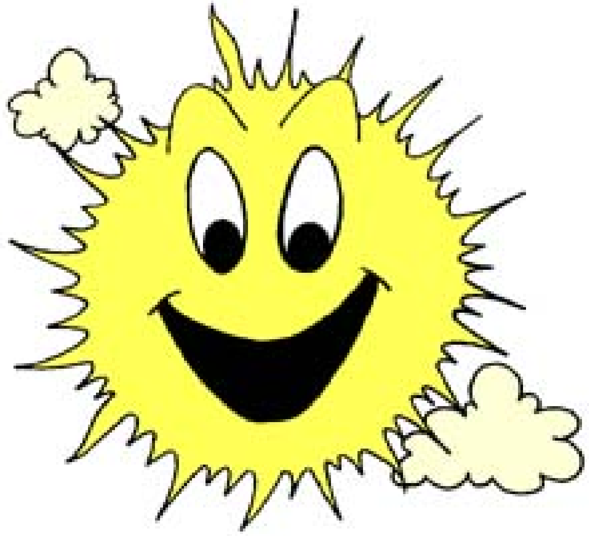
Wiederholung der 7. Vorlesung



5.2 Minterme n=2

x_2	x_1	$x_2 \wedge x_1$	$x_2 \wedge \overline{x}_1$	$\overline{x}_2 \wedge x_1$	$\overline{x}_2 \wedge \overline{x}_1$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

Kombination aller Minterme aus n=2

Bei den einzelnen Kombinationen werden Variablen mit dem Wert **0** negiert, um für den jeweiligen Minterm m_i den Wert **1** zu erzeugen.

5.4 Disjuktive Normalform (DNF)

- Eine beliebige boolesche Funktion lässt sich durch die disjunktive Verknüpfung geeigneter Minterme realisieren.
- Bei vorgegebener Funktion nimmt man genau die Minterme, welche den Wert '1' an den Stellen erzeugen, an denen die Funktion '1'-Werte ausgibt. Variablen, die bei dieser Kombination den Wert **0** haben werden negiert.
- Durch die disjunktive Verknüpfung dieser Minterme erhält man **genau die vorgegebene Funktion → Disjunktive Normalform** (DNF)

5.3 Maxterme n=2

x_2	x_1	$x_2 \vee x_1$	$x_2 \vee \overline{x}_1$	$\overline{x}_2 \vee x_1$	$\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Kombination aller Maxterme aus n=2

Bei den einzelnen Kombinationen werden Variablen mit dem Wert **1** negiert, um für den jeweiligen Maxterm M_i den Wert **0** zu erzeugen.

5.5 Konjunktive Normalform (KNF)

- Eine beliebige boolesche Funktion lässt sich durch konjunktive Verknüpfung geeigneter Maxterme beschreiben.
- Für jede Eingangskombination, an der die Funktion den Ausgangswert '0' produziert, verknüpft man die zugehörigen Maxterme mittels Konjunktion. Variablen, die bei dieser Kombination den Wert **1** haben werden negiert
- Durch die konjunktive Verknüpfung dieser Maxterme erhält man **genau die vorgegebene Funktion → Konjunktive Normalform** (KNF)

5.7 Disjunktive Minimalformen in KV-Diagr.

Kombination der einfachen Terme ermöglicht Beschreibung aufwändiger Funktionen.

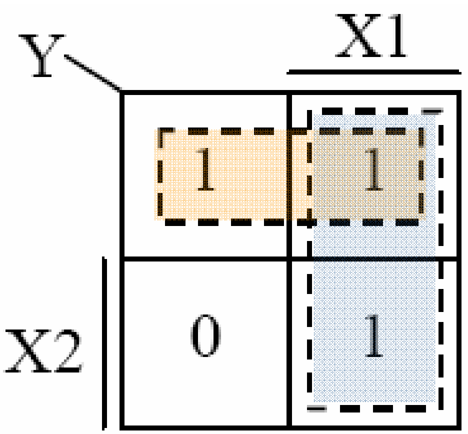
Beispiel: Gesucht ist Minimalform der Funktion aus 3 Mintermen (Vollkonjunktionen):

$Y = (\neg X1 \wedge \neg X2) \vee (X1 \wedge \neg X2) \vee (X1 \wedge X2)$

$= m0 \vee m1 \vee m3$

ODER-Verknüpfung von X1 und ¬X2:

$$\boxed{Y = X1 \vee \overline{X2}}$$



X2	X1	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Disjunktive Minimalform der Funktion (DMF)

5.7 KV-Diagramme mit Vollkonjunktionen

Ein KV-Diagramm hat stets so viele Plätze (2^n), wie **Minterme** (Vollkonjunktionen) möglich sind.

Eine **1** auf einem Platz eines KV-Diagramm steht für eine Vollkonjunktionen.

Sind Vollkonjuktionen „benachbart“, können sie zu „Päckchen“ zusammengefasst werden.

In einem Päckchen dürfen $\mathbf{2^i}$ benachbarte Vollkonjunktionen zusammengefasst werden.

Bei mehreren Päckchen ergibt sich die vereinfachte Gleichung als **ODER**-Verknüpfung der einzelnen Päckcheninhalte. ➔ disjunktive Minimalform.

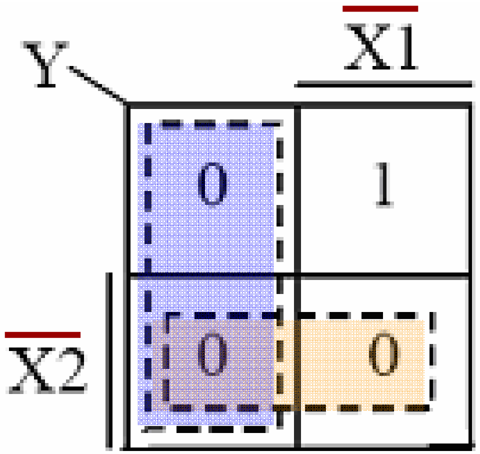
5.7 Konjunktive Minimalformen in KV-Diagr.

KV-Diagramme können auch mit den Maxtermen der zugehörigen Funktion belegt werden.

Beispiel: Gesucht ist Minimalform der Funktion aus 3 Maxtermen (Volldisjunktionen):

$Y = (X1 \vee X2) \wedge (\neg X1 \vee X2) \wedge (\neg X1 \vee \neg X2)$

$= M0 \wedge M2 \wedge M3$



X2	X1	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

UND-Verknüpfung von X1 und ¬X2:

$$\boxed{Y = X1 \wedge \overline{X2}}$$

Konjunktive Minimalform der Funktion (KMF)

!!! Maxterme: Variablen = 1 werden invertiert !

5.7 KV-Diagramme mit Volldisjunktionen

Ein KV-Diagramm hat stets so viele Plätze (2^n), wie **Maxterme** (Volldisjunktionen) möglich sind.

