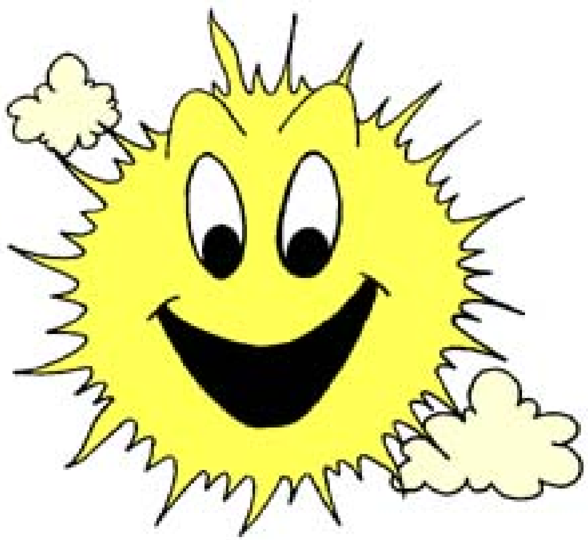
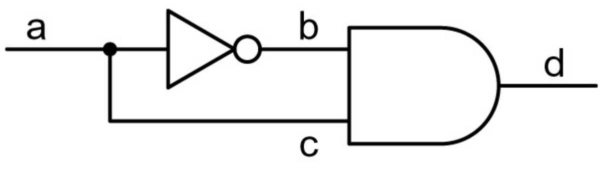
Wiederholung der 5. Vorlesung

