

# Analysis für Informatiker

Joachim Ohser

20. Oktober 2004

Dieses Skript soll die Vorlesung ergänzen; die Verwendung des Skripts bei der Vorbereitung der Prüfung ersetzt nicht den Vorlesungsbesuch. Der Inhalt des Skripts stimmt weitgehend mit dem Inhalt des in der Vorlesung behandelten Stoffs überein. Die Dozenten sind in der Gestaltung ihrer Vorlesung jedoch nicht an den Inhalt des Skripts gebunden. Prüfungsgegenstand ist stets der Inhalt der Vorlesung.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>7</b>
1.1 Reelle Zahlen . . . . .	7
1.1.1 Zahlenmengen . . . . .	7
1.1.2 Vollständige Induktion . . . . .	8
1.1.3 Rechnen mit ganzen Zahlen . . . . .	10
1.1.4 Potenzen und Logarithmen . . . . .	15
1.1.5 Zahlensysteme: Darstellung ganzer und rationaler Zahlen . . . . .	17
1.1.6 Absolutbetrag und Signum . . . . .	18
1.2 Gleichungen und Ungleichungen . . . . .	19
<b>2 Folgen und Reihen</b>	<b>21</b>
2.1 Zahlenfolgen . . . . .	21
2.1.1 Arithmetrische Folgen . . . . .	22
2.1.2 Geometrische Folgen . . . . .	22
2.1.3 Alternierende Folgen . . . . .	23
2.1.4 Konvergenz von Zahlenfolgen . . . . .	24
2.2 Reihen . . . . .	27
2.3 Potenzreihen . . . . .	31
<b>3 Funktionen</b>	<b>35</b>
3.1 Definition und allgemeine Eigenschaften . . . . .	35
3.2 Grenzwert und Stetigkeit . . . . .	37
3.3 Wichtige Funktionenklassen . . . . .	41
3.3.1 Polynome (ganz rationale Funktionen) . . . . .	41
3.3.2 Gebrochen rationale Funktionen . . . . .	46
3.3.3 Potenz- und Wurzelfunktionen . . . . .	49

3.3.4	Exponential- und Logarithmusfunktion . . . . .	50
3.3.5	Trigonometrische Funktionen . . . . .	52
3.3.6	Hyperbel- und Areafunktionen . . . . .	54
3.3.7	Eulersche Gammafunktion . . . . .	56
3.4	Parameterform von Funktionen und Kurven . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>63</b>
4.1	Ableitung einer Funktion . . . . .	63
4.2	Anwendungen der Differentialrechnung . . . . .	71
4.2.1	Charakteristische Kurvenpunkte . . . . .	71
4.2.2	Extremwertaufgaben . . . . .	73
4.2.3	Krümmung einer Kurve . . . . .	74
4.3	Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe . . . . .	75
4.3.1	MacLaurinsche Reihen . . . . .	75
4.3.2	Taylor-Reihen . . . . .	78
4.3.3	Das Newton-Verfahren . . . . .	79
4.3.4	Anwendung in der Fehlerrechnung . . . . .	81
4.4	Die l'Hospitalsche Regel . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>85</b>
5.1	Das unbestimmte Integral . . . . .	85
5.2	Das bestimmte Integral . . . . .	93
5.3	Uneigentliche Integrale . . . . .	97
5.4	Anwendungen . . . . .	99
5.4.1	Flächenberechnung . . . . .	99
5.4.2	Länge eines Graphen . . . . .	101
5.4.3	Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern . . . . .	103
5.5	Numerische Integration . . . . .	105
5.6	Fourier-Reihen . . . . .	108
5.6.1	Einführung . . . . .	108
5.6.2	Die Fourier-Koeffizienten einer Funktion . . . . .	110
5.6.3	Komplexe Darstellung . . . . .	116
<b>6</b>	<b>Differentialrechnung II</b>	<b>119</b>