Eine **0** auf einem Platz eines KV-Diagramm steht für eine Volldisjunktionen.

Sind Volldisjuktionen „benachbart“, können sie zu „Päckchen“ zusammengefasst werden.

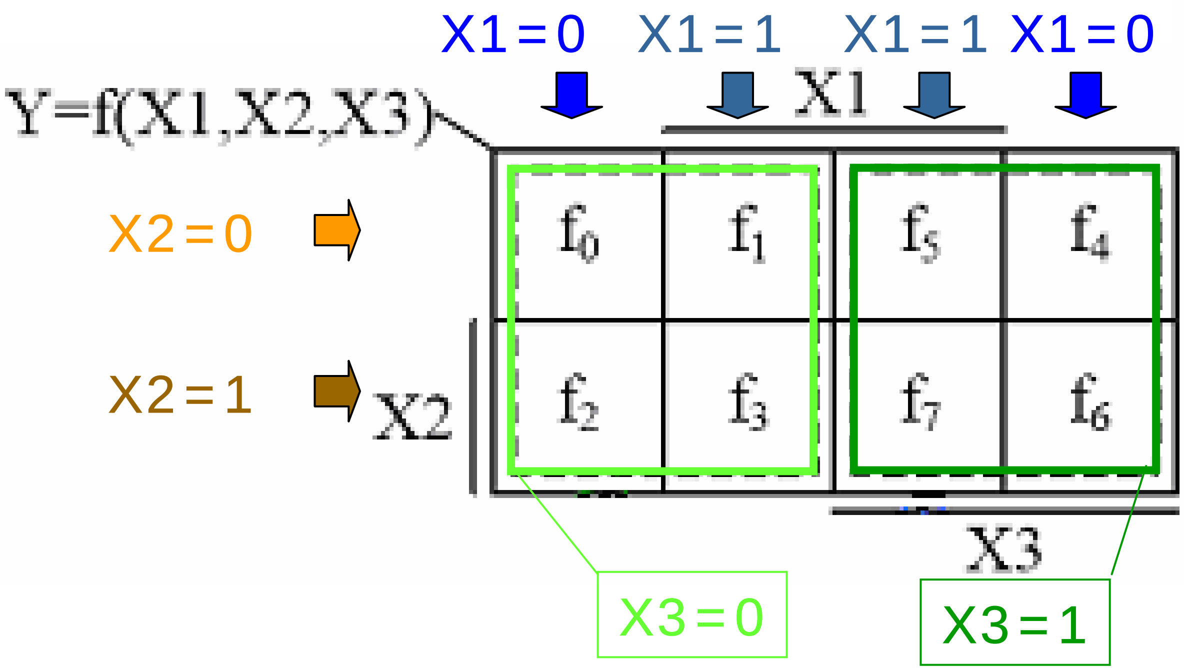
In einem Päckchen dürfen $\mathbf{2^i}$ benachbarte Volldisjunktionen zusammengefasst werden.

Bei mehreren Päckchen ergibt sich die vereinfachte Gleichung als **UND**-Verknüpfung der einzelnen Päckcheninhalte. ➔ konjunktive Minimalform.

5.7 KV-Diagramm für n=3

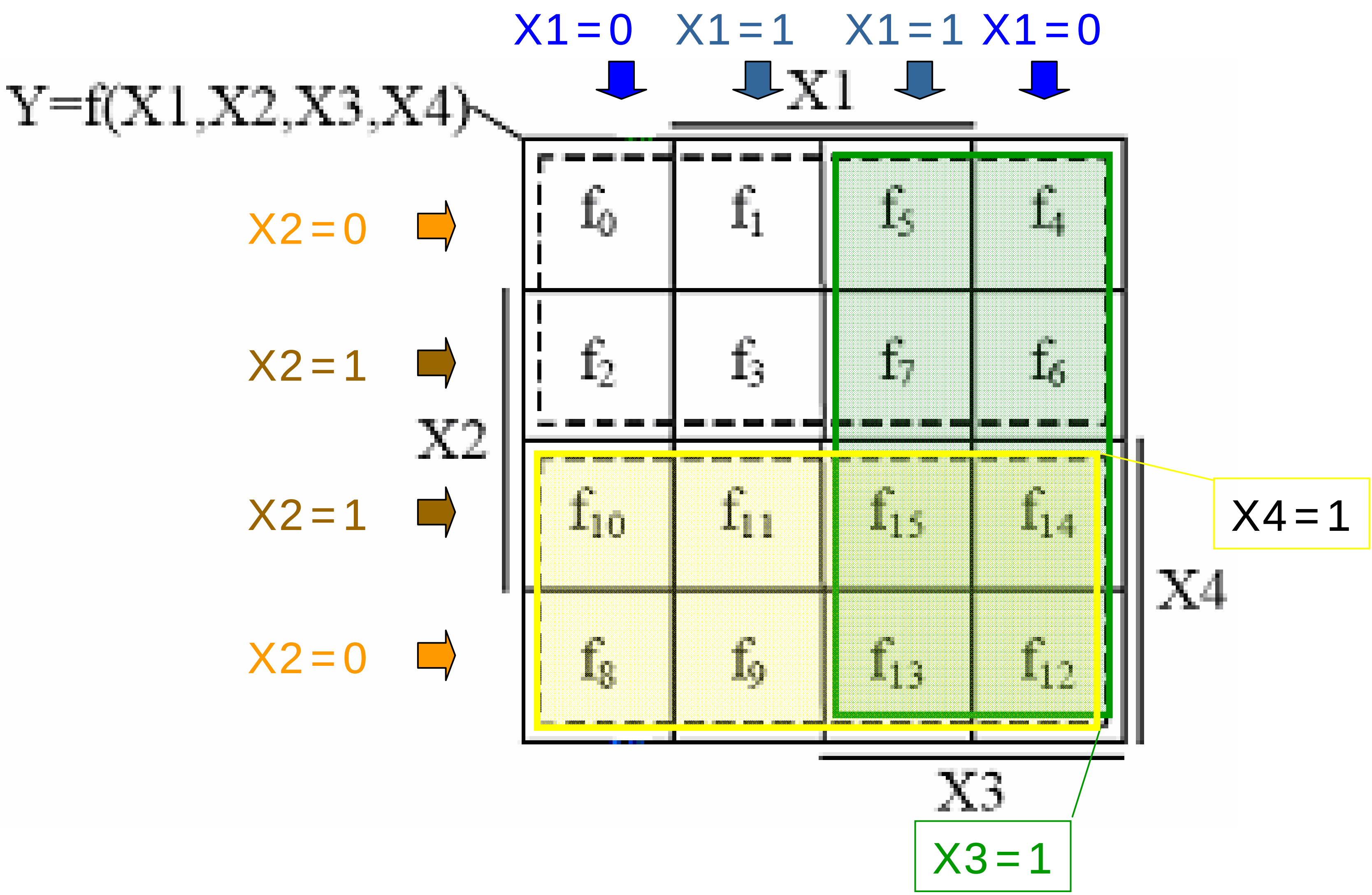
X3	X2	X1	Y
0	0	0	f_0
0	0	1	f_1
0	1	0	f_2
0	1	1	f_3
1	0	0	f_4
1	0	1	f_5
1	1	0	f_6
1	1	1	f_7

Von der Wertetabelle ausgehend wird zuerst X3=0 gesetzt und das KV-Diagramm für X1=0, X1=1 sowie X2=0, X2=1 gezeichnet.

