Beispiele für Bildoperationen

Originalbild:

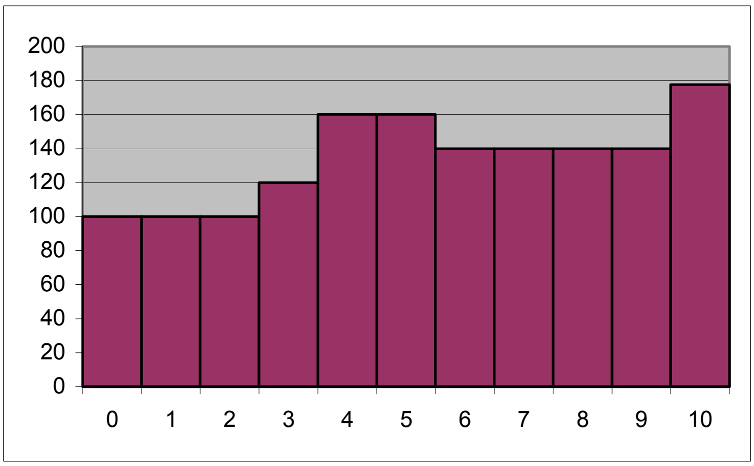
Originalbild als Grauwertmatrix:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	100	100	100	120	160	160	120	100	100	100	137
1	100	100	100	120	160	160	120	100	100	100	137
2	100	100	100	120	160	160	120	100	100	100	137
3	100	100	100	120	160	160	140	140	140	140	178
4	100	100	100	120	160	160	140	140	140	140	177
5	100	100	100	120	160	160	120	100	100	100	136
6	100	100	100	120	160	160	120	100	100	100	136

Grauwertprofil (1D) der Zeile 3 (numerisch):

100 100 100 120 160 160 140 140 140 140 178

Grauwertprofil (1D) der Zeile 3 (als Diagramm):



1. Eindimensionale Faltungsmatrix F1:

1	1	1

Rechnerisches Ergebnis in Zeile 3 nach der Faltung mit F1:

Original:

100	100	100	120	160	160	140	140	140	140	178

Ergebnis:

	300	320	380	440	460	440	420	420	458	

Bemerkung:

Beachten Sie, dass die Ergebniswerte die **Summe** dreier benachbarter Pixel in einer Bildzeile darstellen. Geometrisch entspricht dies der Fläche der diskreten Grauwertfunktion in diesem Bereich. Bei einer kontinuierlichen Grauwertfunktion hätten wir es statt mit einer Summe mit einem Integral über diesen engen Bereich zu tun. Aus diesem Grund bezeichnet man die Faltung mit F1 als **Integration der Bildfunktion in Zeilenrichtung**.

Die Integration der Bildfunktion stellt stets eine **Tiefpassfilterung** der Funktion dar. Der sichtbare Effekt ist eine **Glättung.** Hierbei werden harte Kanten „entschärft“ und kleine Störungen gemildert.

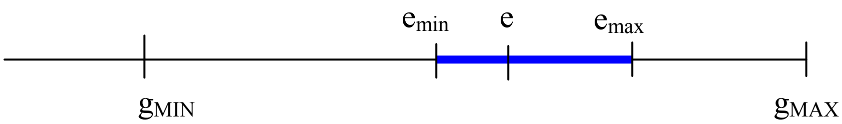
Lineare Grauwerttransformation nach der Faltung F1:

Allgemeine Vorbemerkung hierzu:

Nach der Faltung befinden sich die die Ergebniswerte e(i,j) üblicherweise nicht mehr im darstellbaren Grauwertintervall $[g_{MIN},g_{MAX}]$. Um zu Bildanalysezwecken damit weiter zu arbeiten wäre das kein Problem. Um die Werte jedoch als Grauwertbild darstellen zu können, müssen sie einer linearen Grauwerttransformation unterworfen werden:

$$\mathbf{g' = mult*e + add}$$

Hierzu sind die Größen mult und add zu bestimmen.