6.1	Definition und Darstellungsform . . . . .	119
6.2	Partielle Differentiation . . . . .	121
6.3	Tangentialebenen und das totale Differential . . . . .	125
6.3.1	Geometrische Betrachtungen . . . . .	125
6.3.2	Das totale Differential . . . . .	127
6.4	Spezielle Ableitungstechniken . . . . .	128
6.4.1	Differentiation nach einem Parameter (Kettenregel) . . . . .	128
6.4.2	Implizite Differentiation . . . . .	129
6.5	Anwendungen . . . . .	130
6.5.1	Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme . . . . .	130
6.5.2	Extremwertaufgaben . . . . .	132
6.5.3	Fehlerrechnung . . . . .	134



# Kapitel 1

## Grundlagen

### 1.1 Reelle Zahlen

#### 1.1.1 Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  – Menge der *natürlichen Zahlen*, zulässig sind Addition, und Multiplikation, d. h. die Addition oder Multiplikation zweier natürlicher Zahlen ergibt stets wieder eine natürliche Zahl

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  – Menge der *ganzen Zahlen*, zulässig sind Addition, Subtraktion und Multiplikation

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$  – Menge der *rationalen Zahlen*, zulässig sind Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division

#### Beispiele (endliche und periodische Dezimalbrüche)

(i) endliche Dezimalbrüche:  $\frac{1}{4} = 0,25$ ,  $\frac{1}{8} = 0,125$

(ii) periodische Dezimalbrüche:  $\frac{1}{3} = 0,333\dots = 0,\overline{3}$ ,  $\frac{-2}{11} = -0,181818\dots = -0,\overline{18}$

Zahlen lassen sich als Punkte auf einer Geraden (der sogenannten Zahlengeraden) darstellen. Die rationalen Zahlen liegen dicht auf der Zahlengeraden, d. h., zu jedem Punkt auf der Zahlengeraden gibt es eine rationale Zahl, die in einer Umgebung dieses Punktes liegt. Die Umgebung kann beliebig klein sein.

Computer arbeiten in der Regel mit Teilmengen von  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Q}$ . Es gibt jedoch Probleme, z. B. mit der Darstellung der Zahl  $\pi$ .

#### Irrationale Zahlen

Die Zahl  $\pi$  ist keine rationale Zahl. Sie ist darstellbar z. B. durch

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \dots = 3,14159\dots = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

d.h., die Zahl  $\pi$  kann durch die Bildung eines Grenzprozesses (d. h. als Grenzwert einer unendlichen Folge) erhalten werden.<sup>1</sup>

Es gibt eine Vielzahl weiterer Zahlen, die nicht rational sind.

### Beispiele

(i) die Euler-Zahl, die ebenfalls durch die Bildung eines Grenzwertes erhalten werden kann,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7183\dots$$

(ii) die Quadratwurzel von 2,  $\sqrt{2}$ , deren Dezimalstellen man z.B. durch Intervallschachtelung erhält,

$$\begin{array}{llll} 1 < \sqrt{2} < 2, & \text{wegen} & 1^2 < 2 < 2^2 \\ 1.4 < \sqrt{2} < 1.5, & \text{wegen} & 1.4^2 < 2 < 1.5^2 \\ 1.41 < \sqrt{2} < 1.42, & \text{wegen} & 1.41^2 < 2 < 1.42^2 \\ 1.414 < \sqrt{2} < 1.415, & \text{wegen} & 1.414^2 < 2 < 1.415^2 \\ 1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143, & \text{wegen} & 1.4142^2 < 2 < 1.4143^2 \\ 1.41421 < \sqrt{2} < 1.41422, & \text{wegen} & 1.41421^2 < 2 < 1.41422^2 \\ & & \vdots & \vdots \end{array}$$

Diese Intervallschachtelung wäre beliebig oft fortsetzbar. Die dabei erhaltenen Dezimalbrüche für die Grenzen von  $\sqrt{2}$  sind weder endlich noch periodisch.