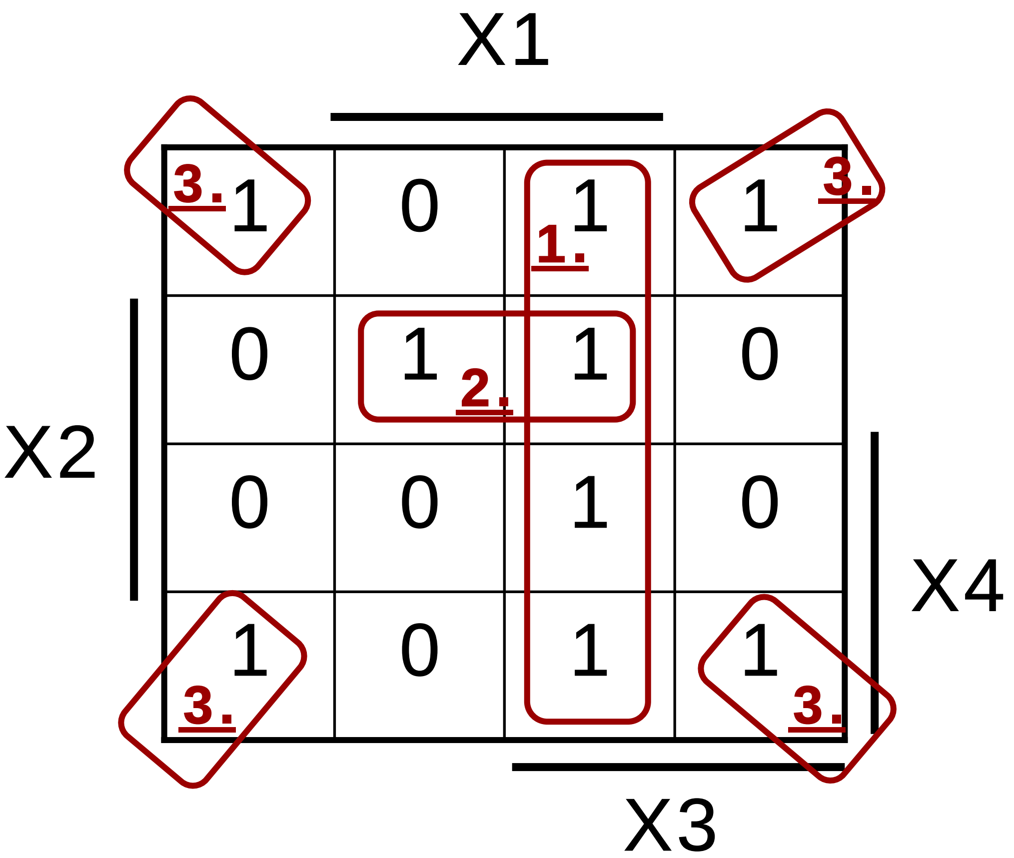


Für X3=1 wird das KV-Diagr. An X1=1 gespiegelt und rechts daneben gezeichnet.

5.7 KV-Diagramm für n=4



5.7 Beispiel für KV-Diagramm für n=4



Päckchen finden:

1. Päckchen:
X1∧X3

2. Päckchen:
X1∧X2∧¬X4

3. Päckchen:
¬X1∧¬X2

Disjunktive Minimalform (DMF) beschreibt Funktion (durch VerODERung der „Päckchen“):

$$Y = (X_1 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \overline{X_4}) \vee (\overline{X_1} \wedge \overline{X_2})$$

5.7 Implikanten

Definition Implikant:

Fasst man Min- bzw. Maxterme einer Funktion so zusammen, dass deren Verbund durch einen Term geringerer Komplexität, d.h. mit einer reduzierten Anzahl von Eingangsvariablen, beschrieben werden kann, so wird der resultierende Term als **Implikant** bezeichnet.

Die **Anzahl** der in einem Implikanten **zusammengefassten Min- bzw. Maxterme** bildet eine **2er-Potenz**.

5.7 Primimplikanten (PI)

Ist ein Implikant einer booleschen Funktion in keinem anderen Implikanten vollständig enthalten, wird er als **Primimplikant** bezeichnet.

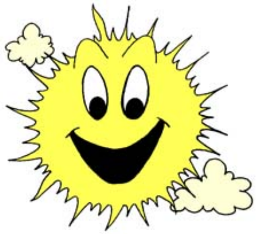
Bezeichnung für die so groß wie möglich gewählten Blöcke von „Einsen“ im Karnaugh-Diagramm (in der DNF)

5.7 Kernprimimplikanten (essentieller PI)

Informatik

- Enthält ein Primimplikant (PI) mindestens einen **Min- bzw. Maxterm**, der **in keinem anderen Primimplikanten enthalten** ist, bezeichnet man diesen als **Kern-Primimplikanten**.
- → die minimale Lösung enthält mindestens die essentiellen Primimplikanten .
- **Nicht-essentielle PI** sind Primimplikanten, die keine Kern-Primimplikanten sind.
- **Redundante PI** sind nicht-essentielle PI die nur von essentielle PI bereits überdeckte „1“en bzw. „0“en enthalten .