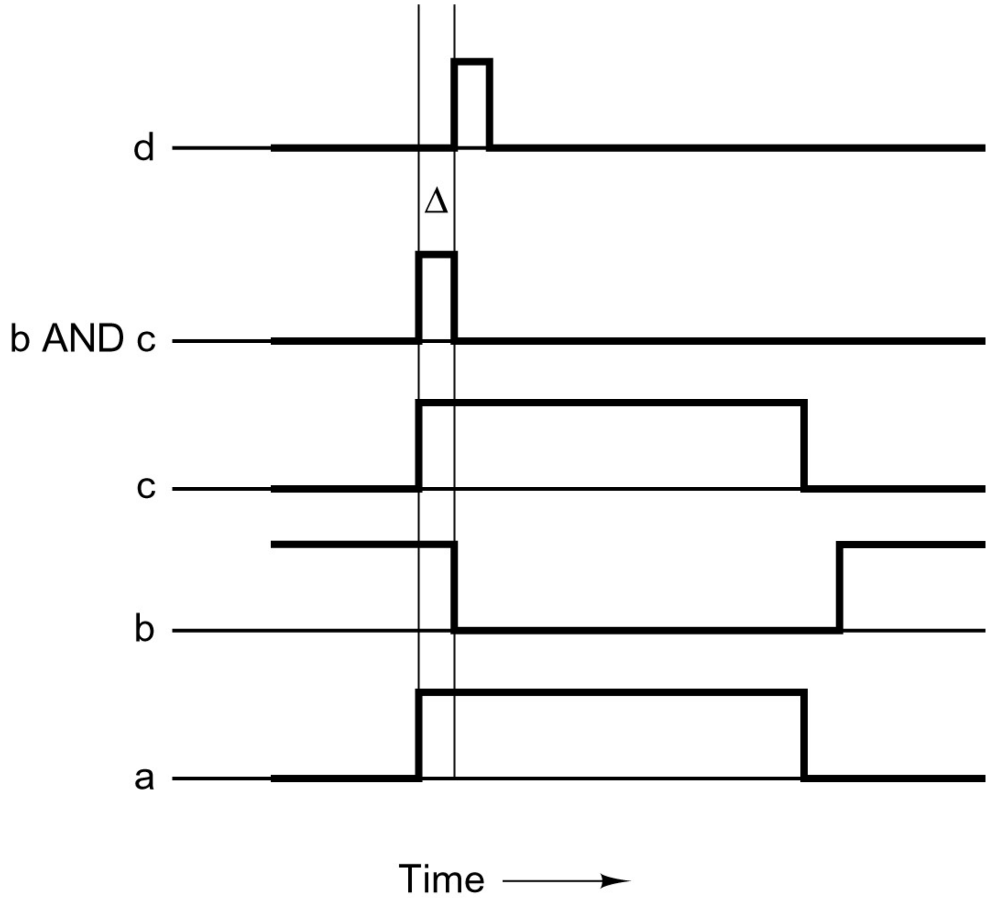


3.2 Signalverlauf einer digitalen Schaltung

- DigitalSimulator.exe



(a)



(b)

Beispiel Pulsgenerator

Taktgabe an verschiedenen Punkten der Schaltung

5.1 Normalformen

<u>Merke:</u>

- **Disjunktion** = **ODER** – Verknüpfung

- **Konjunktion** = **UND** – Verknüpfung

5.1 Normalformen

- Normalformen dienen dazu, eine beliebige Funktion in einheitlicher Form zu beschreiben.
- Normalformen beschreiben eine Schaltfunktion ausgehend von einer Wertetabelle in Gleichungsform
- In der booleschen Algebra sind zwei Normalformen gebräuchlich
  - Disjunktive Normalform (DNF)
  - Konjunktive Normalform (KNF)
- Normalformen basieren auf
  - Mintermen (m_i)
  - Maxtermen (M_i)

5.2 Minterme (Vollkonjuktion)

- Minterme sind UND-Verknüpfungen, die **alle** Schaltvariablen einmal enthalten
- Jede Variable kann sowohl **negiert**, als auch **nicht negiert** vorkommen

Wenn $x_1\, x_2\, ,\ldots,\, x_n$ die gegebenen Variablen sind,

$und\ \tilde{x}_i\ sowohl\ x_i\ als\ auch\ \overline{x_i}$, dann ist

$$\boxed{\tilde{x}_1 \wedge \tilde{x}_2 \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_n}$$ ein **Minterm**

Bei n Schaltvariablen gibt es

2^n verschiedene Minterme m_i

5.3 Maxterme (Volldisjunktion)

- Maxterme sind ODER-Verknüpfungen, die **alle** Schaltvariablen einmal enthalten
- Jede Variable kann sowohl **negiert**, als auch **nicht negiert** vorkommen

Wenn $x_1\, x_2 ,\ldots, x_n$ die gegebenen Variablen sind,

$und\ \tilde{x}_i\ sowohl\ x_i\ als\ auch\ \overline{x_i}$, dann ist

$\boxed{\tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2 \vee \ldots \vee \tilde{x}_n}$ ein **Maxterm**

Bei n Schaltvariablen gibt es

2^n verschiedene Maxterme M_i

5.2-.3 Kombination Min- und Maxterme n=2

x_2	x_1	$x_2 \wedge x_1$	$x_2 \wedge \overline{x}_1$	$\overline{x}_2 \wedge x_1$	$\overline{x}_2 \wedge \overline{x}_1$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

Kombination aller Minterme aus n=2

x_2	x_1	$x_2 \vee x_1$	$x_2 \vee \overline{x}_1$	$\overline{x}_2 \vee x_1$	$\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0

