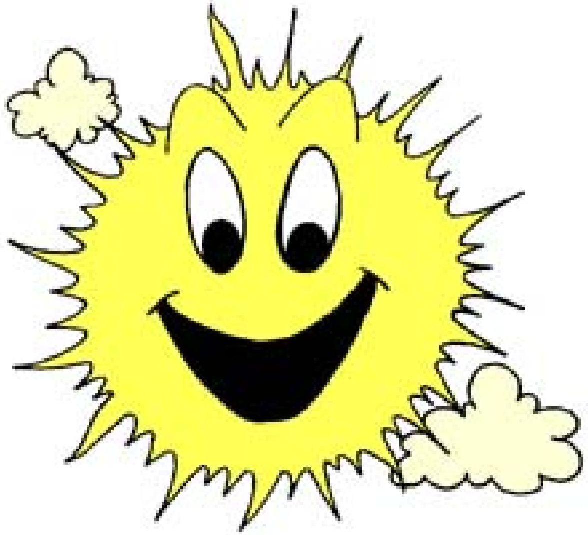
Wiederholung der 6. Vorlesung



2.4.7 Wiederholung Kürzungsregeln

1. $X_1 \vee (X_1 \wedge X_2) = X_1$
2. $X_1 \wedge (X_1 \vee X_2) = X_1$
3. $X_1 \vee (\overline{X_1} \wedge X_2) = X_1 \vee X_2$
4. $X_1 \wedge (\overline{X_1} \vee X_2) = X_1 \wedge X_2$
5. $(X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge \overline{X_2}) = X_1$
6. $(X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \overline{X_2}) = X_1$

5.1 Wiederholung DNF und KNF

Disjunktive Normal-Form DNF

$$\mathbf{Y_{DNF} = m_0 \vee \ldots \vee m_p} \quad \text{mit} \quad m_i = \tilde{x}_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_n$$

Konjunktive Normal-Form KNF

$$\mathbf{Y_{KNF} = M_0 \wedge \ldots \wedge M_p} \quad \text{mit} \quad M_i = \tilde{x}_1 \vee \ldots \vee \tilde{x}_n$$

und $\mathbf{p = 2^{n-1}}$

5.7 Karnaugh-Veitch (KV)-Diagramme

Informatik

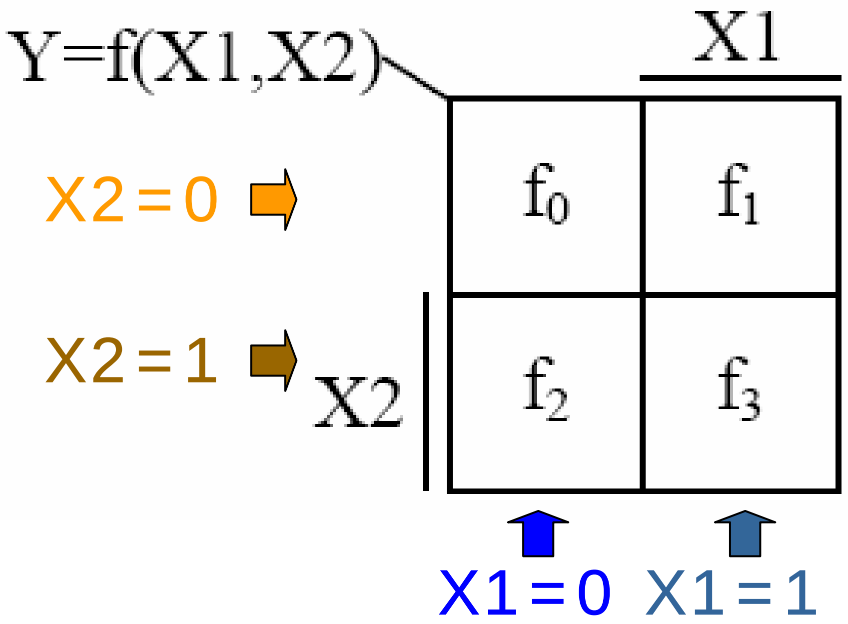
- Ein KV-Diagramm ist die graphische Darstellung einer Wertetabelle oder Schaltfunktion
- Diagramm ist in Matrixform angeordnet
- Jeder Kombination der Eingangsvariablen wird ein Feld der Matrix zugeordnet
- Für n Eingangsvariablen hat Matrix 2^n Felder
- Beim Übergang von einem Feld zu einem benachbarten Feld ändert sich nur der Wert einer Variablen
- Anfangs- und Endfeld einer Zeile oder Spalte sind benachbart.