Ende der Wiederholung



→ → → → → → → → → → → → → → → → →

5.7 Beispiel

X3	X2	X1	Y	Minterm	I_1	I_2	I_3
0	0	0	0				
0	0	1	1	$m_1 = (\neg X3) \wedge (\neg X2) \wedge X1$		x	x
0	1	0	1	$m_2 = (\neg X3) \wedge X2 \wedge (\neg X1)$	x		
0	1	1	1	$m_3 = (\neg X3) \wedge X2 \wedge X1$	x	x	x
1	0	0	0				
1	0	1	1	$m_5 = X3 \wedge (\neg X2) \wedge X1$			x
1	1	0	0				
1	1	1	1	$m_7 = X3 \wedge X2 \wedge X1$			x

- $I1 = (\neg X3) \wedge X2$, aus m2 und m3
- $I2 = (\neg X3) \wedge X1$, aus m1 und m3
- $I3 = X1$, aus m1, m3, m5 und m7
- I2 ist vollständig in I3 enthalten

➔ $Y = I1 \vee I3 = ((\neg X3) \wedge X2) \vee X1$

KV-Diagramm

		X1	X1	
	0	1	1	0
X2	1	1	1	0
			X3	X3

5.7 Lokalisierung Implikanten im KV-Diagr.

		X1	X1	
	0	1	1	0
X2	1	1	1	0
			X3	X3

$I1 = (\neg X3) \wedge X2$

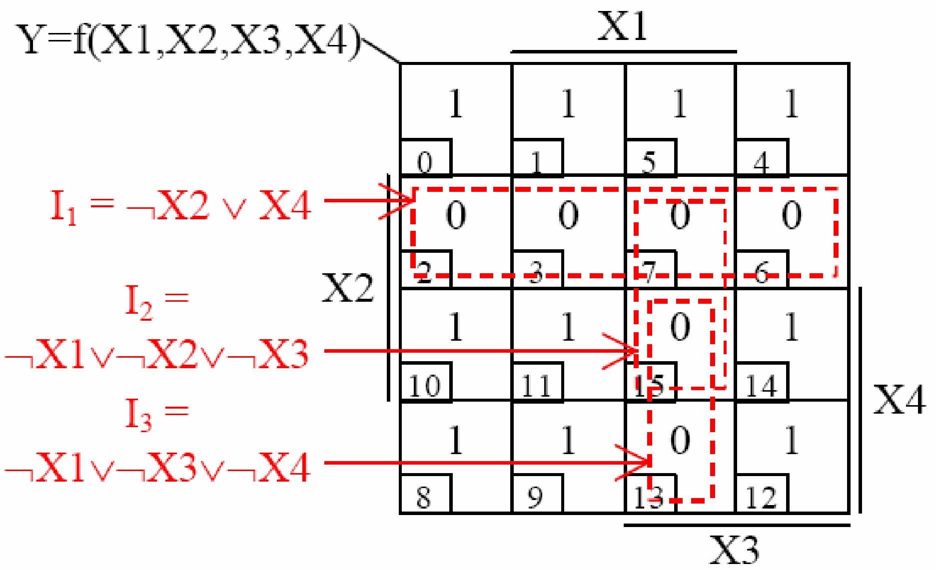
$I2 = (\neg X3) \wedge X1$

$I3 = X1$

- **Implikanten** bilden sich aus 2^i benachbarten Feldern
- Lässt sich ein Implikant nicht mehr mit benachbarten Implikanten zusammenfassen, ist dieser ein **Primimplikant**
- **I1** und **I3** sind **Kernprimimplikanten**, weil
  - Minterm m2 nur in I1
  - Minterme m3, m5 und m7 nur in I3

  enthalten sind.

5.7. Beispiel Konjunktive Minimal-Form



X4	X3	X2	X1	Y	I_1	I_2	I_3
0	0	0	0	1			
0	0	0	1	1			
0	0	1	0	0	M_2		
0	0	1	1	0	M_3		
0	1	0	0	1			
0	1	0	1	1			
0	1	1	0	0	M_6		
0	1	1	1	0	M_7	M_7	
1	0	0	0	1			
1	0	0	1	1			
1	0	1	0	1			
1	0	1	1	1			
1	1	0	0	1			
1	1	0	1	0			M_{13}
1	1	1	0	1			
1	1	1	1	0		M_{15}	M_{15}

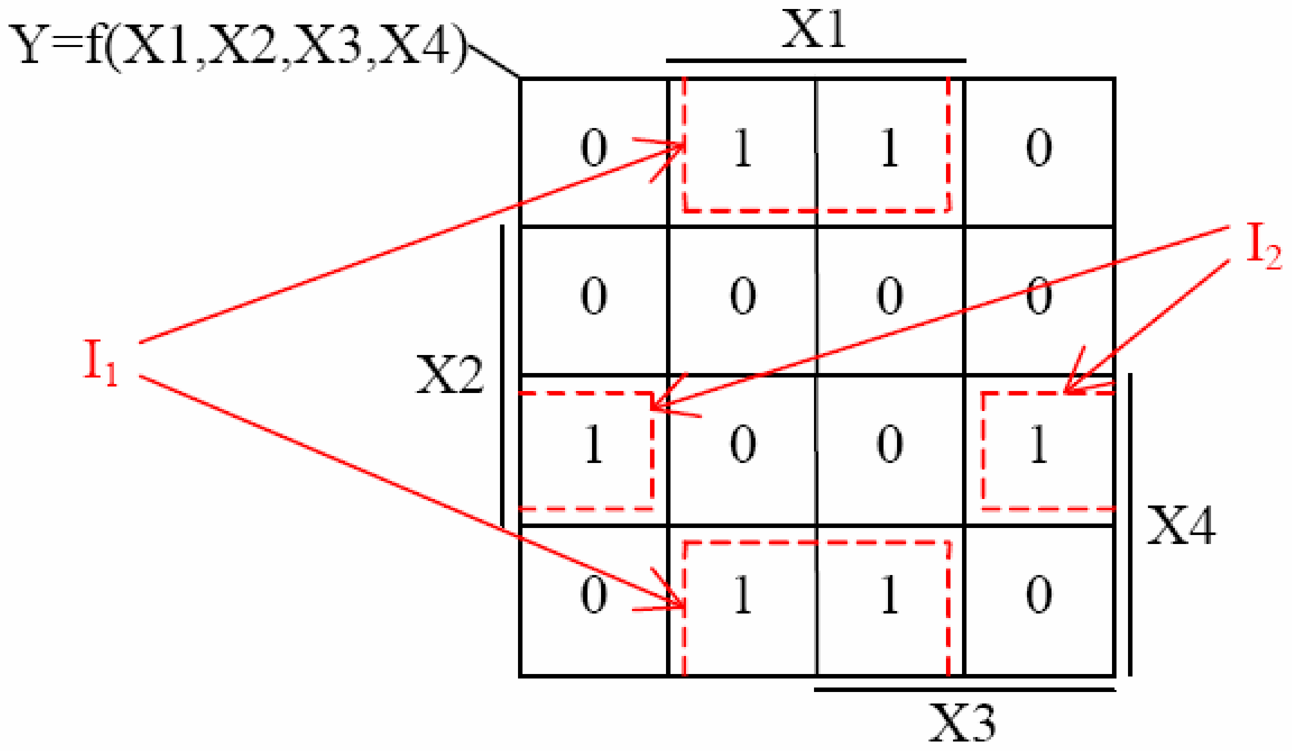
PI I1 ist Kernprimimplikant

PI I2 ist kein Kernprimimplikant

Pi I3 ist Kernprimimplikant

➔ $Y = I1 \wedge I3 = (\neg X2 \vee X4) \wedge (\neg X1 \vee \neg X3 \vee \neg X4)$