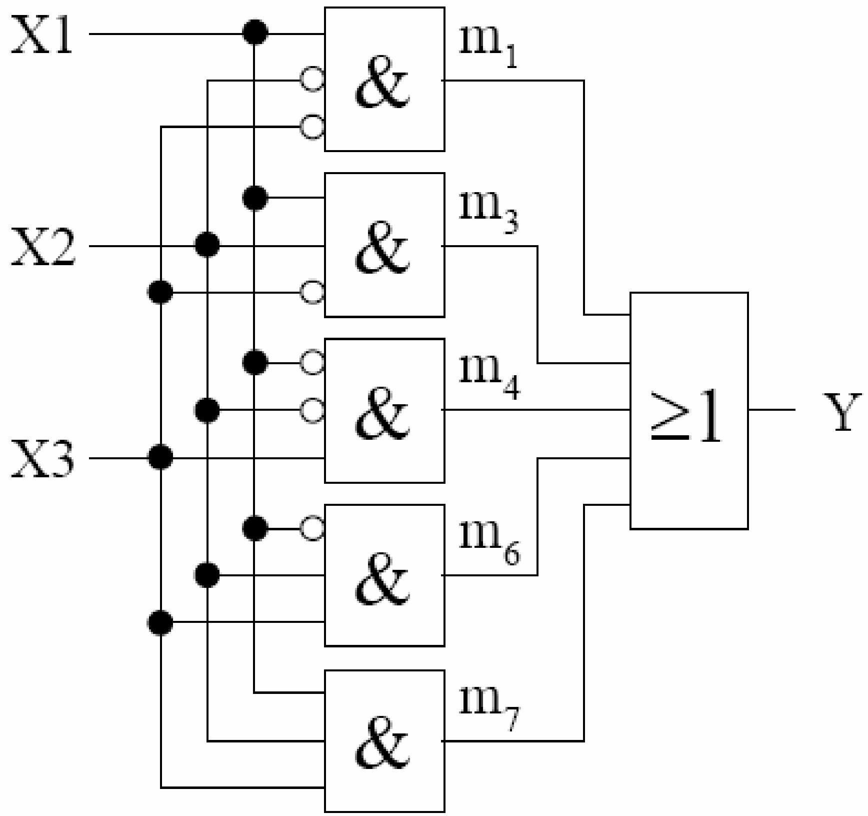
Kombination aller Maxterme aus n=2

5.4 Disjuktive Normalform (DNF)

- Eine beliebige boolesche Funktion lässt sich durch die disjunktive Verknüpfung geeigneter Minterme realisieren.
- Bei vorgegebener Funktion nimmt man genau die Minterme, welche den Wert '1' an den Stellen erzeugen, an denen die Funktion '1'-Werte ausgibt.
- Durch die disjunktive Verknüpfung dieser Minterme erhält man **genau die vorgegebene Funktion**.
- → Disjunktive Normalform.

5.4 Logische Schaltung der DNF mit n=3

X3	X2	X1	Y	
0	0	0	0	
0	0	1	1	←
0	1	0	0	
0	1	1	1	←
1	0	0	1	←
1	0	1	0	
1	1	0	1	←
1	1	1	1	←



$$Y = m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7$$

$$= (\overline{X3} \wedge \overline{X2} \wedge X1) \vee (\overline{X3} \wedge X2 \wedge X1) \vee (X3 \wedge \overline{X2} \wedge \overline{X1}) \vee$$