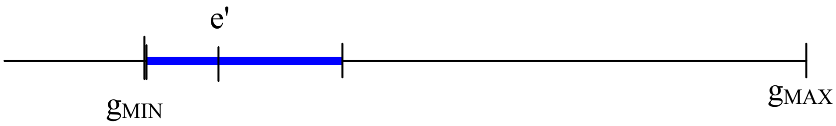
Annahme: $\mathbf{e}_{min}$ und $\mathbf{e}_{max}$ seien die durch die Faltung <u>theoretisch</u> erzielbaren mininmalen und maximalen Grauwerte. Alternativ könnten hierfür auch die <u>tatsächlich</u> als Ergebnis erzielten Ergebniswerte verwendet werden, die ja je nach Bildinhalt unterschiedlich sein können.

.

Vorgehensweise:

1. Verschiebung von e_{min} in den Ursprung. Der Ergebniswert e wird zu e':

$$\mathbf{e' = e - e_{min}}$$



2. Skalierung: Durch die Division durch (emax-emin) wird das Grauwertintervall [0,1]. Durch Multiplikation mit dem Faktor $(g_{MAX}-g_{MIN}) = (g_{MAX} – 0) = g_{MAX}$ wird das Grauwertintervall danach auf $[0,g_{MAX}]$ gestreckt:

$$\mathbf{g' = e' * g_{MAX}/(e_{max}-e_{min}) = e' * s \quad mit \quad s = g_{MAX}/(e_{max}-e_{min})}$$

Der Ergebniswert nach der linearen Grauwerttransformation ist damit:

$$\mathbf{g' = (e – e_{min}) * g'_{MAX}/(e_{max}-e_{min}) = (e – e_{min}) * s}$$

damit ist

mult = s und

add = –e_{min}* s

<u>Konkret für das vorliegende Beispiel einer Faltung mit F1:</u>

Theoretisches Minimum nach der Faltung: $e_{min} = 3*0 = 0$
Theoretisches Maximum nach der Faltung: $e_{max} = 3*255$

mult = s = $g_{MAX}/(e_{max}-e_{min}) = 255/(3*255) = 1/3$ und
add = $-e_{min} * s = 0$
d.h.
$g'(i,j) = e/3 + 0 = e/3$

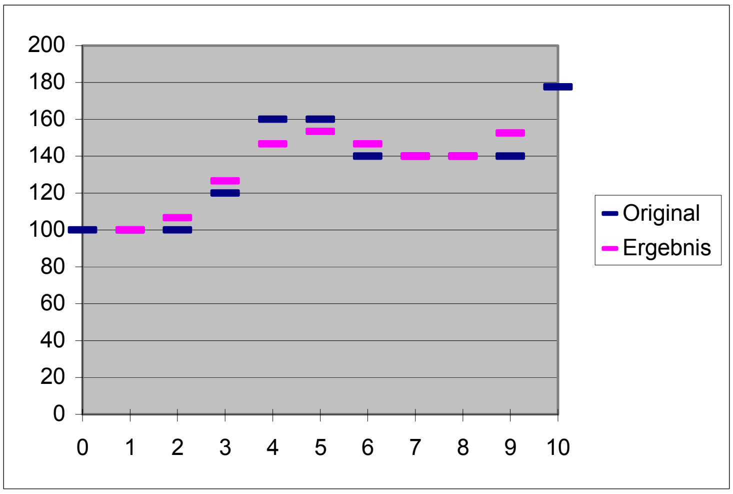
Das hätte man für den vorliegenden Fall natürlich sofort sehen können. Die Berechnung wurde hier exemplarisch an einem besonders einfachen Beispiel durchgeführt.

Mit anderen Worten: Die Ergebnisgrauwerte nach der Faltung müssen durch 3 dividiert werden. Damit erhält man den **Mittelwert**. D.h. Jedes Pixel im Bild erhält den gemittelten Grauwert der 3 horizontalen Nachbarn.