5.7. Nachbarschaften am Rand von KV-D.



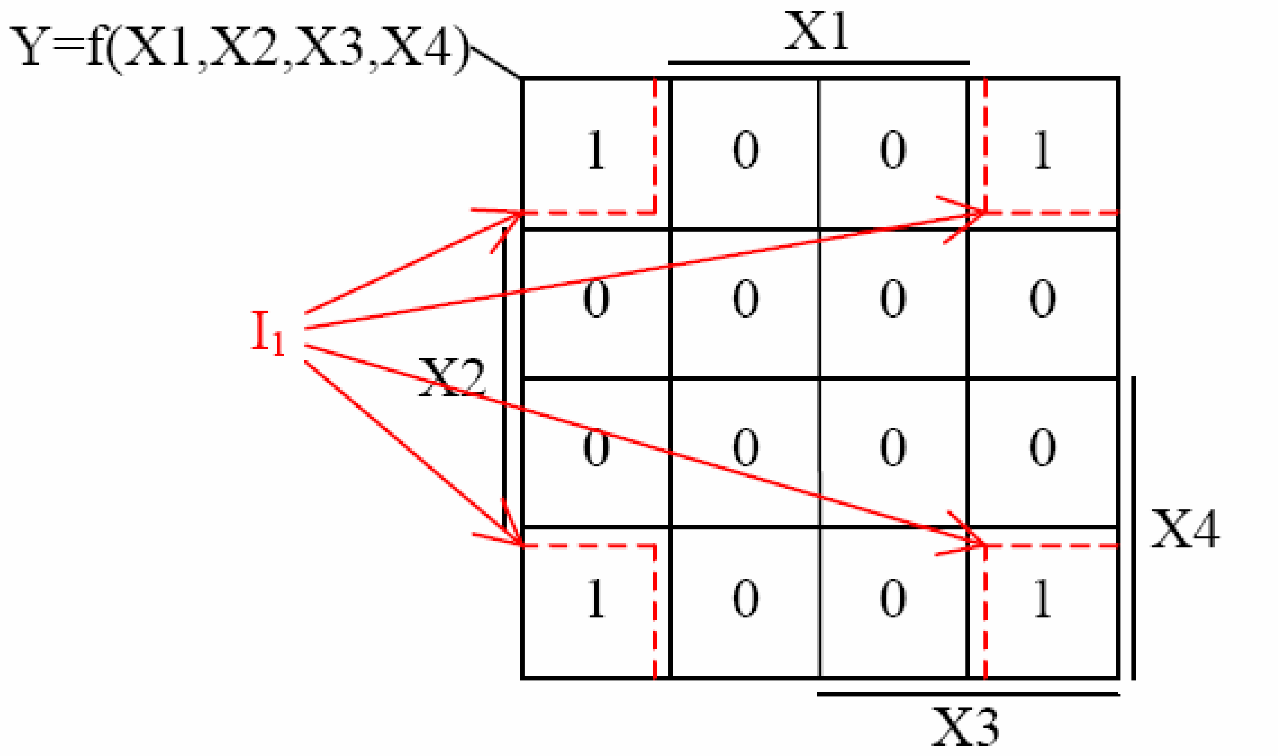
Primimplikant I1 = $(X1 \wedge (\neg X2))$

Primimplikant I2 = $((\neg X1) \wedge X2 \wedge X4)$

Disjuktive Minimalform DMF ?

➔ $Y = I1 \vee I2 = (X1 \wedge (\neg X2)) \vee ((\neg X1) \wedge X2 \wedge X4)$

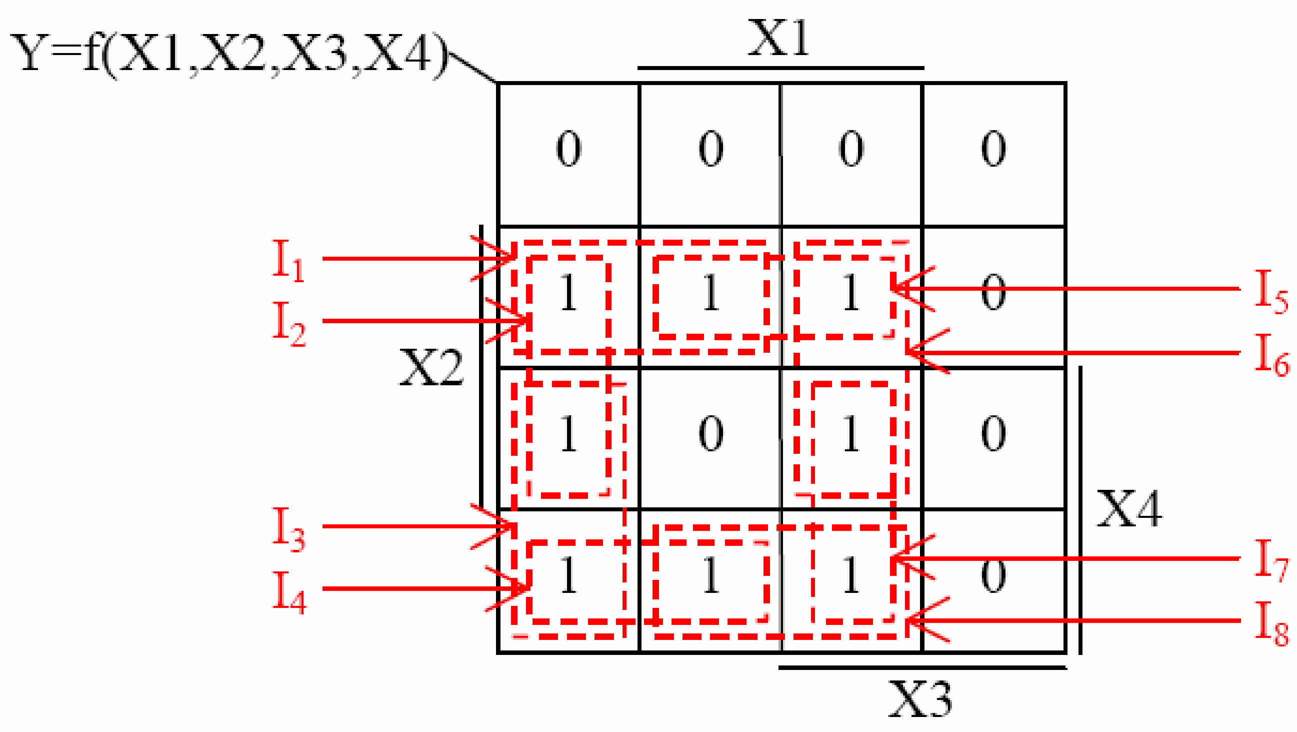
5.7. Nachbarsch. am Rand von KV-D. (2)



Es gibt nur einen PI: I1 = (¬X1∧¬X2)

Disjuktive Minimalform DMF ?