5.7 Karnaugh-Veitch (KV)-Diagramme (2)

Informatik

- In die Felder der Matrix werden die zu den 2^n möglichen Kombinationen der Eingangsvariablen gehörenden Funktionswerte geschrieben.
- Die Felder enthalten die Werte der Minterme, wenn die Funktion als DNF beschrieben ist, oder
- die Felder enthalten die Werte der Maxterme, wenn die Funktion als KNF beschrieben ist.
- Matrix könnte horizontal oder vertikal zu einem Zylinder zusammengerollt werden, bzw. Torus.
- Werte der möglichen Kombinationen werden an den Matrixrand vor die Spalten und Zeilen geschrieben.

5.7 KV-Diagramm für n=2



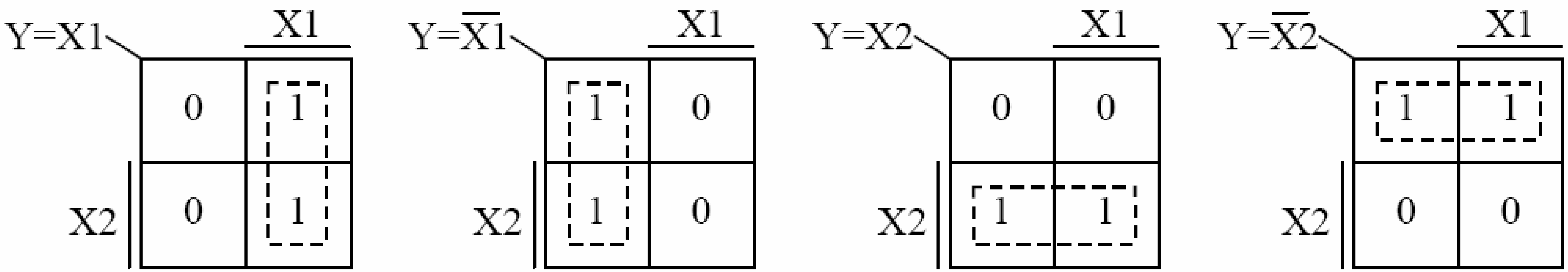
X2	X1	Y
0	0	f_0
0	1	f_1
1	0	f_2
1	1	f_3

In dem Rechteck auf der linken Seite soll in der linken Spalte **X1=0** und in der rechten Spalte **X1=1** gelten. Daher ist die rechte Spalte mit X1 markiert. Ebenso soll in der obersten Zeile **X2=0** und in der untersten Zeile **X2=1** gelten. Damit ist eine eindeutige Zuordnung der in der rechten Tabelle angeführten Funktionswerte zu den Zeilen und Spalten im Rechteck möglich.

5.7 Abhängigkeiten in KV-Diagrammen

Vorteil von KV-Diagrammen ist die leichte Erkennbarkeit der Abhängigkeit von Variablen.

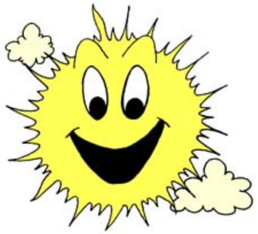
Beispiel: In den folgenden KV-Diagr. für n=2 hängt Funktion jeweils nur von **einer** Variablen ab:



HS-Übung:
KV-Diagr. für Y=0 ?

