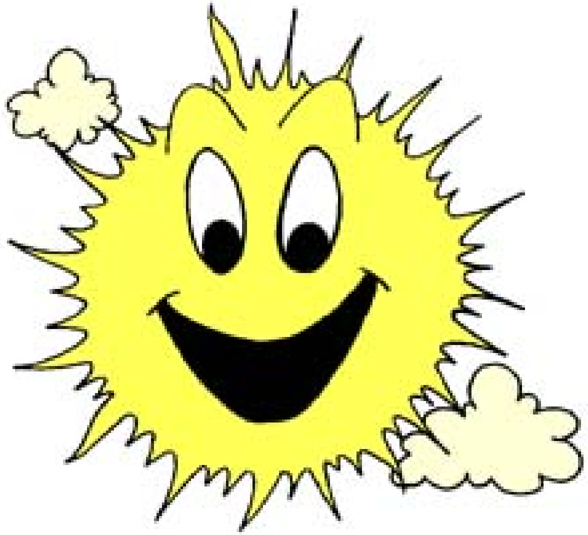
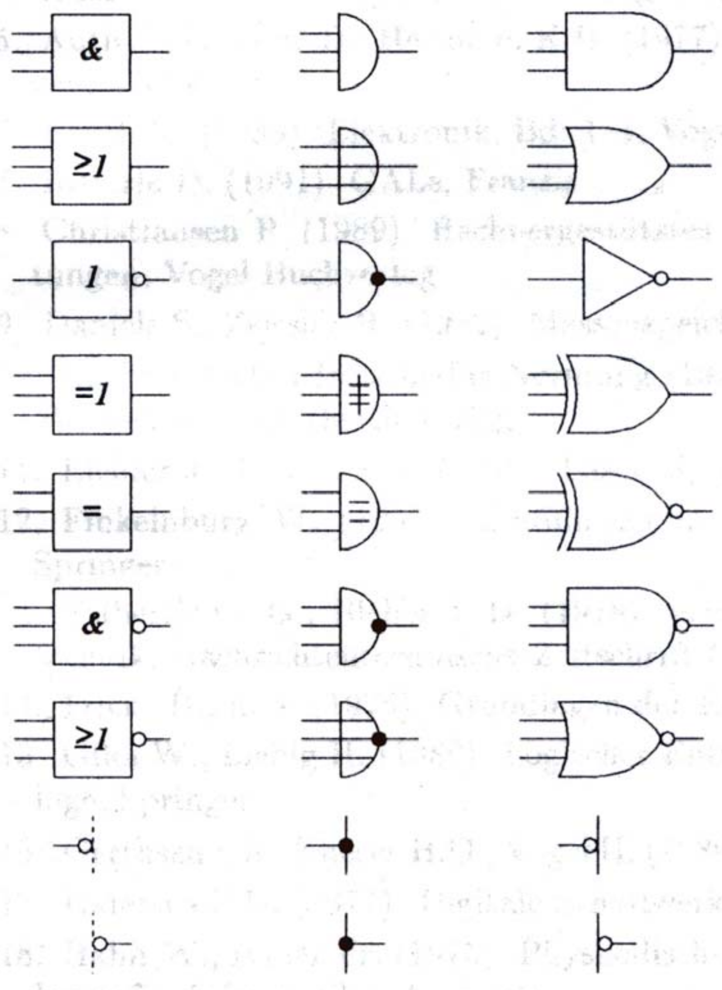
Wiederholung der 4. Vorlesung



3. Schaltzeichen nach DIN und ISO

Schaltzeichen DIN 40700 (ab 1976)	Früher	in USA	Benennung



UND - Glied (AND)

ODER - Glied (OR)

NICHT - Glied (NOT)

Exklusiv-Oder - Glied (Exclusive-OR, XOR)

Äquivalenz - Glied (Logic identity)

UND - Glied mit negiertem Ausgang (NAND)

ODER - Glied mit negiertem Ausgang (NOR)