➔ Y = (¬X1∧¬X2)



Beispiel enthält keine Kern-Primimplikanten in der Disjuktive Minimalform DMF

5.8 Quine und Mc Cluskey – Verfahren

Minimierungsverfahren von Quine und Mc Cluskey eignet sich für die Implementierung auf Rechnern. Es wird im Folgenden für die DNF vorgestellt.

Für die KNF würde es prinzipiell in ähnlicher Weise erfolgen.

1. Ermittlung aller Minterme der Funktion.
2. Unterteilung der Minterme in Gruppen. Eine Gruppe fasst Minterme mit gleicher Anzahl negierter Eingangsvariablen zusammen.
3. Paarweises Zusammenfassen von Termen benachbarter Gruppen zu Termen geringerer Komplexität durch Anwendung der 5. Kürzungsregel. Kennzeichnung der zusammengefassten Terme.

...

5.8 Quine und Mc Cluskey – Verfahren (2)

...

- Wiederholung von Schritt 3 für die zusammengefassten Terme, bis keine Vereinfachung mehr durchgeführt werden kann.
  Ist keine Vereinfachung mehr möglich, bilden alle nicht gekennzeichneten Minterme und Terme die Primimplikanten der Funktion.
- Ermittlung der Kern-Primimplikanten aus den gefundenen Primimplikanten. Die Kern-Primimplikanten gehören auf jeden Fall zu den Termen der gesuchten Funktion.
- Hinzufügen von Primimplikanten zur Funktion, bis alle Minterme der Funktion berücksichtigt sind.

5.8 Beispiel Quine und Mc Cluskey

X4	X3	X2	X1	Y		Gruppe	X4	X3	X2	X1	Y		Gruppe
0	0	0	0	1	m_0	4	1	0	0	0	0		
0	0	0	1	0			1	0	0	1	0		
0	0	1	0	0			1	0	1	0	0		
0	0	1	1	1	m_3	2	1	0	1	1	1	m_{11}	1
0	1	0	0	0			1	1	0	0	0		
0	1	0	1	1	m_5	2	1	1	0	1	0		
0	1	1	0	1	m_6	2	1	1	1	0	0		
0	1	1	1	1	m_7	1	1	1	1	1	1	m_{15}	0

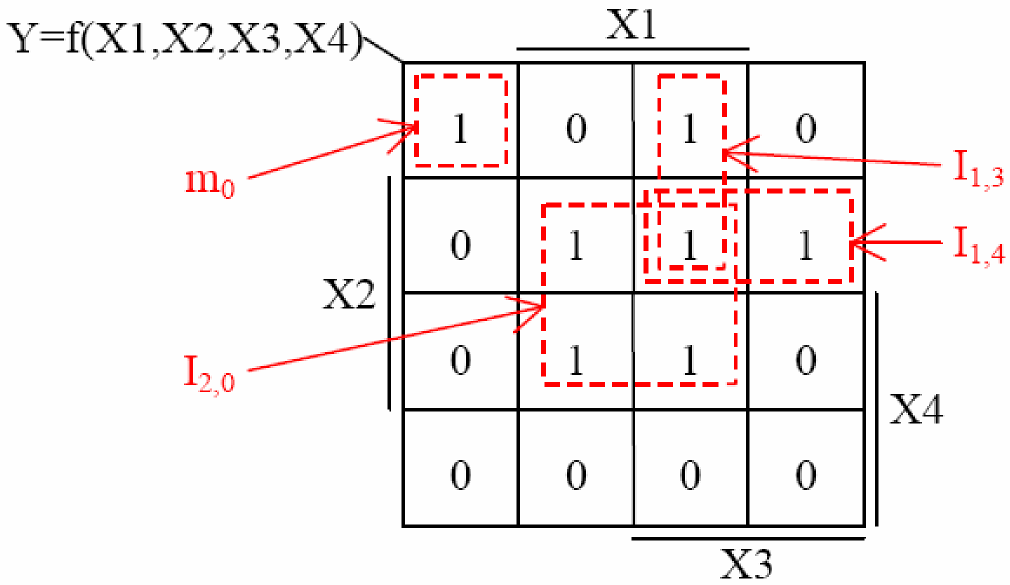
Minterme		1. Vereinfachung		2. Vereinfachung
Gruppe 0:				
$m_{15}=X4\wedge X3\wedge X2\wedge X1$	x	$I_{1,0}=m_{15}\vee m_7=X3\wedge X2\wedge X1$ $I_{1,1}=m_{15}\vee m_{11}=X4\wedge X2\wedge X1$	x x	$I_{2,0}=I_{1,0}\vee I_{1,5}=X2\wedge X1$ $(I_{2,1}=I_{1,1}\vee I_{1,2}=I_{2,0})$
Gruppe 1:				
$m_7=\neg X4\wedge X3\wedge X2\wedge X1$ $m_{11}=X4\wedge\neg X3\wedge X2\wedge X1$	x x	$I_{1,2}=m_7\vee m_3=\neg X4\wedge X2\wedge X1$ $I_{1,3}=m_7\vee m_5=\neg X4\wedge X3\wedge X1$ $I_{1,4}=m_7\vee m_6=\neg X4\wedge X3\wedge X2$ $I_{1,5}=m_{11}\vee m_3=\neg X3\wedge X2\wedge X1$	x x	
Gruppe 2:				
$m_3=\neg X4\wedge\neg X3\wedge X2\wedge X1$ $m_5=\neg X4\wedge X3\wedge\neg X2\wedge X1$ $m_6=\neg X4\wedge X3\wedge X2\wedge\neg X1$	x x x			
Gruppe 3				
Gruppe 4:				
$m_0=\neg X4\wedge\neg X3\wedge\neg X2\wedge\neg X1$				

→ gefundene Terme:
$I_{2,0}$
$I_{1,3}$
$I_{1,4}$
m_0

5.8 Beispiel Quine und Mc Cluskey (2)

Funktion besitzt vier Primimplikanten: m_0, $I_{1,3}$, $I_{1,4}$, und $I_{2,0}$. Entscheiden, welche der Primimplikanten für die Minimalform der Funktion benötigt werden.
→ Kern-Primimplikanten ermitteln

Minterm	m_0	$I_{1,3}$	$I_{1,4}$	$I_{2,0}$
m_0	x			
m_3				x
m_5		x		
m_6			x	
m_7		x	x	x
m_{11}				x
m_{15}				x



Alle PI sind auch essentielle PI

5.8 2.Beispiel Quine und Mc Cluskey

x4	x3	x2	x1	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

DNF enthält folgende Minterme

m	Vektor
0	0000
2	0010
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
10	1010
11	1011