Ergebnis in Zeile 3 nach der linearen Grauwerttransformation (hier Division durch 3):

	100	107	127	147	153	147	140	140	153	

Graphische Darstellung des Ergebnisses in Zeile 3 (Grauwertprofil) nach der linearen Grauwerttransformation:



Effekt: Glättung der Grauwerte über eine Zeile

2. Eindimensionale Faltungsmatrix F2:

1	2	1

Rechnerisches Ergebnis in Zeile 3 nach der Faltung mit F2:

Original:

100	100	100	120	160	160	140	140	140	140	178

Ergebnis:

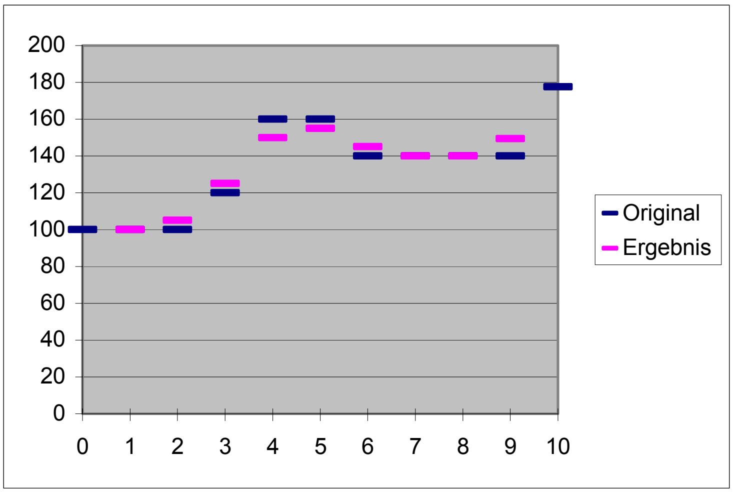
	400	420	500	600	620	580	560	560	598	

Rechnerisches Ergebnis in Zeile 3 nach der linearen Grauwerttrans-formation:

Theoretisches Minimum nach der Faltung: $e_{min} = 4*0 = 0$
Theoretisches Maximum nach der Faltung: $e_{max} = 4*255$
mult = s = $g_{MAX}/(e_{max}-e_{min}) = 255/(4*255) = 1/4$ **und**
add = $-e_{min} * s = 0$
d.h.
$g'(i,j) = e/4 + 0 = e/4$

	100	105	125	150	155	145	140	140	149	

Graphische Darstellung des Ergebnisses in Zeile 3 (Grauwertprofil) nach der linearen Grauwerttransformation:



Effekt: Die Glättungseffekt fällt schwächer aus als bei F1, da das zu bewertende Pixel einen doppelt so hohen Einfluss besitzt wie seine Nachbarn.

3. Eindimensionale Faltungsmatrix F3:

1 0 1

Rechnerisches Ergebnis in Zeile 3 nach der Faltung mit F3:

Original:

100 100 100 120 160 160 140 140 140 140 178

Ergebnis:

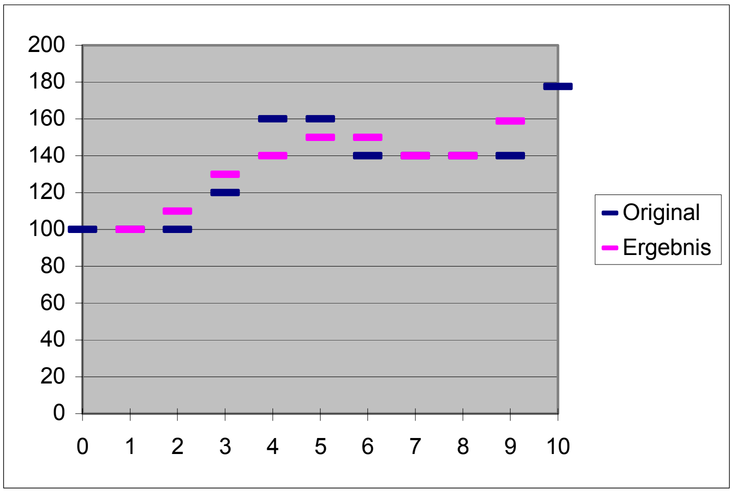
200 220 260 280 300 300 280 280 318

Rechnerisches Ergebnis in Zeile 3 nach der linearen Grauwerttrans-formation:

Theoretisches Minimum nach der Faltung: $e_{min} = 2*0 = 0$
Theoretisches Maximum nach der Faltung: $e_{max} = 2*255$
mult = s = $g_{MAX}/(e_{max}-e_{min}) = 255/(2*255) = 1/2$ und
add = $-e_{min} * s = 0$
d.h.
$g'(i,j) = e/2 + 0 = e/2$

100 110 130 140 150 150 140 140 159

Graphische Darstellung des Ergebnisses in Zeile 3 (Grauwertprofil) nach der linearen Grauwerttransformation:



Effekt: Da der mittlere Wert der Faltungsmatrix 0 ist, können durch diese Faltung 1 Pixel große Störungen beseitigt (im zentralen Pixel) bzw. verringert werden.

4. Eindimensionale Faltungsmatrix F4:

0 -1 0

Rechnerisches Ergebnis in Zeile 3 nach der Faltung mit F4:

Original:

100 100 100 120 160 160 140 140 140 140 178

Ergebnis:

-100 -100 -120 -160 -160 -140 -140 -140 -140

Beachte die negativen Werte!

Rechnerisches Ergebnis in Zeile 3 nach der linearen Grauwerttransformation:

Theoretisches Minimum nach der Faltung: $e_{min} = -1*255 = -255$

Theoretisches Maximum nach der Faltung: $e_{max} = -1*0 = 0$

$\mathbf{mult = s = g_{MAX}/(e_{max}-e_{min}) = 255/(255) = 1}$ **und**

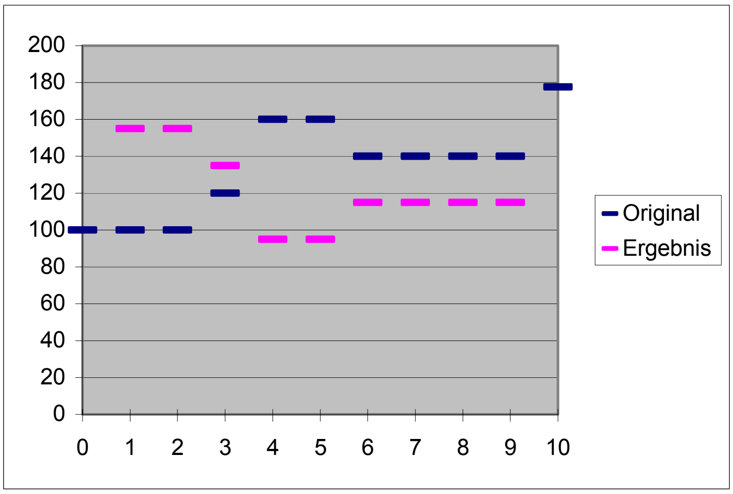
$\mathbf{add = -e_{min} * s = -(-255)*1 = 255}$

d.h.

$g'(i,j) = e + 255$

155 155 135 95 95 115 115 115 115

Graphische Darstellung des Ergebnisses in Zeile 3 (Grauwertprofil) nach der linearen Grauwerttransformation:



Effekt: Es entsteht ein Negativ des Bildes. Ergebniswerte und Originalwerte summieren sich auf 255.

5. Eindimensionale Faltungsmatrix F5:

-1	1	0

Rechnerisches Ergebnis in Zeile 3 nach der Faltung mit F5:

Original:

100	100	100	120	160	160	140	140	140	140	178

Ergebnis:

	0	0	20	40	0	-20	0	0	0	

Beachte die negativen Werte!