Negation eines Eingangs

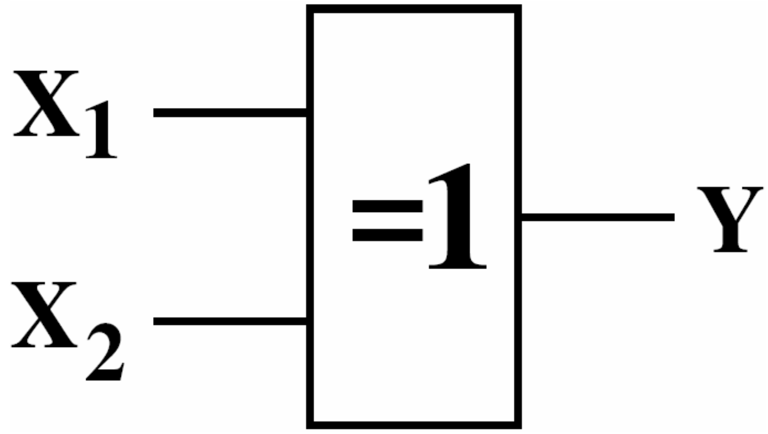
Negation eines Ausgangs

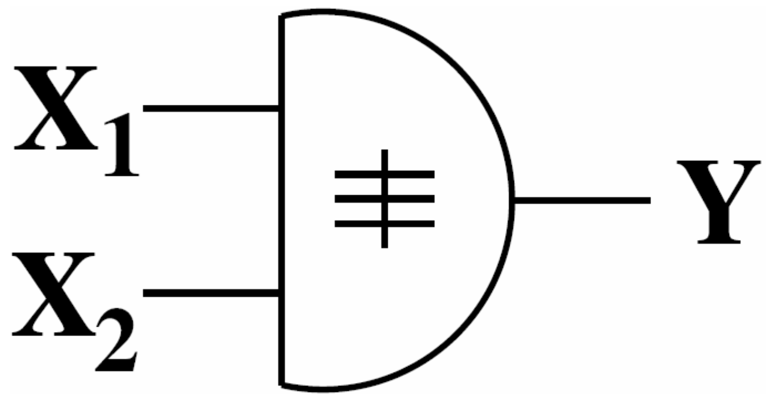
3.2. XOR (Antivalenz)

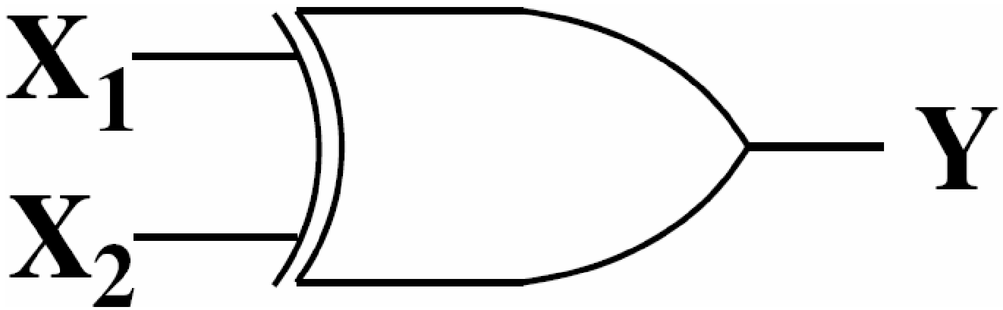
XOR (exclusive OR) ist die Realisierung des „Entweder-oder“

X_1	X_2	$X_1 \wedge \overline{X_2}$	$\overline{X_1} \wedge X_2$	$(X_1 \wedge \overline{X_2}) \vee (\overline{X_1} \wedge X_2)$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

