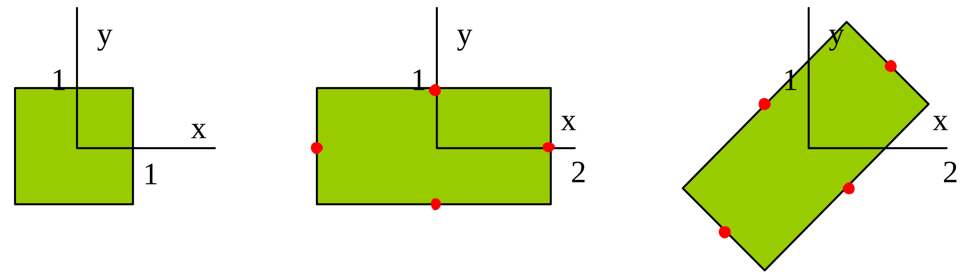
Beispiel für eine zusammengesetzte Transformation

Das Beispiel soll zeigen, dass Matrixmultiplikationen nicht kommutativ sind, d.h. dass bei einer unterschiedlichen Abfolgefolge zweier Transformationen sich die Ergebnisse im Allgemeinen unterscheiden.

I. Wird das grüne Quadrat mit der Seitenlänge 2 und dem Mittelpunkt im Ursprung zunächst in x-Richtung mit dem Faktor 2 skaliert und anschließend um 45 Grad gedreht, so sieht das Resultat wie folgt aus:



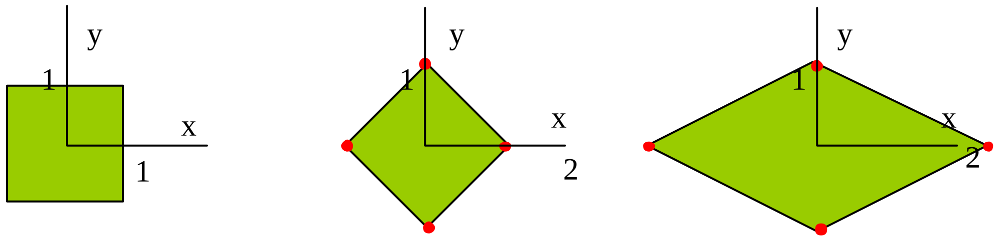
Mathematisch ergibt sich die aktuelle Transformationsmatrix ATM wie folgt:

$$[ATM]=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Probe: Transformation der 4 rot markierten Punkte des Quadrats (weil diese einfachere Werte ergeben als die Eckpunkte):

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

II. Wird das grüne Quadrat zuerst um 45 Grad gedreht und anschließend in x-Richtung mit dem Faktor 2 skaliert, so sieht das Resultat wie folgt aus:



$$[ATM]=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2}&-\frac{1}{2}\sqrt{2}&0&0\\\frac{1}{2}\sqrt{2}&\frac{1}{2}\sqrt{2}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&-\sqrt{2}&0&0\\\frac{1}{2}\sqrt{2}&\frac{1}{2}\sqrt{2}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Probe: Transformation der 4 Eckpunktepunkte des Quadrats (weil diese einfachere Werte ergeben als die Eckpunkte):

$$\begin{bmatrix}\sqrt{2}&-\sqrt{2}&0&0\\\frac{1}{2}\sqrt{2}&\frac{1}{2}\sqrt{2}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2\sqrt{2}&0&2\sqrt{2}\\\sqrt{2}&0&-\sqrt{2}&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$