Eine Zahl, die nicht rational ist, heißt *irrational*.

Es gibt unendlich viele irrationale Zahlen, die wie die rationalen Zahlen dicht auf der Zahlengeraden liegen.

Die Vereinigung der Menge der rationalen und der Menge der irrationalen Zahlen wird Menge der *reellen Zahlen* genannt und mit  $\mathbb{R}$  bezeichnet,

$\mathbb{R}$  = Menge aller rationalen und irrationalen Zahlen.

### 1.1.2 Vollständige Induktion

Die *vollständige Induktion* ist eine Beweismethode, deren Prinzip auf der Menge der natürlichen Zahlen beruht.

#### Prinzip

(i) *Initialbehauptung*. Die zu beweisende Aussage ist für  $n = 1$  richtig.

---

<sup>1</sup>Die Summenschreibweise  $\sum$  wird auch in anderem Zusammenhang z. B. zur abkürzenden Schreibweise von  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$  verwendet. Es gilt  $\sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i$ .

- (ii) *Induktionsannahme.* Es wird angenommen, dass die Aussage für  $n = k$  richtig ist.
- (iii) *Induktionsbehauptung.* Wenn die Aussage für  $n = k$  richtig ist, dann ist sie auch für  $n = k + 1$  richtig.

Die Aussage ist für alle natürlichen Zahlen gültig, wenn zunächst (i) bewiesen wird und unter Verwendung der Annahme (ii) auch die Behauptung (iii) gezeigt werden kann.

### Beispiel

Zu beweisen ist die Aussage, dass für jede natürliche Zahl  $n$  die Gleichung

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1.1)$$

gilt.

- (i) *Initialbehauptung.*

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

- (ii) *Induktionsannahme.*

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

- (iii) *Induktionsbehauptung.*

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + k}_{\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

### Übungsaufgabe

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle reellwertigen Zahlen  $q$  mit  $q \neq 0$  und  $q \neq \pm 1$  die Gleichung

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad (1.2)$$

gilt.

### 1.1.3 Rechnen mit ganzen Zahlen

#### Fakultät

$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \\ 0! &= 1 \end{aligned}$$

Es wird angemerkt, dass sich  $n!$  auch mit Hilfe der Produktschreibweise

$$n! = \prod_{i=1}^n i$$

schreiben lässt.<sup>2</sup>

Zur Abschätzung der Fakultät kann die Approximation

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{Stirlingsche Formel} \quad (1.3)$$

verwendet werden.

#### Beispiel

$$10! = 3\,628\,800 \approx \sqrt{20\pi} \left(\frac{10}{e}\right)^{10} = 3\,598\,457$$

#### Anwendung in der Kombinatorik

- (i) Die Anzahl  $N$  der Permutationen von  $n$  Elementen, die voneinander verschieden sind, errechnet sich aus der Fakultät von  $n$ ,

$$N = n!.$$

So lassen sich beispielsweise aus den 5 Buchstaben  $A, B, C, D$  und  $E$  insgesamt 120 verschiedene Permutationen (d. h. Wörter) bilden.

- (ii) Die Anzahl  $N$  der Permutationen von  $n$  Elementen, von denen je  $n_i$  Elemente gleich sind,  $i = 1, \dots, k$ , ergibt sich aus

$$N = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!},$$

wobei  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$  ist. Ein in dem Zusammenhang häufig zitiertes Beispiel ist das Wort „Mississippi“, dessen Buchstaben sich durch Permutationen zu  $N = \frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34\,650$  Variationen anordnen lassen.

---

<sup>2</sup>Allgemein schreibt man  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{i=1}^n a_i$ .

**Binomialkoeffizienten**

Seien  $k$  und  $n$  nicht negative ganze Zahlen und  $k \leq n$ . Dann heißt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

der *Binomialkoeffizient* „ $n$  über  $k$ “.