3.2. XOR Symbole







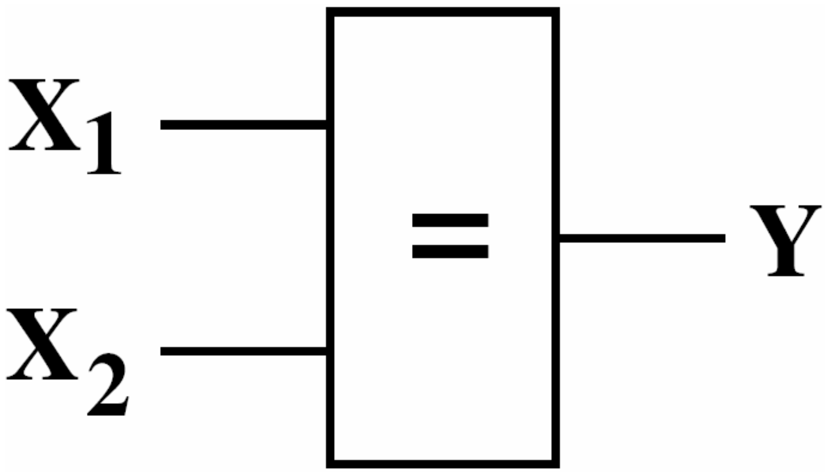
$\oplus, \not\equiv$

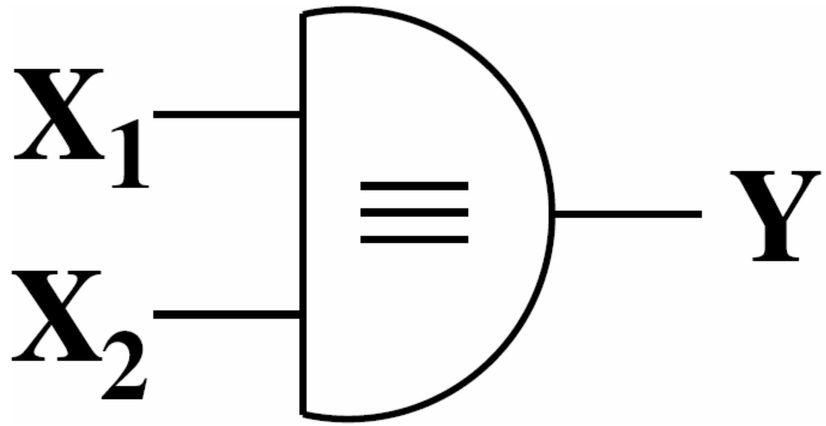
3.2. XNOR (Äquivalenz)

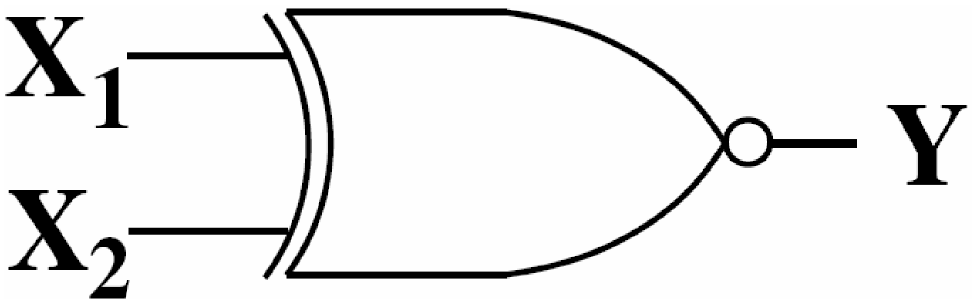
XNOR (exclusive NOR) überprüft die Gleichheit (Äquivalenz) zweier Variablen.

X_1	X_2	$X_1 \wedge X_2$	$\overline{X_1} \wedge \overline{X_2}$	$(X_1 \wedge X_2) \vee (\overline{X_1} \wedge \overline{X_2})$
0	0	0	1	1
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

3.2. XNOR Symbole

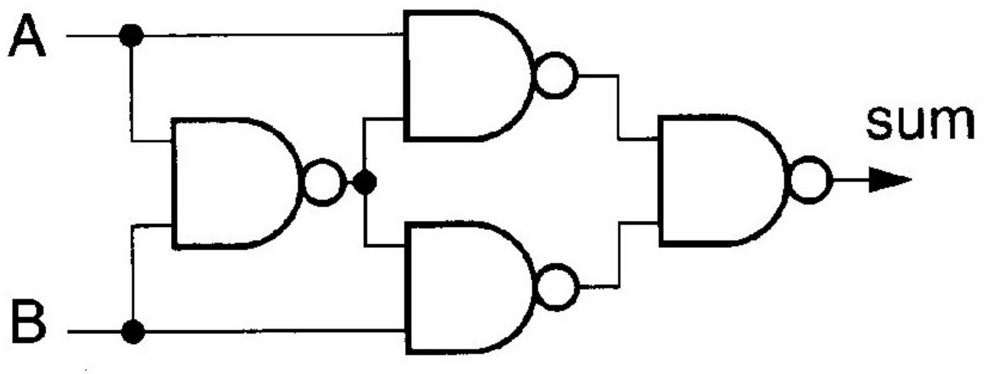






$\leftrightarrow$, $\equiv$

HS-Übung: Analyse einer NAND-Schaltung



- Wahrheitstabelle
- umformen (vereinfachen)

Wahrheitstabelle

A	B	$X_1 = \overline{A \wedge B}$	$\overline{A \wedge X_1}$	$\overline{B \wedge X_1}$	sum
0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0

Analyse einer NAND-Schaltung (2)

$$\overline{\overline{(A\wedge\overline{(A\wedge B)})}\wedge\overline{(B\wedge\overline{(A\wedge B)})}}$$

$$=\overline{\overline{(A\wedge(\overline{A}\vee\overline{B}))}\wedge\overline{(B\wedge(\overline{A}\vee\overline{B}))}}$$ Morgan-G.

$$=\overline{\overline{((A\wedge\overline{A})\vee(A\wedge\overline{B}))}\wedge\overline{((B\wedge\overline{A})\vee(B\wedge\overline{B}))}}$$ Distributiv-G.

$$=\overline{\overline{(0\vee(A\wedge\overline{B}))}\wedge\overline{(B\wedge\overline{A})\vee 0)}}$$ Inversions-G.

$$=\overline{\overline{(A\wedge\overline{B})}\wedge\overline{(B\wedge\overline{A})}}$$ Null-G.

$$=(A\wedge\overline{B})\vee(\overline{A}\wedge B)$$ Morgan-G.