HS-Übung:
KV-Diagr. für Y=1 ?

Ende der Wiederholung



→ → → → → → → → → → → → → → → → →

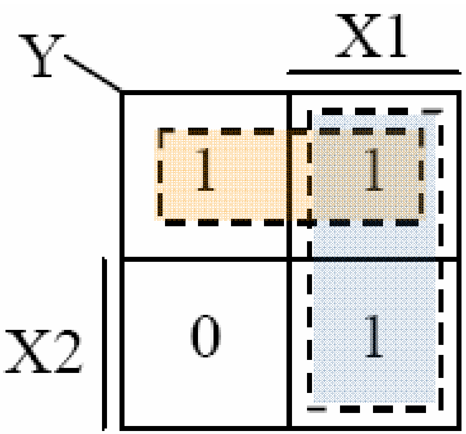
5.7 Disjunktive Minimalformen in KV-Diagr.

Kombination der einfachen Terme ermöglicht Beschreibung aufwändiger Funktionen.

Beispiel: Gesucht ist Minimalform der Funktion aus 3 Mintermen (Vollkonjunktionen):

$Y = (\neg X1 \wedge \neg X2) \vee (X1 \wedge \neg X2) \vee (X1 \wedge X2)$

$= m0 \vee m1 \vee m3$



X2	X1	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

ODER-Verknüpfung von X1 und ¬X2:

$$\boxed{Y = X1 \vee \overline{X2}}$$

Disjunktive Minimalform der Funktion (DMF)

5.7 KV-Diagramme mit Vollkonjunktionen

Informatik

Ein KV-Diagramm hat stets so viele Plätze (2^n), wie **Minterme** (Vollkonjunktionen) möglich sind.

Eine **1** auf einem Platz eines KV-Diagramm steht für eine Vollkonjunktionen.

Sind Vollkonjuktionen „benachbart“, können sie zu „Päckchen“ zusammengefasst werden.

In einem Päckchen dürfen $\mathbf{2^i}$ benachbarte Vollkonjunktionen zusammengefasst werden.

Bei mehreren Päckchen ergibt sich die vereinfachte Gleichung als **ODER**-Verknüpfung der einzelnen Päckcheninhalte. ➔ disjunktive Minimalform.

5.7 HS-Übung Disjunktive Minimalform n=2

B	A	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

¬A

B

Y		A
	1	0
B	1	1

$$Y = \overline{A} \vee B$$

$$(\overline{B} \wedge \overline{A}) \vee (B \wedge \overline{A}) \vee (B \wedge A) = (\overline{B} \wedge \overline{A}) \vee ((B \vee (A \wedge \overline{A}))$$

$$= (\overline{B} \wedge \overline{A}) \vee B$$

$$= \overline{A} \vee B$$ ist die **DMF** für die Funktion

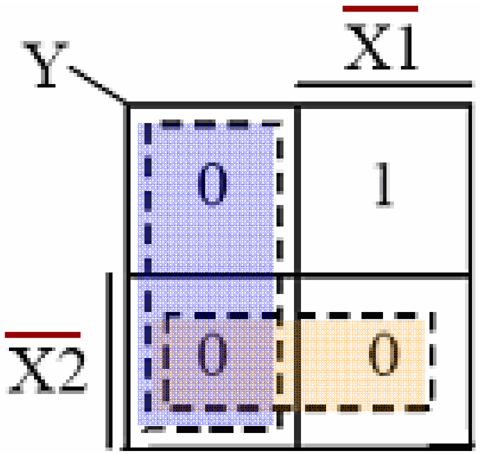
5.7 Konjunktive Minimalformen in KV-Diagr.

KV-Diagramme können auch mit den Maxtermen der zugehörigen Funktion belegt werden.