Es gilt stets

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Die letzte Gleichung ist die Motivation für das *Pascalsche Dreieck*

$$\begin{array}{ccccccc} n=0 & & & & & & 1 \\ n=1 & & & & & & 1 & 1 \\ n=2 & & & & & & 1 & 2 & 1 \\ n=3 & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ n=4 & & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ n=5 & & & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \end{array}$$

mit dem alle Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$ ,  $k = 0, \dots, n$  nach einem einfachen Schema aus den Binomialkoeffizienten  $\binom{n-1}{k}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$  berechnet werden können.

**Spezialfälle**

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1$$

**Beispiele**

(i)

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$$

(ii)

$$\binom{100}{97} = \binom{100}{3} = \frac{100!}{3! \cdot 97!} = \frac{98 \cdot 99 \cdot 100}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 161\,700$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^3 \binom{3+i}{3} &= \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} \\
&= 1 + 4 + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\
&= 1 + 4 + 10 + 20 \\
&= 35
\end{aligned}$$

### Anwendungen in der Kombinatorik

Die Anzahl  $N$  von Kombinationen aus  $n$  Elementen zu je  $k$  Elementen

(i) ohne Berücksichtigung der Reihenfolge der  $k$  ausgewählten Elemente errechnet sich aus

$$N = \binom{n}{k},$$

(ii) und mit Berücksichtigung der Reihenfolge ergibt sich

$$N = \binom{n}{k} k!.$$

So ergibt sich beispielsweise für „6 aus 49“ die Anzahl

$$N = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,983\,816.$$

### Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ohne der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorgreifen zu wollen, sollen zwei Anwendungen des Binomialkoeffizienten zitiert werden.

- (i) Eine Grundgesamtheit bestehe aus  $N$  Elementen (z. B. Teile für die Herstellung eines Geräts). Von diesen Elementen seien  $M$  Elemente vom Typ A (z. B. fehlerhafte Teile). Weiterhin werden aus den  $N$  Elementen (zum Bau des Geräts)  $n$  Elemente ausgewählt. Von diesen  $n$  Elementen ist wiederum eine zufällige Anzahl  $X$  vom Typ A. Die Wahrscheinlichkeit<sup>3</sup>, dass unter den  $n$  Elementen genau  $m$  Elemente vom Typ A sind (d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $X = m$  ist), errechnet sich aus

$$\mathbb{P}(X = m) = \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}, \quad m = 0, \dots, n.$$

---

<sup>3</sup>Das Symbol  $\mathbb{P}$  steht für Wahrscheinlichkeit.

- (ii) Nun wird angenommen, dass die Grundgesamtheit groß im Vergleich zur Anzahl  $n$  der daraus entnommenen Elemente ist,  $N \gg n$ . Mit  $p$  wird der Anteil der in der Grundgesamtheit enthaltenen Elemente vom Typ A bezeichnet,  $0 < p < 1$ . Dann gilt

$$\mathbb{P}(X = m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}, \quad m = 0, \dots, n.$$

Wenn z. B. von einem Hersteller von Bauelementen garantiert werden kann, dass höchstens 1 % der Lieferung fehlerhaft ist ( $p = 0,01$ ) und ein Gerät aus 16 Bauelementen hergestellt wird, dann kann angenommen werden, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0) &= \binom{16}{0} \cdot 0,01^0 \cdot (0,99)^{16} = 0,851, \\ \mathbb{P}(X = 1) &= \binom{16}{1} \cdot 0,01^1 \cdot (0,99)^{15} = 0,138, \\ \mathbb{P}(X = 2) &= \binom{16}{2} \cdot 0,01^2 \cdot (0,99)^{14} = 0,021, \\ &\vdots \\ \mathbb{P}(X = 16) &= \binom{16}{16} \cdot 0,01^{16} \cdot (0,99)^0 = 1 \cdot 10^{-32}. \end{aligned}$$

Das bedeutet unter anderem, dass lediglich mit einer Sicherheit von 85,1 % davon ausgegangen werden kann, dass das Gerät aus fehlerfreien Bauteilen besteht.