Analyse NAND-Schaltung (2. Rechenweg)

$$\overline{\overline{(A \wedge \overline{(A \wedge B)})} \wedge \overline{(B \wedge \overline{(A \wedge B)})}}$$

$$= (A \wedge \overline{(A \wedge B)}) \vee (B \wedge \overline{(A \wedge B)})$$

Morgan-G. auf äußere Fkt.

$$= (A \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})) \vee (B \wedge (\overline{A} \vee \overline{B}))$$

Morgan-G.

$$= ((A \wedge \overline{A}) \vee (A \wedge \overline{B})) \vee ((B \wedge \overline{A}) \vee (B \wedge \overline{B}))$$

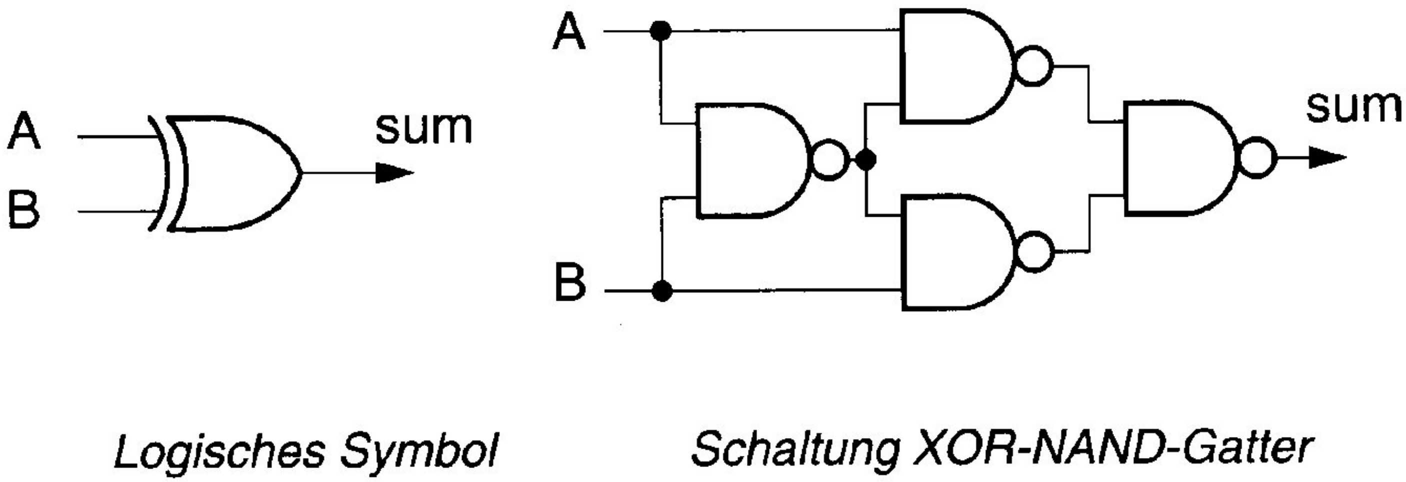
Distibutiv-G

$$= (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$$

Inversions-G.
Null-G.

Bei diesem Rechenweg wird man schnell die äußeren beiden Negierungssstriche los.