Bemerkung:

Beachten Sie, dass die Ergebniswerte die **Differenz** zweier benachbarter Pixel in einer Bildzeile darstellen. Nimmt den Abstand zweier Pixel als 1 an, so entspricht dies geometrisch der Steigung der diskreten Grauwertfunktion in diesem Bereich. Bei einer kontinuierlichen Grauwertfunktion würde der endliche Pixelabstand unendlich klein (=dx) und wir hätten es mit der 1. Ableitung in Zeilenrichtung zu tun. Aus diesem Grund bezeichnet man die Faltung mit F5 als **Differentiation der Bildfunktion in Zeilenrichtung.**

Die Differentiation der Bildfunktion stellt stets eine **Hochpassfilterung** der Funktion dar. Der sichtbare Effekt ist eine **Hervorhebung der Stellen an denen die Grauwertunterschiede hoch sind.** Dies sind vor allem harte Kanten und kleine Störungen. In homogenen Bereichen ist das Faltungergebnis 0!

Beachte: Neben der Linksdifferenz gibt es auch eine Rechtsdifferenz. Beide sind unsymmetrisch, weil das Ergebnis um ein halbes Pixel verschoben ist. Eine symmetrische Differenz ergibt sich mit der Faltungsmatrix

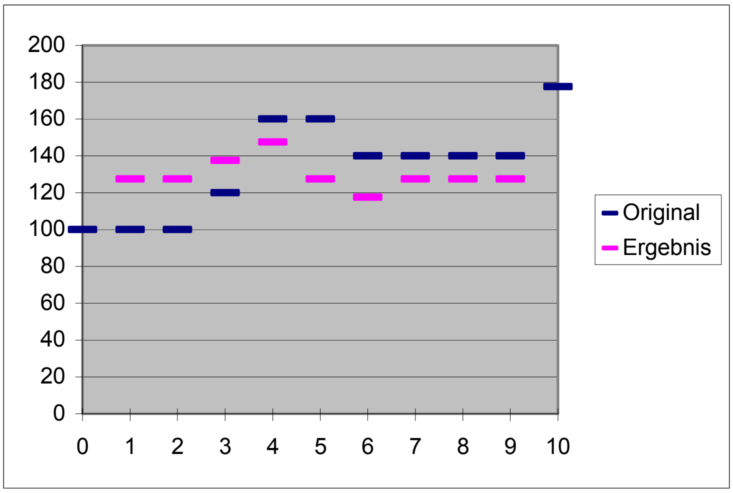
-1	0	1

Rechnerisches Ergebnis in Zeile 3 nach der linearen Grauwerttransformation:

Theoretisches Minimum nach der Faltung: e_{min} = -1*255 + 1*0= -255
Theoretisches Maximum nach der Faltung: e_{max} = +1*255 -1*0 = 255
mult = s = $g_{MAX}/(e_{max}-e_{min})$ = 255/(2*255) = 1/2 **und**
add = $-e_{min}$* s = -(-255)*1/2 = 255/2
d.h.
g' (i,j) = e/2 + 128

	128	128	138	148	128	118	128	128	128	

Graphische Darstellung des Ergebnisses in Zeile 3 (Grauwertprofil) nach der linearen Grauwerttransformation:



Effekt: Kanten und Störungen werden hervorgehoben.

6. Eindimensionale Faltungsmatrix F6:

1 -2 1

Rechnerisches Ergebnis in Zeile 3 nach der Faltung mit F6:

Original:

100 100 100 120 160 160 140 140 140 140 178

Ergebnis:

0 20 20 -40 -20 20 0 0 38

Beachte die negativen Werte!

Bemerkung:

F6 entsteht aus der Differenz von Rechtsdifferenz minus Linksdifferenz.

$$\boxed{1\ \ -2\ \ 1} \quad = \quad \boxed{0\ \ -1\ \ 1} \quad - \quad \boxed{-1\ \ 1\ \ 0}$$

Die Ergebniswerte stellen also die **Differenz** zweier benachbarter Differenzen dar. Dies entspricht geometrisch Änderungen in der Steigung der diskreten Grauwertfunktion in diesem Bereich. Bei einer kontinuierlichen Grauwertfunktion würde der endliche Pixelabstand unendlich klein (=dx) und wir hätten es mit der **2. Ableitung** in Zeilenrichtung zu tun.