### Anwendungen in der Bildverarbeitung

In der Bildverarbeitung werden Glättungsfilter eingesetzt, unter anderem auch Binomialfilter. Die Maske  $M$  des  $3 \times 3$ -Binomialfilters errechnet sich aus den drei Binomialkoeffizienten

$$\binom{2}{0} = 1, \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \text{und} \quad \binom{2}{2} = 1.$$

Es gilt

$$M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} (1, 2, 1) = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analog erhält man die Maske eines  $5 \times 5$ -Binomialfilters aus

$$\binom{4}{0} = 1, \quad \binom{4}{1} = 4, \quad \binom{4}{2} = 6, \quad \binom{4}{3} = 4, \quad \binom{4}{4} = 1$$

und

$$M = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{16}(1, 4, 6, 4, 1) = \frac{1}{256} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Binomische Formeln

Für zwei reelle Zahlen  $a$  und  $b$  gilt

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{und} \\ (a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4. \end{aligned}$$

Es ist unschwer zu erkennen, dass die auf den rechten Seiten der Gleichungen auftretenden Koeffizienten Binomialkoeffizienten sind. Allgemein, d. h. für beliebige Exponenten  $n$ , kann man daher schreiben

$$\begin{aligned} (a + b)^n &= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{1. Binomische Formel.} \end{aligned}$$

Da diese Formel für beliebige reelle Werte  $b$  gilt, erhält man unmittelbar

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} (-b)^k \quad \text{2. Binomische Formel.}$$

Außerdem gilt

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad \text{3. Binomische Formel.}$$

### Beispiele

(i) Vereinfachen von Ausdrücken.

$$\frac{(x + y)^2(x^2 - 2xy + y^2)}{x^2 - y^2} = \frac{(x + y)^2(x - y)^2}{(x + y)(x - y)} = (x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

(ii) Effektives Berechnen von Potenzen.

$$\begin{aligned} 99^2 &= (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 9801 \\ 999^2 &= (1000 - 1)^2 = 1000^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 1 + 1^2 = 998001, \\ &\vdots \end{aligned}$$

### 1.1.4 Potenzen und Logarithmen

#### Potenzen

$a^b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  „ $b$ -te Potenz von  $a$ “ oder „ $a$  hoch  $b$ “

Spezialfälle sind

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a},$$

und für ganzzahlige Exponenten  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}, \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

#### Rechenregeln

Für beliebige reelle Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  gilt

$$a^b a^c = a^{b+c}, \quad (a^b)^c = a^{b \cdot c}, \quad a^{-b} = \frac{1}{a^b}.$$

#### Beispiel

$$\sqrt[50]{9801^{100}} = 9801^{100 \cdot \frac{1}{50}} = 9801^2 = 96059601$$

Wenn man mit dem Taschenrechner zuerst  $9801^{100}$  berechnen will, erzeugt man in der Regel einen „Überlauf“ des Wertebereichs.

Das *Wurzel ziehen* ist die erste Umkehrung des Potenzierens.

#### Logarithmen

$\log_b x$ ,  $b, x \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 1$  „*Logarithmus* von  $x$  zur Basis  $b$ “

Der Logarithmus ist durch

$$y = \log_b x \quad \Leftrightarrow \quad x = b^y$$

definiert, d. h., der Logarithmus ist die zweite Umkehrung des Potenzierens.