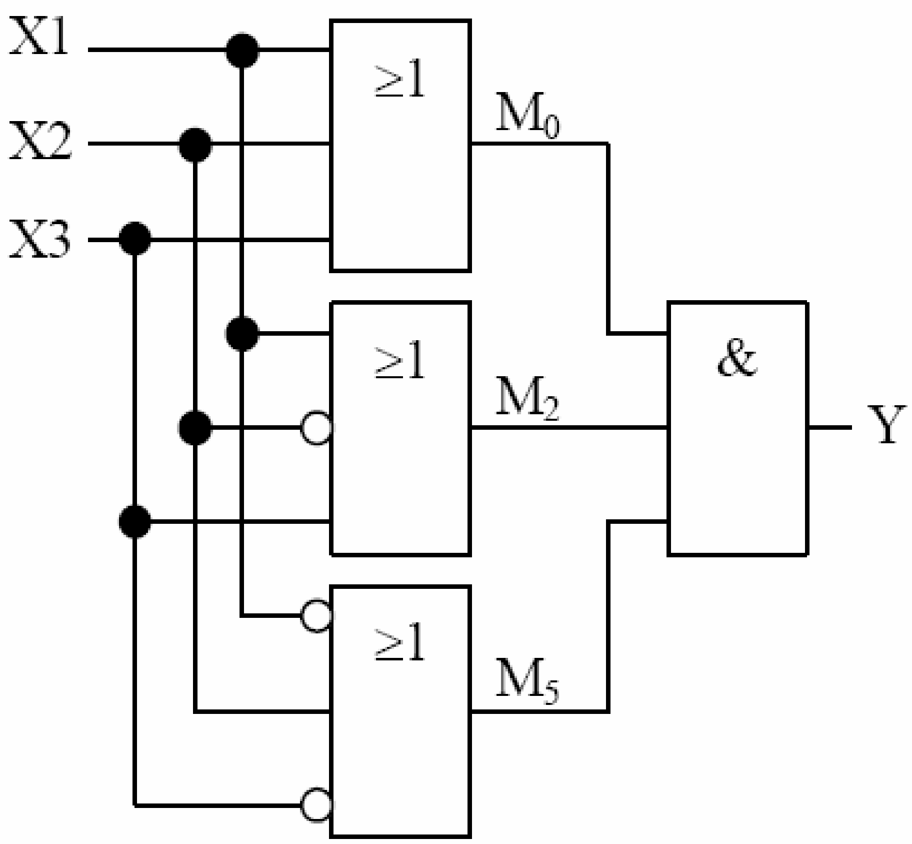
$$(X3 \wedge X2 \wedge \overline{X1}) \vee (X3 \wedge X2 \wedge X1)$$

5.5 Konjunktive Normalform (KNF)

- Eine beliebige boolesche Funktion lässt sich durch konjunktive Verknüpfung geeigneter Maxterme beschreiben.
- Für jede Eingangskombination, an der die Funktion den Ausgangswert '0' produziert, verknüpft man die zugehörigen Maxterme mittels Konjunktion.
- Durch die konjunktive Verknüpfung dieser Maxterme erhält man **genau die vorgegebene Funktion**.
- → Konjunktive Normalform

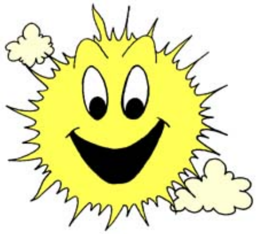
5.5 Logische Schaltung KNF mit n=3

X3	X2	X1	Y	
0	0	0	0	←
0	0	1	1	
0	1	0	0	←
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	0	←
1	1	0	1	
1	1	1	1	



$$Y = M_0 \wedge M_2 \wedge M_5$$
$$= (X3 \vee X2 \vee X1) \wedge (X3 \vee \overline{X2} \vee X1) \wedge (\overline{X3} \vee X2 \vee \overline{X1})$$

Ende der Wiederholung



→ → → → → → → → → → → → → → → → →

5.4-.5 HS-Übung: DNF und KNF finden

x_3	x_2	x_1	$y = f(x_3, x_2, x_1)$	Minterme	Maxterme
0	0	0	1		
0	0	1	0		
0	1	0	0		
0	1	1	1		
1	0	0	1	?	?
1	0	1	1		
1	1	0	0		
1	1	1	0		

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$$

5.4-.5 HS-Übung Lsg: DNF und KNF finden

x_3	x_2	x_1	$y = f(x_3, x_2, x_1)$	Minterme	Maxterme
0	0	0	1	$\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3$	
0	0	1	0		$\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$
0	1	0	0		$x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$
0	1	1	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3$	
1	0	0	1	$\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3$	
1	0	1	1	$x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3$	
1	1	0	0		$x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3$
1	1	1	0		$\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$$

5.4-.5 HS-Übung: XOR in DNF

- Wie kann die XOR-Funktion mit Mintermen dargestellt werden?
- Stellen sie XOR in der DNF dar