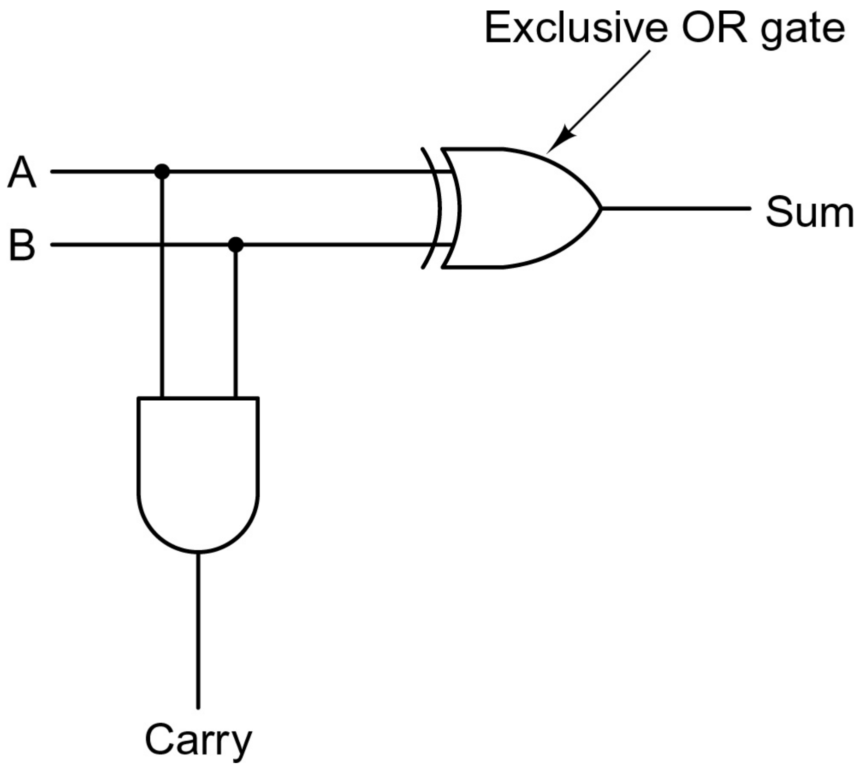
Lösung: Analyse einer NAND-Schaltung



Bei dieser Schaltung handelt es sich eine mögliche Realisierung von XOR nur mit NAND-Gattern

5.x Halbaddierer (Half Adder)

A	B	Sum	Carry
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1



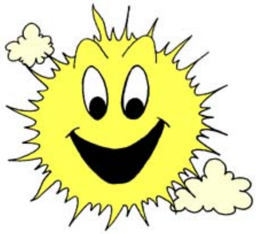
6_{10}	0110
$+\ 7_{10}$	0111
C	110
$=13_{10}$	1101

Kann Addition mit Halbaddierer realisiert werden?

Fehlt etwas?

Hier geht‘s in Rechnergrundlagen weiter…

Ende der Wiederholung

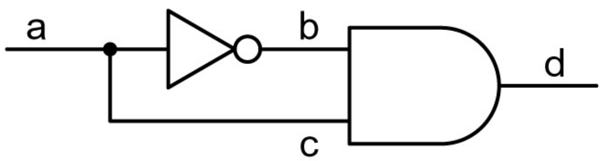


→ → → → → → → → → → → → → → → → →

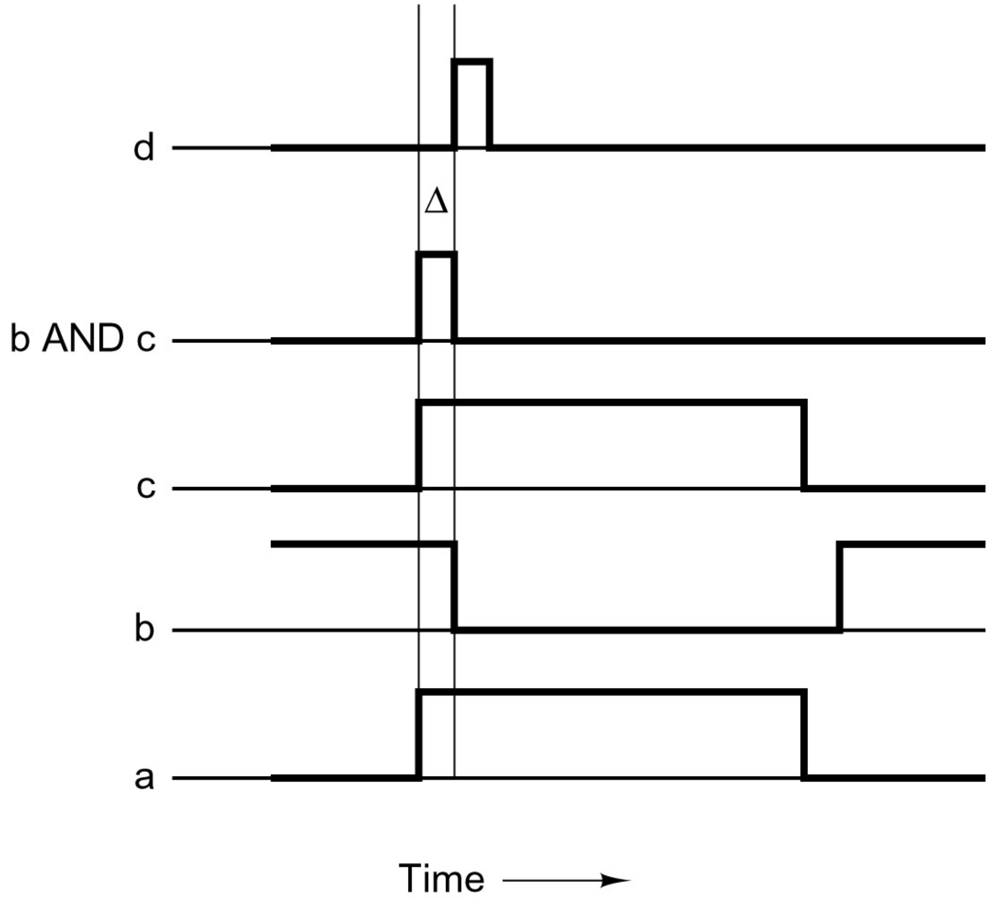
3.2 Signalverlauf einer digitalen Schaltung