Kombination ergibt

m	Vektor
0,2	00-0
0,4	0-00
2,0	wie oben
2,6	0-10
2,10	-010
4,0	wie oben
4,5	010-
4,6	01-0
5,4	wie oben
5,7	01-1
6,2	wie oben
6,4	wie oben
6,7	011-
7,5	wie oben
7,6	wie oben
10,2	wie oben
10,11	101-
11,10	wie oben

5.8 2.Beispiel Quine und Mc Cluskey (2)

FHD Informatik

Es bleiben also folgende Kombinationen

m	Vektor
0,2	00-0
0,4	0-00
2,6	0-10
2,10	-010
4,5	010-
4,6	01-0
5,7	01-1
6,7	011-
10,11	101-

Zusammenfassung der Nachbarterme

m	Vektor
0,2+4,6	0--0
2,10	-010
4,5+6,7	01--
10,11	101-

Die **optimierte** Funktion lautet dann:

$y = \neg x4 \cdot \neg x1 + \neg x3 \cdot x2 \cdot \neg x1 + \neg x4 \cdot x3 + x4 \neg \cdot x3 \cdot x2$

Am KV-Diagramm kann man erkennen, dass die Lösung noch nicht optimal ist. Ein PI ist übrig.

Liegt an der zufälligen Streichungsreihenfolge.

		x1	x1		
	1	0	1	1	
x2	1	0	1	1	
x2	1	1	0	0	x4
	0	0	0	0	x4
			x3	x3	

5.8 2.Beispiel Quine und Mc Cluskey (3)

m	Vektor	ursprünglich enthalten
0,2;4,6	0–0	0000 0010 0100 0110
2,10	-010	~~0010 1010~~
4,5;6,7	01--	0100 0101 0110 0111
10,11	101-	1010 1011

Wenn man nun gezielt die Doppel so streicht, daß eine ganze Zeile überflüssig wird, findet man das tatsächliche Optimum. In diesem Fall würde die zweite Zeile entfallen.

Die **optimierte** Funktion lautet dann:

$y = \neg x4 \cdot \neg x1 + \neg x4 \cdot x3 + x4 \neg \cdot x3 \cdot x2$

5.8 Binäre Entscheidungsdiagramme

Boolesche Ausdrücke können auch durch sogenannte geordnete binäre Entscheidungsdiagramme (**OBDD** Ordered Boolean Decision Diagram) dargestellt werden. Diese sind oft sehr kompakt und lassen sich algorithmisch effizient behandeln.

OBDDs finden in vielen Bereichen der Informatik eine Anwendung.

5.8 Binäre Entscheidungsdiagramme (2)

Ein OBDD ist ein gerichteter azyklischer Graph mit Wurzel, Zwischenknoten und zwei Endknoten (0-Knoten und 1-Knoten) ohne Ausgangskanten.

Die Zwischenknoten sind mit Booleschen Variablen beschriftet.

Von jedem Zwischenknoten gehen genau zwei Kanten aus (0-Kante und 1-Kante).

Die Variablen sind linear geordnet, z.B. a < b < c <…. , und tauchen in dieser Reihenfolge von der Wurzel beginnend im Graphen auf, d.h., jedem Zwischenknoten ist ein Variablenname zugeordnet, wobei gilt, daß für alle Pfade von der Wurzel des Graphen zu einem der beiden Endknoten die Variablen in der gleichen Reihenfolge auftreten.

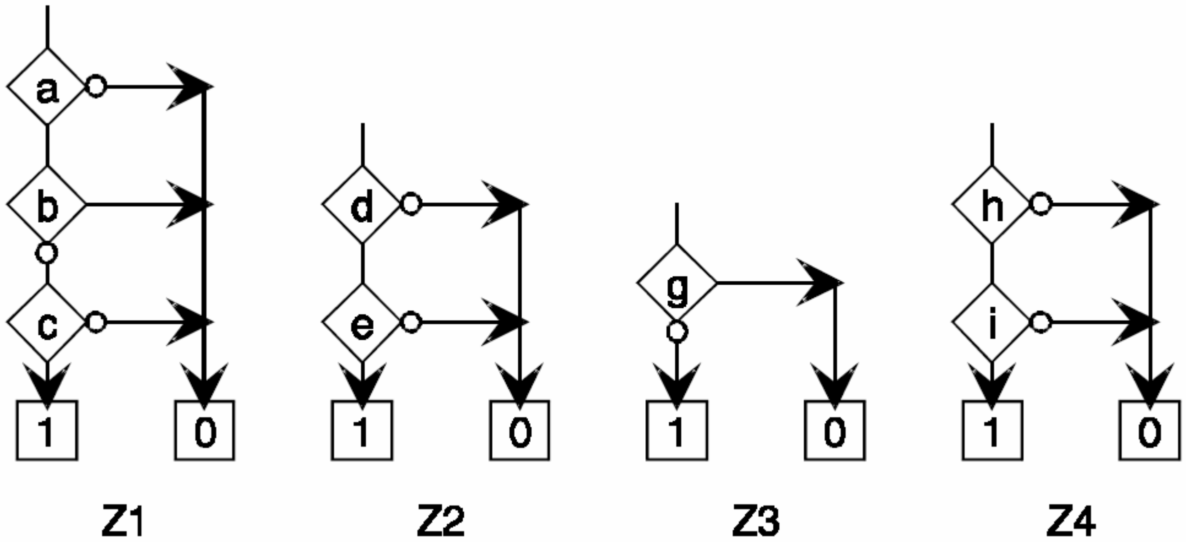
Es müssen aber nicht in jedem Pfad alle Variablennamen auftreten! (Ordnung).

5.8 Beispiel OBDD

Der Boolescher Ausdruck $Z = (a\overline{b}c + de) \cdot f \cdot (\overline{g} + hi)$ läßt sich wie folgt zerlegen:

$$Z1 = a\overline{b}c$$
$$Z2 = de$$
$$Z3 = \overline{g}$$
$$Z4 = hi$$
$$Z5 = Z1 + Z2$$
$$Z6 = Z3 + Z4$$
$$Z = Z5 \cdot f \cdot Z6$$

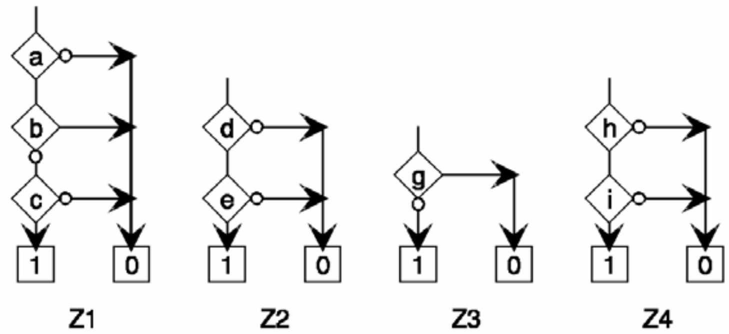
Für Z1 bis Z4 lasen sich sofort OBDDs angeben. Eine Raute steht für den Test einer binären Variablen auf Wert 0 oder 1. Wenn dieser Test (die Entscheidung) ein 1 ergibt, wird längs des Pfeiles (1-Kante); wenn sich eine 0 ergibt, wird längs der Kante mit Kreis (0-Kante) zum nächsten Test gegangen.

