitet.

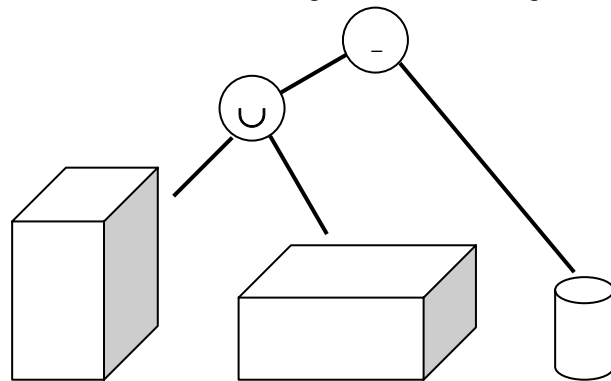


Abb. 12.20: Beispiel CSG