X_1	X_2	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$m_1 = \overline{X_1} \wedge X_2$$
$$m_2 = X_1 \wedge \overline{X_2}$$

$$\boxed{Y = (\overline{X_1} \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge \overline{X_2})}$$

5.4-.5 HS-Übung: XOR in KNF

- Wie kann die XOR-Funktion mit Maxtermen dargestellt werden?
- Stellen sie XOR in der KNF dar

X_1	X_2	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$M_0 = X_1 \vee X_2$$

$$M_3 = \overline{X_1} \vee \overline{X_2}$$

$$\boxed{Y = (X_1 \vee X_2) \wedge (\overline{X_1} \vee \overline{X_2})}$$

5.4-.5 „don‘t care Terme“ in Minimalformen

Es gibt Wertetabellen, bei denen nicht für jede Kombination der Eingangsvariablen ein Funktionswert nicht definiert (nicht angegeben) ist.

Diese Kombinationen werden „don‘t care Terme“ genannt.

Für diese Kombinationen darf der Funktionswert mit 0 oder 1 belegt werden.

5.6 Minimierungsverfahren

- Jede boolesche Funktion ist algebraisch in kanonischer Form darstellbar. Diese können im allgemeinen weiter in die konjuktive (KMF) oder disjunktive Minimalform (DMF) vereinfacht werden, mit unterschiedlichen Verfahren der Eliminierung von Nachbarschaftsvariablen.

- <u>Boolesche Algebra</u>: nach den bekannten Rechenregeln auch für wenige Variable meist schwierig. Nur in Ausnahmefällen und für einfache Gleichungen praktikabel.

5.6 Minimierungsverfahren (2)

- Algorithmische Verfahren:
  Diese fassen Min- und Maxterme sukzessive zusammen um Terme der ersten Stufe zu vereinfachen.
- Quine-McCluskey – Verfahren ist bekanntester Algorithmus. Bildet Grundlage für SW-Paket, beispielsweise zum ASIC-Entwurf (Application Specific Integrated Circuit - Applikationsspezifischer Chip-Baustein)
  und bietet dem Anweder für eine gegebene Logikfunktion die minimale Implemetierung an.

5.6 Minimierungsverfahren (3)

- Graphische Verfahren:
  Bei graphischen Verfahren werden boolesche Funktionen geeignet graphisch dargestellt. Terme werden dabei anschaulich dargestellt und können dabei vereinfacht werden.
- Bekanntestes graphisches Verfahren ist die Minimierung mittels Karnaugh-Veitch – Diagramme (KV-Diagramme).

5.7 Karnaugh-Veitch (KV)-Diagramme

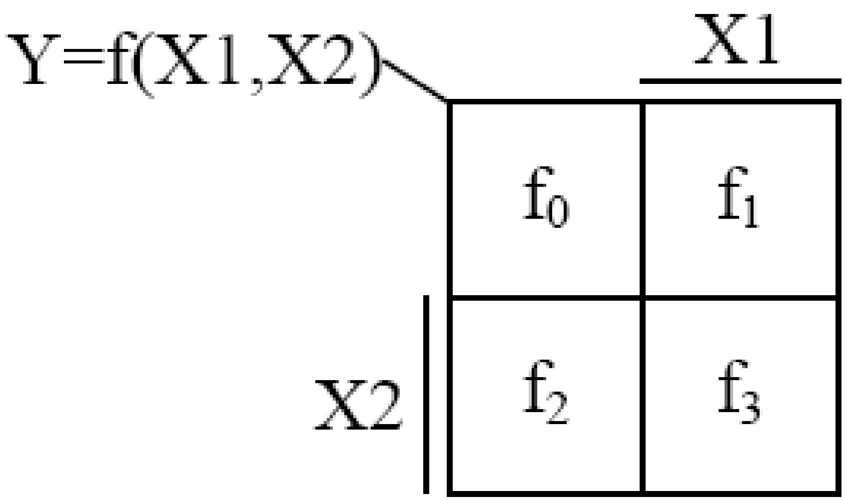
- Ein KV-Diagramm ist die graphische Darstellung einer Wertetabelle oder Schaltfunktion
- Diagramm ist in Matrixform angeordnet
- Jeder Kombination der Eingangsvariablen wird ein Feld der Matrix zugeordnet
- Für n Eingangsvariablen hat Matrix 2^n Felder
- Beim Übergang von einem Feld zu einem benachbarten Feld ändert sich nur der Wert einer Variablen
- Anfangs- und Endfeld einer Zeile oder Spalte sind benachbart.