Informatik

- DigitalSimulator.exe



(a)



(b)

Beispiel Pulsgenerator

Taktgabe an verschiedenen Punkten der Schaltung

5 Vollst. Systeme mit NAND und NOR

1. Normalformen
2. Minterm (Vollkonjuktion)
3. Maxterme (Volldisjunktion)
4. Disjuktive Normalform (DNF)
5. Konjunktive Normalform (KNF)
6. Minimierungsverfahren
7. Karnaugh-Veitch – Diagramme (KV-Diagr.)
8. Minimierungsverfahren nach
   Quine und Mc Cluskey
9. Binäre Entscheidungsdiagramme

5.1 Normalformen

- Normalformen dienen dazu, eine beliebige Funktion in einheitlicher Form zu beschreiben.
- Normalformen beschreiben eine Schaltfunktion ausgehend von einer Wertetabelle in Gleichungsform
- In der booleschen Algebra sind zwei Normalformen gebräuchlich
  - Disjunktive Normalform (DNF)
  - Konjunktive Normalform (KNF)
- Normalformen basieren auf
  - Mintermen (m_i)
  - Maxtermen (M_i)

5.2 Minterme (Vollkonjuktion)

- Minterme sind UND-Verknüpfungen, die **alle** Schaltvariablen einmal enthalten
- Jede Variable kann sowohl **negiert**, als auch **nicht negiert** vorkommen

Wenn $x_1\, x_2\, ,\ldots,\, x_n$ die gegebenen Variablen sind,

$\mathit{und}\ \tilde{x}_i\ \mathit{sowohl}\ x_i\ \mathit{als\ auch}\ \overline{x_i}$, dann ist

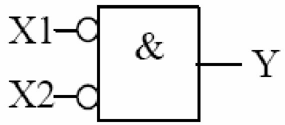
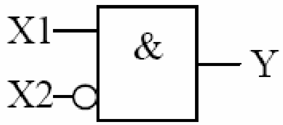
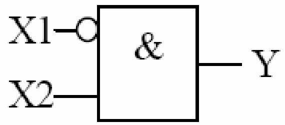
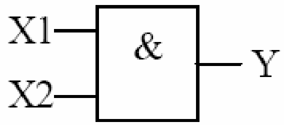
$\boxed{\tilde{x}_1 \wedge \tilde{x}_2 \wedge \ldots \wedge \tilde{x}_n}$ ein **Minterm**

Bei n Schaltvariablen gibt es

2^n verschiedene Minterme m_i

5.2 Minterme (Beispiel)

- n=2 Eingangsvariablen
- ergeben 4 Minterme ($2^n = 4$)

Minterm-Bezeichnung		m_0	m_1	m_2	m_3
Funktionstabelle	X2 X1				
	0 0	1	0	0	0
	0 1	0	1	0	0
	1 0	0	0	1	0
	1 1	0	0	0	1
Gleichung		$m_0 = \overline{X1} \wedge \overline{X2}$	$m_1 = X1 \wedge \overline{X2}$	$m_2 = \overline{X1} \wedge X2$	$m_3 = X1 \wedge X2$
Schaltsymbol					

Indizierung der Minterme m_i ergibt sich aus dem Wert der Eingangskombination

5.3 Maxterme (Volldisjunktion)

- Maxterme sind ODER-Verknüpfungen, die **alle** Schaltvariablen einmal enthalten
- Jede Variable kann sowohl **negiert**, als auch **nicht negiert** vorkommen

Wenn $x_1\ x_2\ ,\ldots,\ x_n$ die gegebenen Variablen sind,

$und\ \ \tilde{x}_i\ sowohl\ x_i\ als\ auch\ \overline{x_i}$, dann ist

$$\boxed{\tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2 \vee \ldots \vee \tilde{x}_n}$$ ein **Maxterm**