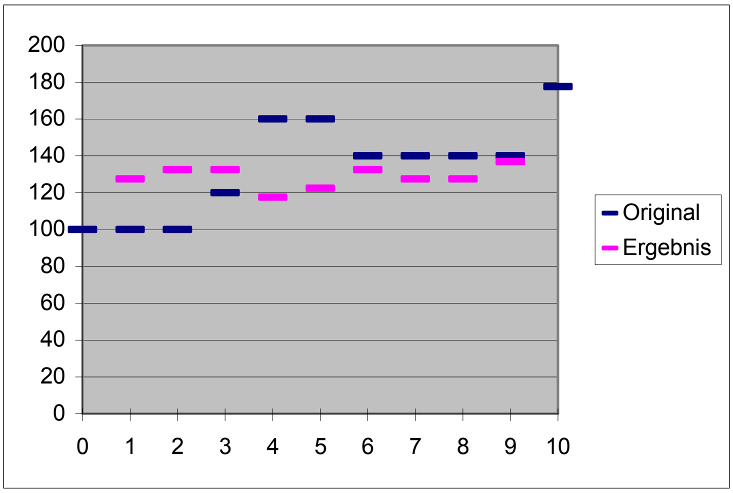
Der sichtbare Effekt ist eine **Hervorhebung der Stellen an denen die Grauwertunterschiede sich stark verändern.** Dies ist der Fall an Stellen wo die Grauwertfunktion einen Knick macht (Wendepunkte bei kontinuierlichen Funktionen), d.h. dort wo eine Kante beginnt oder endet und besonders bei 1 bis 2 Pixel großen Störungen. In homogenen Bereichen und Bereichen konstanter Steigung der Grauwertfunktion ist das Ergebnis 0!

Rechnerisches Ergebnis in Zeile 3 nach der linearen Grauwerttrans-formation:

Theoretisches Minimum nach der Faltung: e_{min} = -2*255 + 2*0= -2*255
Theoretisches Maximum nach der Faltung: e_{max} = +2*255 -2*0 = 2*255
mult = s = $g_{MAX}/(e_{max}-e_{min})$ = 255/(4*255) = 1/4 **und**
add = $-e_{min}$* s = -(-2*255)*1/4 = 255/2
d.h.
g' (i,j) = e/2 + 128

	128	133	133	118	123	133	128	128	137	

Graphische Darstellung des Ergebnisses in Zeile 3 (Grauwertprofil) nach der linearen Grauwerttransformation:



7. Eindimensionale Faltungsmatrix F7:

-1   4   -1

Rechnerisches Ergebnis in Zeile 3 nach der Faltung mit F7:

Original:

100   100   100   120   160   160   140   140   140   140   178

Ergebnis:

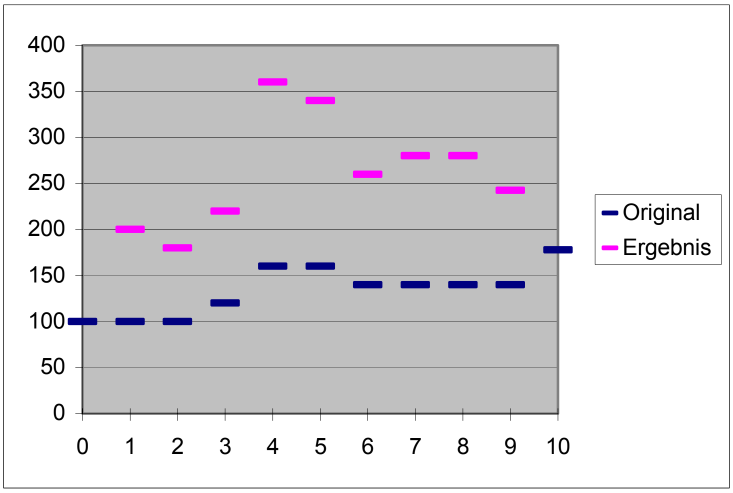
200   180   220   360   340   260   280   280   242

Beachte die hohen Werte!