#### Beispiele

(i) Logarithmus zur Basis 2 ( $b = 2$ ):  $\log_2 1024 = 10$

(ii) dekadischer Logarithmus ( $b = 10$ ):

$$\log_{10} 100 = 2, \quad \log_{10} 1000 = 3, \dots$$

abkürzende Schreibweise „lg“ statt „log<sub>10</sub>“

(iii) natürlicher Logarithmus ( $b = e$ ):

$$\log_e 10 = 2,302585\dots$$

abkürzende Schreibweise „ln“ statt „log<sub>e</sub>“

### Logarithmengesetze

(i)

$$\log_b(x_1 \cdot x_2) = \log_b x_1 + \log_b x_2$$

(ii)

$$\log_b \left( \frac{x_1}{x_2} \right) = \log_b x_1 - \log_b x_2$$

(iii)

$$\log_b x^y = y \cdot \log_b x$$

(iv)

$$\log_b x = \frac{\lg x}{\lg b} = \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{\log_c x}{\log_c b}$$

(v)

$$\log_b b^x = x, \quad b^{\log_b x} = x$$

### Beispiele

(i) Die Anzahl  $n$  der Binärstellen einer natürlichen Zahl  $m$  errechnet sich aus

$$n = \text{int}(\log_2 m) + 1,$$

wobei  $\text{int}(\cdot)$  den ganze Anteil des Arguments bezeichnet. So erhält man beispielsweise

$$n = \text{int}(\log_2 1024) + 1 = \text{int} \left( \frac{\ln 1024}{\ln 2} \right) + 1 = \text{int} \left( \frac{6,93147\dots}{0,69314\dots} \right) + 1 = 11,$$

mit  $n = \text{int}(\log_2 1024) = 10$ .

(ii) Als Modifikation der Stirlingschen Formel wird häufig

$$\ln n! \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi}$$

verwendet. Durch Umformen und Anwenden der Potenz- bzw. Logarithmengesetze sieht man, dass diese Abschätzung mit Formel (1.3) identisch ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \ln n! &\approx n \ln n + \frac{1}{2} \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi} \\ n! &\approx n^n n^{\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi} \\ &= n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n} \\ &= \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \end{aligned}$$

### 1.1.5 Zahlensysteme: Darstellung ganzer und rationaler Zahlen

Zahlensysteme dienen der Notation von Zahlen

(i) Dezimalsystem. Das *Dezimalsystem* kann in der Form

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i 10^i, \quad a_i \in \{0, \dots, 9\},$$

eingeführt werden, wobei  $a_i$  die Ziffern des Dezimalsystems aus der Ziffernmenge  $\{0, \dots, 9\}$  bezeichnet. Üblich ist die Schreibweise

$$x = \dots a_3 a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots,$$

wobei im englisch sprachigen Raum statt dem Dezimalkomma ein Dezimalpunkt verwendet wird. Wenn aus dem Kontext nicht klar ist, dass das Dezimalsystem zu Grunde liegt, ergänzt man als Index die Basis  $b = 10$  des Dezimalsystems,

$$x = (\dots a_3 a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots)_{10}.$$

(ii) Dualsystem.

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i 2^i, \quad b_i \in \{0, 1\},$$

Schreibweise  $x = (\dots b_3 b_2 b_1 b_0, b_{-1} b_{-2} b_{-3} \dots)_2$

(iii) Hexadezimalsystem.

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i 16^i, \quad c_i \in \{0, \dots, 9, a, \dots, f\},$$

Statt der Kleinbuchstaben  $a, \dots, f$  werden manchmal auch die Großbuchstaben  $A, \dots, F$  verwendet.