Bei n Schaltvariablen gibt es

2^n verschiedene Maxterme M_i

5.2-.3 Kombination Min- und Maxterme n=2

x_2 x_1	$x_2 \wedge x_1$	$x_2 \wedge \overline{x}_1$	$\overline{x}_2 \wedge x_1$	$\overline{x}_2 \wedge \overline{x}_1$
0 0	0	0	0	1
0 1	0	0	1	0
1 0	0	1	0	0
1 1	1	0	0	0

Kombination aller Minterme aus n=2

x_2 x_1	$x_2 \vee x_1$	$x_2 \vee \overline{x}_1$	$\overline{x}_2 \vee x_1$	$\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1$
0 0	0	1	1	1
0 1	1	0	1	1
1 0	1	1	0	1
1 1	1	1	1	0

Kombination aller Maxterme aus n=2

5.4 Disjuktive Normalform (DNF)

- Eine beliebige boolesche Funktion lässt sich durch die disjunktive Verknüpfung geeigneter Minterme realisieren.
- Bei vorgegebener Funktion nimmt man genau die Minterme, welche den Wert '1' an den Stellen erzeugen, an denen die Funktion '1'-Werte ausgibt.
- Durch die disjunktive Verknüpfung dieser Minterme erhält man **genau die vorgegebene Funktion**.
- ➔ Disjunktive Normalform.

5.4 Beispiel DNF mit 3 Eingangsvariablen

X3	X2	X1	Y	
0	0	0	0	
0	0	1	1	←
0	1	0	0	
0	1	1	1	←
1	0	0	1	←
1	0	1	0	
1	1	0	1	←
1	1	1	1	←

Minterme finden, die den Wert 1 erzeugen, wo die Funktion $Y(x_1,x_2,x_3) = 1$ ist

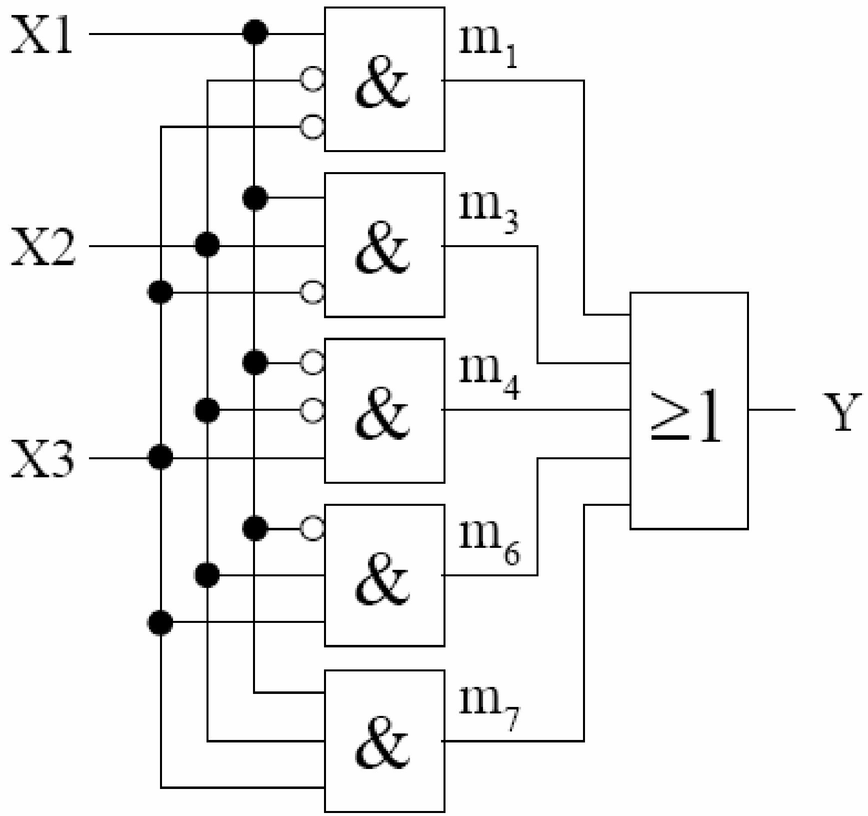
$$Y = m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7$$

$$= (\overline{X3} \wedge \overline{X2} \wedge X1) \vee (\overline{X3} \wedge X2 \wedge X1) \vee (X3 \wedge \overline{X2} \wedge \overline{X1}) \vee$$

$$(X3 \wedge X2 \wedge \overline{X1}) \vee (X3 \wedge X2 \wedge X1)$$

5.4 Logische Schaltung der DNF mit n=3

X3	X2	X1	Y	
0	0	0	0	
0	0	1	1	←
0	1	0	0	
0	1	1	1	←
1	0	0	1	←
1	0	1	0	
1	1	0	1	←
1	1	1	1	←



$$Y = m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7$$
$$= (\overline{X3} \wedge \overline{X2} \wedge X1) \vee (\overline{X3} \wedge X2 \wedge X1) \vee (X3 \wedge \overline{X2} \wedge \overline{X1}) \vee$$
$$(X3 \wedge X2 \wedge \overline{X1}) \vee (X3 \wedge X2 \wedge X1)$$