Beispiel: Gesucht ist Minimalform der Funktion aus 3 Maxtermen (Volldisjunktionen):

$Y = (X1 \vee X2) \wedge (\neg X1 \vee X2) \wedge (\neg X1 \vee \neg X2)$

$= M0 \wedge M2 \wedge M3$



X2	X1	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

UND-Verknüpfung von X1 und ¬X2:

$$\boxed{Y = X1 \wedge \overline{X2}}$$

Konjunktive Minimalform der Funktion (KMF)

!!! Maxterme: Variablen = 1 werden invertiert !

5.7 KV-Diagramme mit Volldisjunktionen

Ein KV-Diagramm hat stets so viele Plätze (2^n), wie **Maxterme** (Volldisjunktionen) möglich sind.

Eine **0** auf einem Platz eines KV-Diagramm steht für eine Volldisjunktionen.

Sind Volldisjuktionen „benachbart“, können sie zu „Päckchen“ zusammengefasst werden.

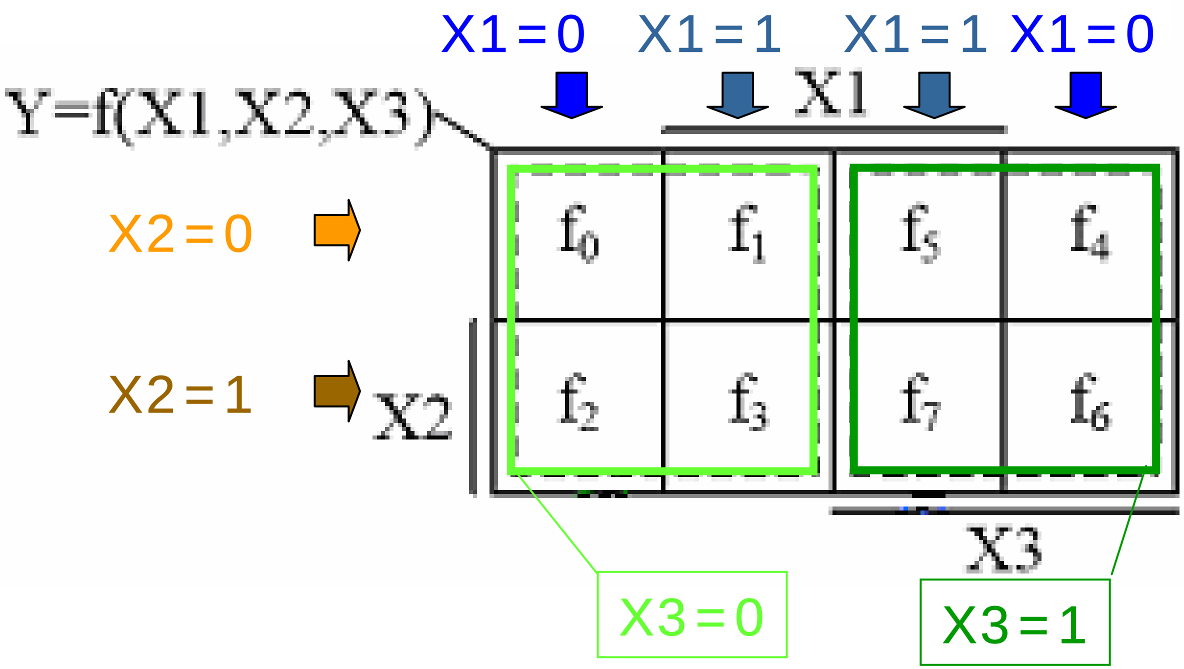
In einem Päckchen dürfen $\mathbf{2^i}$ benachbarte Volldisjunktionen zusammengefasst werden.

Bei mehreren Päckchen ergibt sich die vereinfachte Gleichung als **UND**-Verknüpfung der einzelnen Päckcheninhalte. ➔ konjunktive Minimalform.