Schreibweise  $x = (\dots c_3 c_2 c_1 c_0, c_{-1} c_{-2} c_{-3} \dots)_{16}$

**Beispiele**

(i) Umrechnungen ins Dezimalsystem.

$$\begin{aligned} 101_2 &= 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5_{10} = 5 \\ 1,01_2 &= 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 1,25 \\ ff_{16} &= 15 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 255 \end{aligned}$$

(i) Umrechnungen ins Dualsystem.

$$\begin{array}{r} 221_{10} = \quad 10_2 \cdot 1100100_2 = \quad 11001000_2 \\ \quad + 10_2 \cdot \quad 1010_2 \quad + \quad 10100_2 \\ \quad + \quad 1_2 \cdot \quad 1_2 \quad + \quad 1_2 \\ \hline \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 11011101_2 \end{array}$$

**1.1.6 Absolutbetrag und Signum**Der *Absolutbetrag*  $|x|$  einer Zahl  $x \in \mathbb{R}$  ist definiert durch

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}.$$

Der Absolutbetrag  $|x|$  beschreibt den Abstand der Zahl  $x$  vom Ursprung 0 der Zahlengeraden. Es gilt

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

**Eigenschaften**

(i)

$$|x| \geq 0$$

(ii)

$$|x| = |-x|$$

(iii)

$$\begin{aligned} |x| \leq a &\Leftrightarrow -a \leq x \leq a \\ |x| \geq a &\Leftrightarrow x \leq -a \quad \text{oder} \quad x \geq a \end{aligned}$$

(iv)

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

(v)

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{Dreiecksungleichung}$$

Das *Signum* oder „Vorzeichen“ einer Zahl  $x$  ist gegeben durch

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}, \quad \text{für } x \neq 0, \quad \operatorname{sgn}(0) = 0.$$

## 1.2 Gleichungen und Ungleichungen

Für reelle Zahlen  $a, b, c, d$  gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} a < b &\Rightarrow a + c < b + c \\ a < b, c < d &\Rightarrow a + c < b + d \\ a < b &\Rightarrow ac < bc \quad \text{für } c > 0 \\ &\quad ac > bc \quad \text{für } c < 0 \\ a < b, 0 < c < d &\Rightarrow ac < bd \\ a < b &\Rightarrow -a > -b \\ 0 < a < b &\Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \end{aligned}$$

Zur Wiederholung sollen nur einige Beispiele gerechnet werden.

### Beispiele

(i)

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{x-1} &= \sqrt{2x-1} && |^2 \\ x - 2\sqrt{x(x-1)} + x - 1 &= 2x - 1 && | - (2x - 1) \\ 2\sqrt{x(x-1)} &= 0 && | : 2 \\ \sqrt{x(x-1)} &= 0 && |^2 \\ x(x-1) &= 0 \\ x^2 - x &= 0 && \text{quadratische Gleichung vom Typ } x^2 + px + q = 0 \\ &&& \text{allgemeine Lösung } x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ x_{1/2} &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 0 && \text{keine zulässige Lösung, da } \sqrt{-1} \text{ nicht definiert} \end{aligned}$$

(ii) Es ist zu beachten, dass es Gleichungen gibt, die auf analytischem Wege nicht lösbar sind. Die Gleichung

$$x = e^{-x}$$

hat eine Lösung  $x = 0,567\dots$ , die jedoch nur numerisch berechnet werden kann. (Man setzt auf der rechten Seite als Anfangslösung für  $x$  den Wert 1 ein. Der dabei auf der linken Seite für  $x$  erhaltene Wert wird wieder auf der rechten Seite eingesetzt, u.s.w.)

(iii)

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 3 \quad | \cdot (x+2), \quad \text{Vorzeichen beachten!}$$

$$1. \text{ Fall: } x+2 > 0, \quad \text{d. h. } x > -2$$

$$x-1 \geq 3(x+2)$$

$$-7 \geq 2x$$

$$x \leq -\frac{7}{2} \quad \text{Die Lösungsmenge } L_1 \text{ ist leer, } L_1 = \emptyset.$$

$$2. \text{ Fall: } x+2 < 0, \quad \text{d. h. } x < -2$$

$$x-1 \leq 3(x+2)$$

$$-7 \leq 2x$$

$$x \geq -\frac{7}{2}, \quad \text{d. h. } L_2 = \left[ -\frac{7}{2}, -2 \right)$$

Als Gesamtlösungsmenge  $L$  ergibt sich  $L = L_1 \cup L_2 = \left[ -\frac{7}{2}, -2 \right)$ .