5.5 Konjunktive Normalform (KNF)

- Eine beliebige boolesche Funktion lässt sich durch konjunktive Verknüpfung geeigneter Maxterme beschreiben.
- Für jede Eingangskombination, an der die Funktion den Ausgangswert '0' produziert, verknüpft man die zugehörigen Maxterme mittels Konjunktion.
- Durch die konjunktive Verknüpfung dieser Maxterme erhält man **genau die vorgegebene Funktion**.
- ➔Konjunktive Normalform

5.5 Beispiel KNF mit 3 Eingangsvariablen

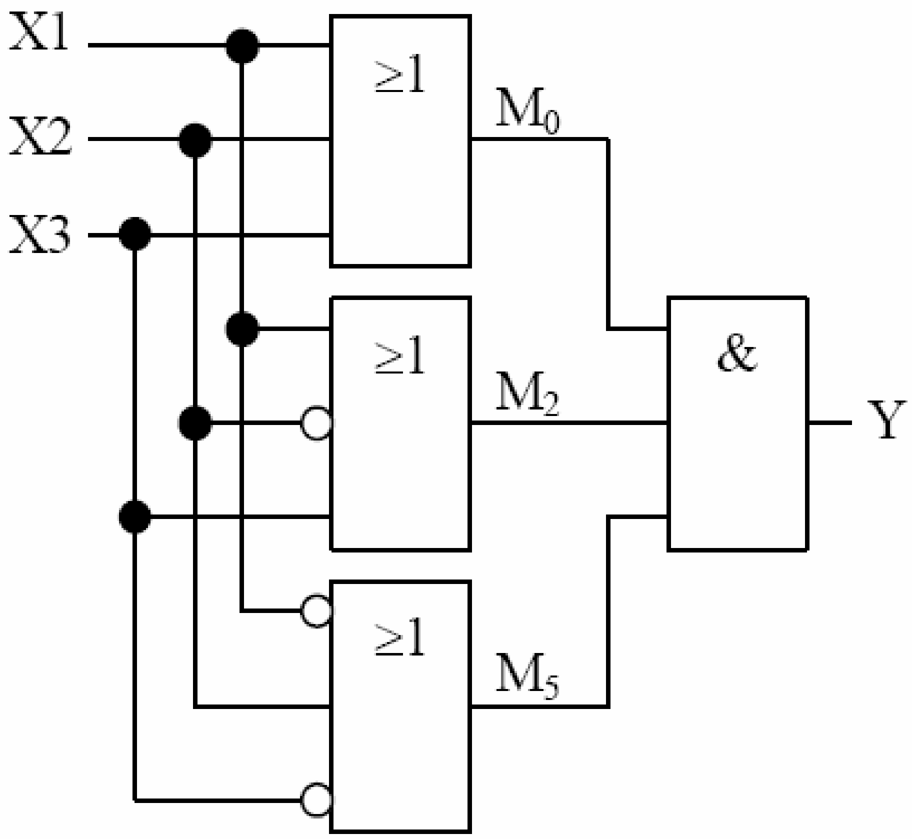
X3	X2	X1	Y	
0	0	0	0	$\leftarrow$
0	0	1	1	
0	1	0	0	$\leftarrow$
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	0	$\leftarrow$
1	1	0	1	
1	1	1	1	

Maxterme finden, die den Wert 0 erzeugen, wo die Funktion $Y(x_1,x_2,x_3) = 0$ ist

$$\begin{aligned} Y &= M_0 \wedge M_2 \wedge M_5 \\ &= (X3 \vee X2 \vee X1) \wedge (X3 \vee \overline{X2} \vee X1) \wedge (\overline{X3} \vee X2 \vee \overline{X1}) \end{aligned}$$

5.5 Logische Schaltung KNF mit n=3

X3	X2	X1	Y	
0	0	0	0	←
0	0	1	1	
0	1	0	0	←
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	0	←
1	1	0	1	
1	1	1	1	



$$
\begin{aligned}
Y &= M_0 \wedge M_2 \wedge M_5 \\
&= (X3 \vee X2 \vee X1) \wedge (X3 \vee \overline{X2} \vee X1) \wedge (\overline{X3} \vee X2 \vee \overline{X1})
\end{aligned}
$$