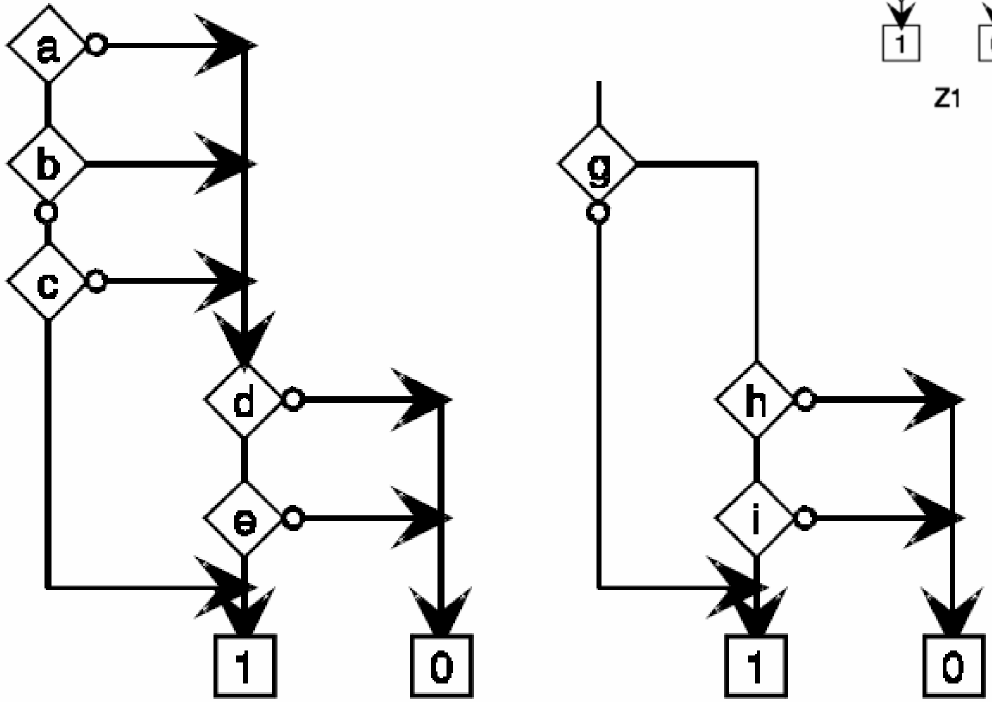


5.8 Beispiel OBDD (2)

Teildiagramme werden wie folgt zusammengesetzt:

$$Z = (a\bar{b}c + de) \cdot f \cdot (\bar{g} + hi)$$





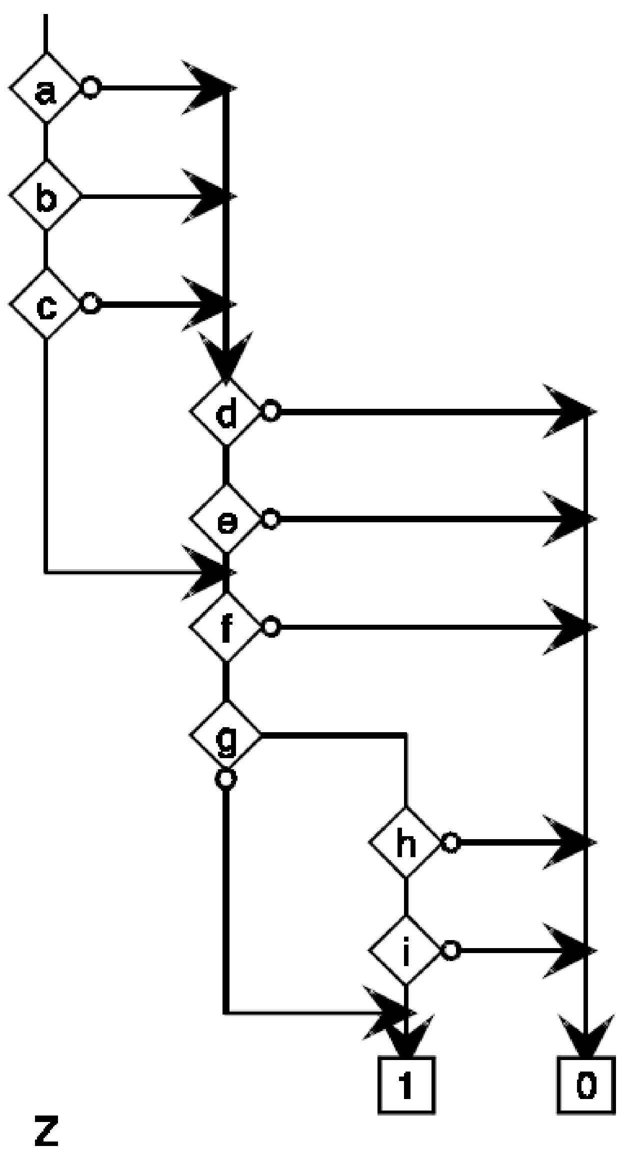
Z5 = Z1 + Z2

Z6 = Z3 + Z4

ODER-Verknüpfung bedeutet:
- anhängen am 0-Knoten;

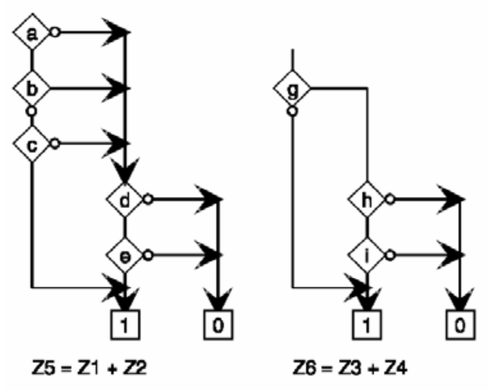
UND-Verknüpfung bedeutet:
- anhängen am 1-Knoten.

5.8 Beispiel OBDD (3)



Der komplette OBDD für Funktion und Teildiagramme (s.u.) sieht dann wie folgt aus:

$$Z = (a\bar{b}c + de) \cdot f \cdot (\bar{g} + hi)$$



ODER-Verknüpfung bedeutet:
- anhängen am 0-Knoten;

UND-Verknüpfung bedeutet:
- anhängen am 1-Knoten.