Bemerkung:

F7 entsteht aus der Subtraktion von F6 (Laplace (1D)) vom doppelt gewichteten Original.

$$\boxed{-1\ \ 4\ \ -1} \quad = \quad \boxed{0\ \ 2\ \ 0} \quad - \quad \boxed{1\ \ -2\ \ 1}$$



Die obige Abbildung zeigt das rechnerische Ergebnis nach der Faltung und vor der linearen Grauwerttransformation. Vergleicht man die Ergebniswerte mit den Originalwerten, so kann man feststellen, dass beim Beginn einer Kante, die von dunklen zu hellen Werten verläuft (hier an der Position 2), erwartungsgemäß eine Absenkung des Ergebniswertes (gegenüber Position 1) erfolgt. Die Änderung der Steigung ist dort positiv. Am anderen Ende der Kante (hier Position 4) ist die Änderung der Steigung negativ und es erfolgt eine Überhöhung. Die beiden Effekte zusammen führen zur Kontrastverstärkung der Kante.

Führt man nun die lineare Grauwerttransformation nach der bisherigen Regel durch, ergibt sich ein gravierender Nachteil, wie aus dem Folgenden hervorgeht.

Rechnerisches Ergebnis in Zeile 3 nach der linearen Grauwerttrans-formation:

Theoretisches Minimum nach der Faltung: e_{min} = -2*255 + 4*0= -2*255

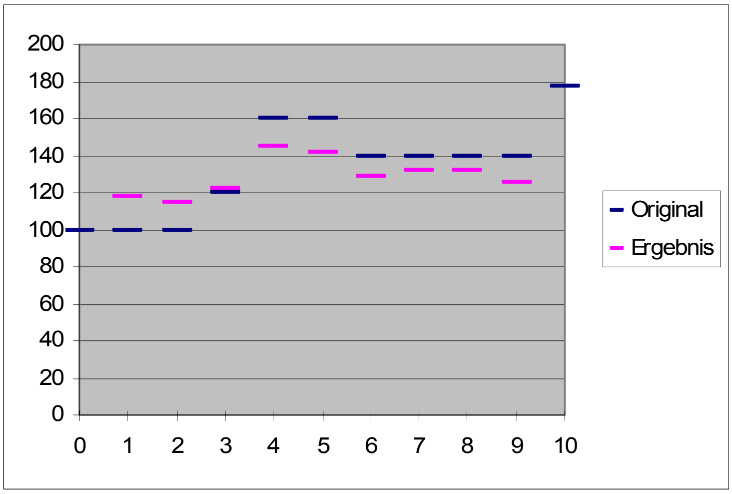
Theoretisches Maximum nach der Faltung: e_{max} = +4*255 -2*0 = 4*255

mult = s = $g_{MAX}/(e_{max}-e_{min})$ = 255/(6*255) = 1/6   **und**

add = –e_{min}* s = -(-2*255)*1/6 = 255/3
d.h.
g’ (i,j) = e/6 + 85

	118	115	122	145	142	128	132	132	125	

Graphische Darstellung des Ergebnisses in Zeile 3 (Grauwertprofil) nach der linearen Grauwerttransformation:



Wie aus der graphischen Darstellung zu ersehen ist, decken sich die Ergebniswerte an den Stellen, wo sie es idealerweise eigentlich tun sollten, leider nicht. So sollte der Ergebniswert in der Position 1 eigentlich 100 und in den Positionen 7 und 8 besser 140 betragen.