5.7 KV-Diagramm für n=3

X3	X2	X1	Y
0	0	0	f_0
0	0	1	f_1
0	1	0	f_2
0	1	1	f_3
1	0	0	f_4
1	0	1	f_5
1	1	0	f_6
1	1	1	f_7

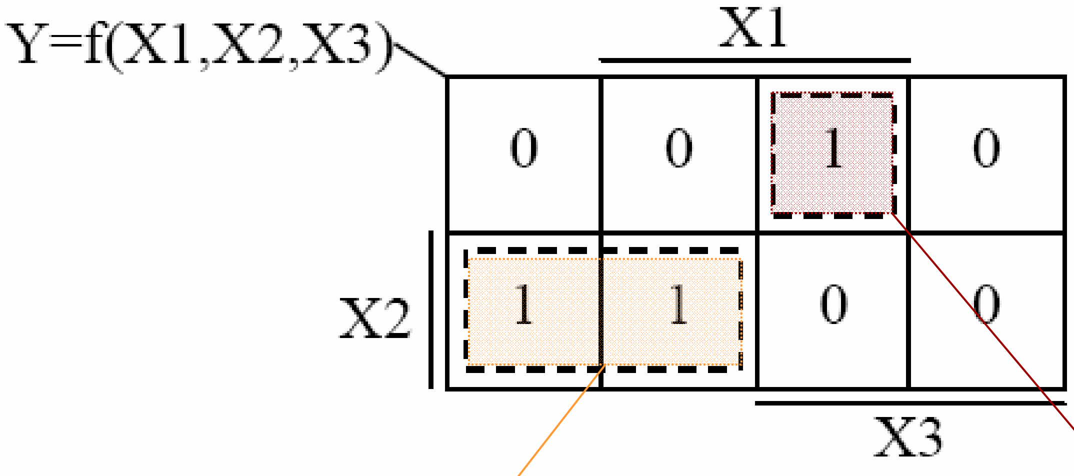
Von der Wertetabelle ausgehend wird zuerst X3=0 gesetzt und das KV-Diagramm für X1=0, X1=1 sowie X2=0, X2=1 gezeichnet.



Für X3=1 wird das KV-Diagr. An X1=0 gespiegelt und rechts daneben gezeichnet.