5.7 Karnaugh-Veitch (KV)-Diagramme (2)

- In die Felder der Matrix werden die zu den 2^n möglichen Kombinationen der Eingangsvariablen gehörenden Funktionswerte geschrieben.
- Die Felder enthalten die Werte der Minterme, wenn die Funktion als DNF beschrieben ist, oder
- die Felder enthalten die Werte der Maxterme, wenn die Funktion als KNF beschrieben ist.
- Matrix könnte horizontal oder vertikal zu einem Zylinder zusammengerollt werden.
- Werte der möglichen Kombinationen werden an den Matrixrand vor die Spalten und Zeilen geschrieben.

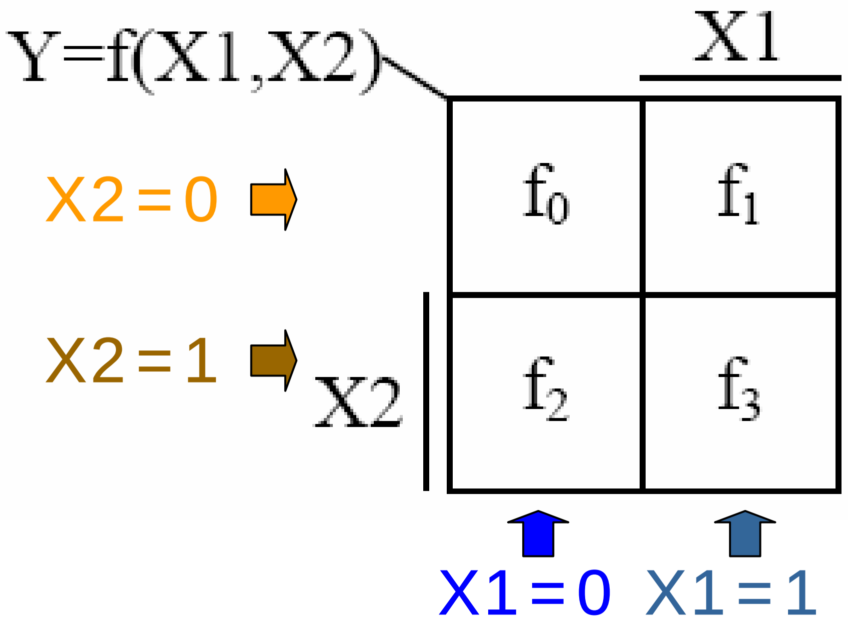
5.7 KV-Diagramm für 2 Eingangsvariablen

Eine Funktion zweier boolescher Variablen lässt sich in folgender Form grafisch anschaulich darstellen:



X2	X1	Y
0	0	f_0
0	1	f_1
1	0	f_2
1	1	f_3

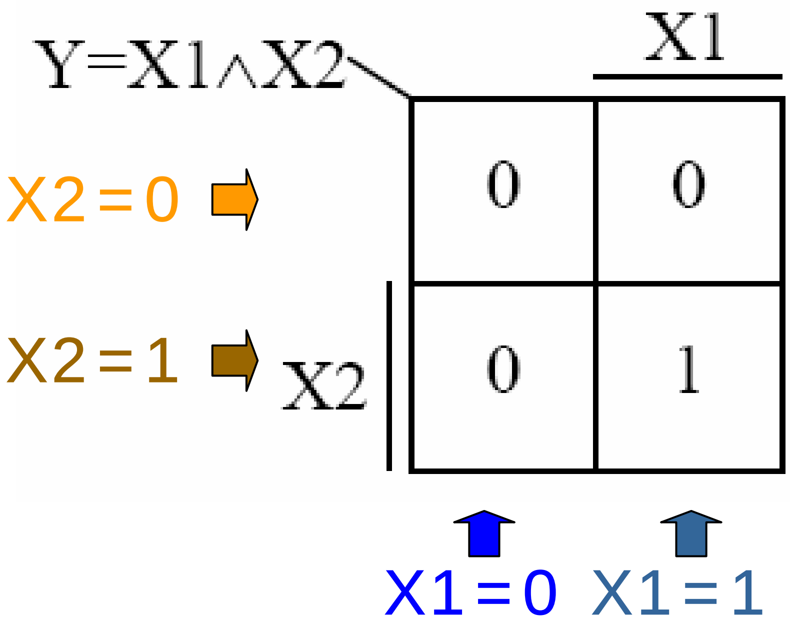
5.7 KV-Diagramm für n=2



X2	X1	Y
0	0	f_0
0	1	f_1
1	0	f_2
1	1	f_3

In dem Rechteck auf der linken Seite soll in der linken Spalte **X1=0** und in der rechten Spalte **X1=1** gelten. Daher ist die rechte Spalte mit X1 markiert. Ebenso soll in der obersten Zeile **X2=0** und in der untersten Zeile **X2=1** gelten. Damit ist eine eindeutige Zuordnung der in der rechten Tabelle angeführten Funktionswerte zu den Zeilen und Spalten im Rechteck möglich.

5.7 KV-Diagramm für UND-Verknüpfung



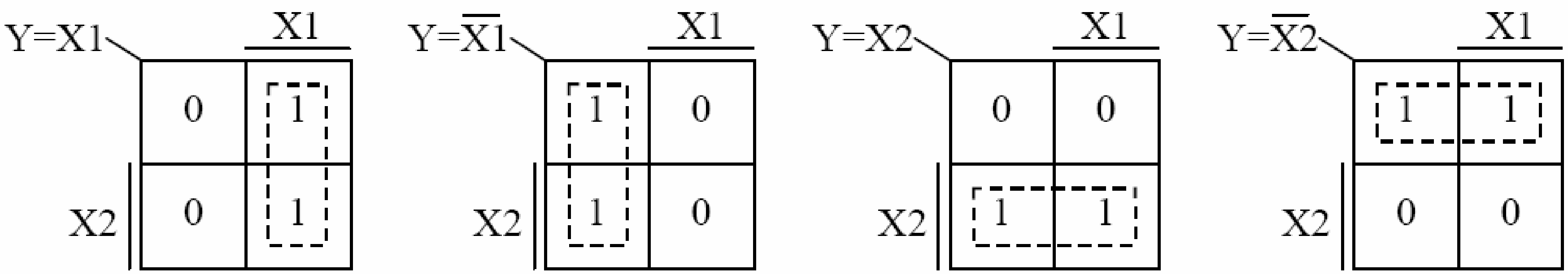
X2	X1	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Beispiel: UND-Verknüpfung von 2 Variablen.

5.7 Abhängigkeiten in KV-Diagrammen

Vorteil von KV-Diagrammen ist die leichte Erkennbarkeit der Abhängigkeit von Variablen.

Beispiel: In den folgenden KV-Diagr. für n=2 hängt Funktion jeweils nur von **einer** Variablen ab:



HS-Übung:
KV-Diagr. für Y=0 ?

HS-Übung:
KV-Diagr. für Y=1 ?