Um dieses gewünschte Verhalten zu erreichen, führt man eine andere als die oben angeführte Grauwerttransformation durch:

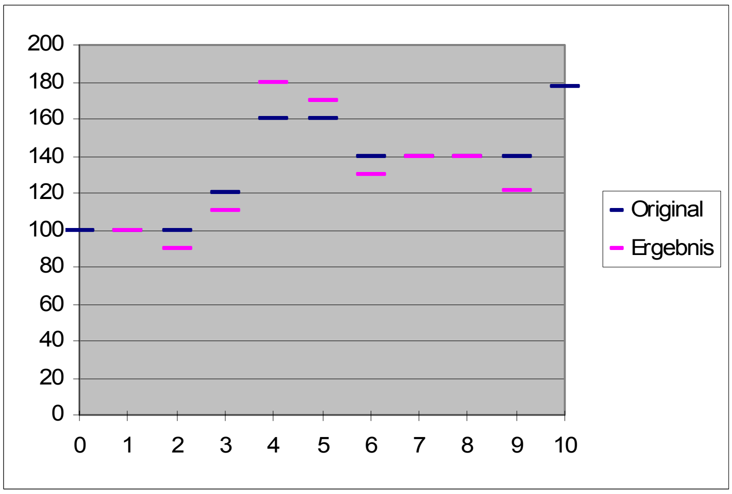
Ist sum die Summe aller Gewichte in der Faltungsmatrix (im vorliegenden Fall also:

sum = -1+4-1 = 2, dann wird mult = 1/sum und add = 0

Hier also: g’ (i,j) = e/2

Dies führt, wie in der Folgezeile ersichtlich, zum gewünschten Ergebnis.

	100	90	110	180	170	130	140	140	121	



Leider ist diese Vorgehensweise nicht so ideal wie es auf den ersten Blick erscheint. Man erkauft sich dieses Verhalten dadurch, dass auch nach der Grauwerttransformation noch negative Werte auftauchen können. Überprüfen Sie dies an dem Beispiel der Pixelfolge 100,0,100 für das mittlere Pixel. Die negativen Werte können dann zum Zweck der Darstellung alle auf den Wert 0 gesetzt werden. Damit ist die Transformation leider nicht mehr linear!!!

8. Generelle Bemerkung zur Transformation nach der Faltung:

Man wähle die Vorschrift
g’ (i,j) = e/sum
wenn sum größer als 0 ist.
sum ist die Summe aller Gewichte in der Faltungsmatrix.

Vergleichen Sie: F1, F2, F3 und F7

Man wähle die Vorschrift
g’ (i,j) = e*mult + add
wenn sum kleiner oder gleich 0 ist.
mult = s = $g_{MAX}/(e_{max}-e_{min})$ **und**
add = $-e_{min} * s$

Vergleichen Sie: F4, F5, F6

9. Beispiel in 2D:

Die Faltungsmatrix sei

0	-1	0
-1	7	-1
0	-1	0

.

Dies ist das 2D-Gegenstück zu F7: Vom (hier) 3-fach gewichteten Original wird die Laplace-Faltungsmatrix

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

abgezogen.

Das Originalbild war:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	100	100	100	120	160	160	120	100	100	100	137
1	100	100	100	120	160	160	120	100	100	100	137
2	100	100	100	120	160	160	120	100	100	100	137
3	100	100	100	120	160	160	140	140	140	140	178
4	100	100	100	120	160	160	140	140	140	140	177
5	100	100	100	120	160	160	120	100	100	100	136
6	100	100	100	120	160	160	120	100	100	100	136

Das Ergebnis nach der Faltung ist:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0											
1		300	280	340	520	520	340	280	300	263	
2		300	280	340	520	520	320	240	260	223	
3		300	280	340	520	500	420	460	460	422	
4		300	280	340	520	500	420	460	460	423	
5		300	280	340	520	520	320	240	260	224	
6											

und nach der Grauwerttransformation: **g' (i,j) = e/sum = e/3**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0											
1		100	93	113	173	173	113	93	100	88	
2		100	93	113	173	173	107	80	87	74	
3		100	93	113	173	167	140	153	153	141	
4		100	93	113	173	167	140	153	153	141	
5		100	93	113	173	173	107	80	87	75	
6											

Der Kontrastverschärfungseffekt an den Kantenrändern ist den Werten deutlich zu entnehmen.