5.7 Beispiel für KV-Diagramm für n=3

X3	X2	X1	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0



$$Y = (X2 \wedge \overline{X3}) \vee (X1 \wedge \overline{X2} \wedge X3)$$

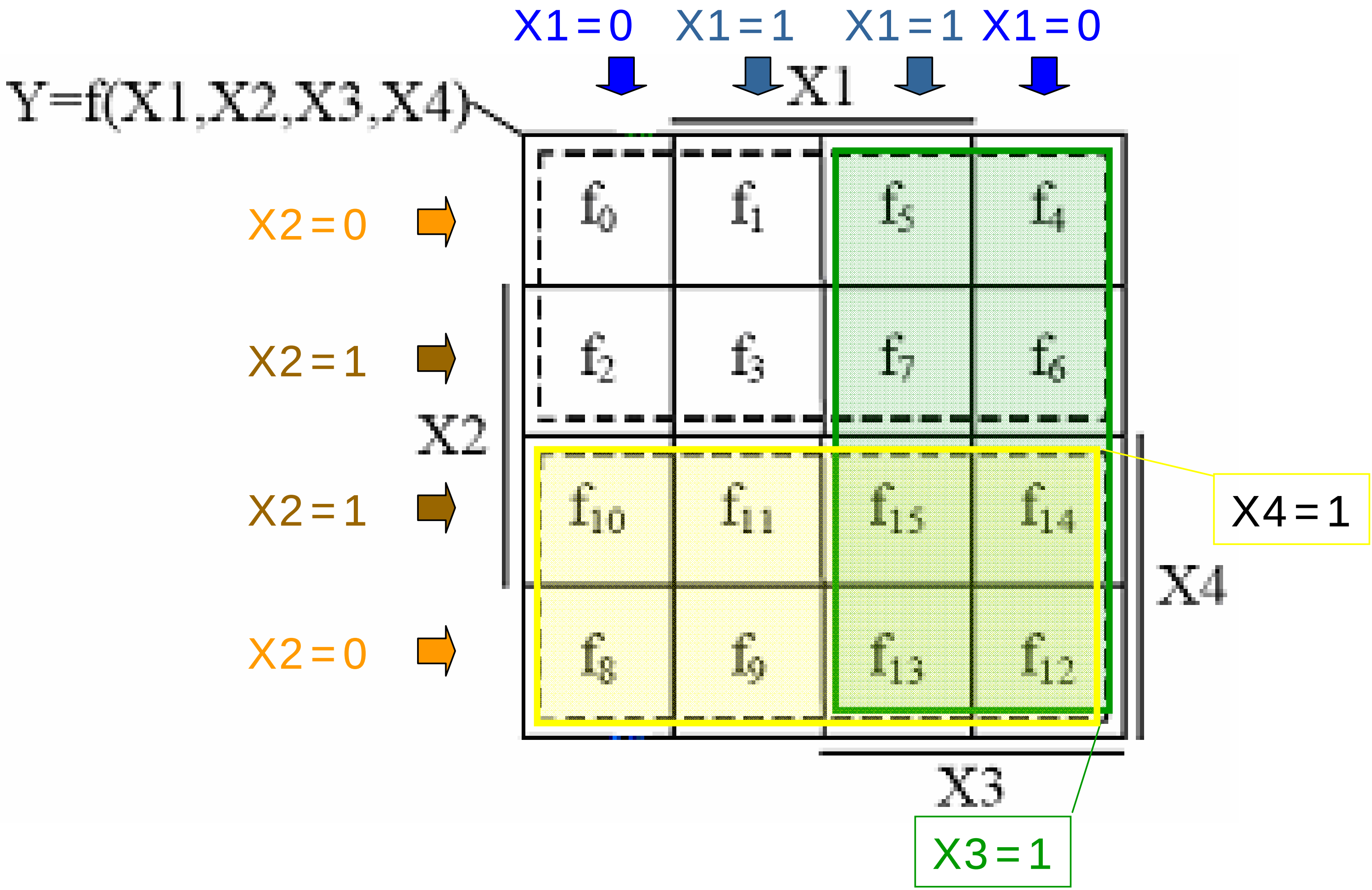
Dafür ergibt sich die Disjunktive Normalform (DNF) für die Funktion

$$Y = (\overline{X1} \wedge X2 \wedge \overline{X3}) \vee (X1 \wedge X2 \wedge \overline{X3}) \vee (X1 \wedge \overline{X2} \wedge X3)$$

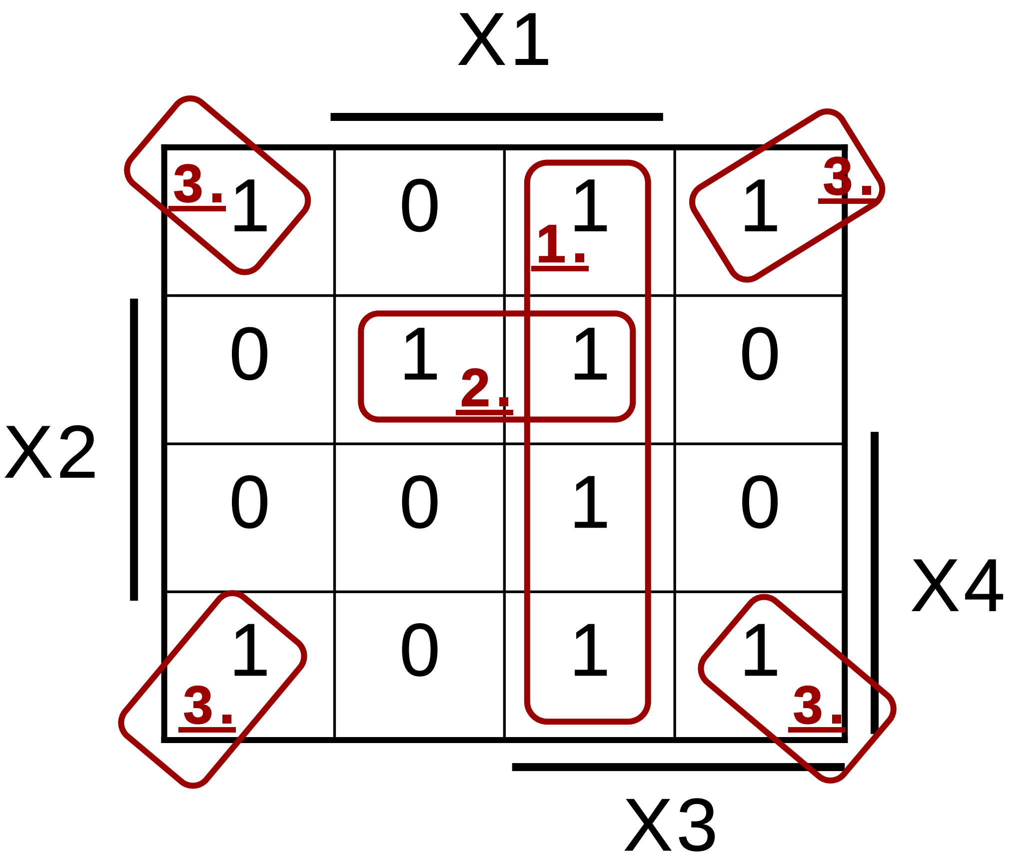
Vereinfacht durch Zusammenfassung

$$Y = (X2 \wedge \overline{X3}) \vee (X1 \wedge \overline{X2} \wedge X3)$$

5.7 KV-Diagramm für n=4



5.7 Beispiel für KV-Diagramm für n=4



Päckchen finden:

1. Päckchen:
X1∧X3

2. Päckchen:
X1∧X2∧¬X4

3. Päckchen:
¬X1∧¬X2

Disjunktive Minimalform (DNF) beschreibt Funktion (durch VerODERung der „Päckchen"):

$$Y = (X_1 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \overline{X_4}) \vee (\overline{X_1} \wedge \overline{X_2})$$

5.7 Implikanten

<u>Definition Implikant</u>:

Fasst man Min- bzw. Maxterme einer Funktion so zusammen, dass deren Verbund durch einen Term geringerer Komplexität, d.h. mit einer reduzierten Anzahl von Eingangsvariablen, beschrieben werden kann, so wird der resultierende Term als **Implikant** bezeichnet.

Die **Anzahl** der in einem Implikanten **zusammengefassten Min- bzw. Maxterme** bildet eine **2er-Potenz**.

5.7 Primimplikanten (PI)

Ist ein Implikant einer booleschen Funktion in keinem anderen Implikanten vollständig enthalten, wird er als **Primimplikant** bezeichnet.

Bezeichnung für die so groß wie möglich gewählten Blöcke von „Einsen“ im Karnaugh-Diagramm (in der DNF)

5.7 Kernprimimplikanten (essentieller PI)

- Enthält ein Primimplikant (PI) mindestens einen **Min- bzw. Maxterm**, der **in keinem anderen Primimplikanten enthalten** ist, bezeichnet man diesen als **Kern-Primimplikanten**.
- → die minimale Lösung enthält mindestens die essentiellen Primimplikanten .
- Nicht-essentielle PI sind Primimplikanten, die keine Kern-Primimplikanten sind.
- Redundante PI sind nicht-essentielle PI die nur von essentielle PI bereits überdeckte „1“en bzw. „0“en enthalten .