# Kapitel 2

## Folgen und Reihen

### 2.1 Zahlenfolgen

*Definition.* Eine Folge reeller Zahlen  $a_1, a_2, \dots$ , die gewonnen wird durch eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  genau eine reelle Zahl  $a_n$  zuordnet, heißt *Zahlenfolge*.

Schreibweise  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  oder kurz  $\{a_n\}$

Die Summe

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i, \quad n \in \mathbb{N},$$

heißt *Partialsumme* von  $\{a_n\}$ .

#### Beispiele

(i)  $1, 2, 3, \dots, \quad a_n = n,$

(ii)

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \quad a_n = \frac{1}{2^{n-1}},$$

(iii)

$$1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \dots, \quad a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}.$$

Wichtige Spezialfälle sind arithmetische und geometrische Folgen. Ausserdem wird zwischen nicht alternieren und alternierenden Folgen unterschieden.

### 2.1.1 Arithmetrische Folgen

*Definition.* Eine Folge  $\{a_n\}$  heißt *arithmetisch*, wenn es eine reelle Zahl  $d \neq 0$  gibt, so dass

$$a_{n+1} - a_n = d \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Das bedeutet, man berechnet ein Folgenglied durch Addition von  $d$  zu seinem Vorgänger.

#### Beispiele

(i)  $2, 5, 8, 11 \dots, \quad d = 3,$

(ii)  $4, 2, 0, -2 \dots, \quad d = -2.$

Für jede arithmetische Folge  $\{a_n\}$  gilt

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d, \\ s_n &= n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d. \end{aligned}$$

Die letzte Formel erhält man direkt aus Formel (1.1).

#### Beispiel

Für die arithmetische Folge  $\{a_n\}$  mit  $a_2 = 1,59$  und  $a_7 = 12,54$  ist die Partialsumme  $s_{100}$  zu berechnen. Es gilt  $a_7 - a_2 = 5d$ , und daraus folgt  $d = \frac{1}{5}(12,54 - 1,59) = 2,19$ . Außerdem ist  $a_1 = a_2 - d = 1,59 - 2,19 = -0,6$ . Schließlich erhält man

$$s_{100} = 100 \cdot (-0,6) + 2,19 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} = 10\,780,5.$$

### 2.1.2 Geometrische Folgen

*Definition.* Eine Folge  $\{a_n\}$  heißt *geometrisch*, wenn es eine reelle Zahl  $q$  gibt ( $q \neq 0, q \neq \pm 1$ ), so dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

#### Beispiele

(i)

$$2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \dots, \quad q = -\frac{1}{2}$$

(ii)

$$2, 6, 18, 54, \dots, \quad q = 3$$

Für jede geometrische Folge  $\{a_n\}$  gilt

$$\begin{aligned} a_n &= q^{n-1} \cdot a_1, \\ s_n &= a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}. \end{aligned}$$

Die letzte Formel erhält man wiederum direkt aus Formel (1.2).

### Beispiel

Für die geometrische Folge  $\{a_n\}$  mit  $a_1 = 4$  und  $q = 2$  ist der Index  $n \in \mathbb{N}$  des Folgengliedes  $a_n$  gesucht, so dass  $s_n = 252$  gilt.

Aus den obigen Formeln erhält man

$$\begin{aligned} 252 &= 4 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 4 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\ 63 &= 2^n - 1 \\ 64 &= 2^n \\ n &= \log_2 64 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

### 2.1.3 Alternierende Folgen

*Definition.* Eine Folge  $\{a_n\}$  heißt *alternierend*, wenn zwei aufeinander folgende Glieder immer unterschiedliche Vorzeichen haben, d. h.

$$\operatorname{sgn} \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = -1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

### Beispiele

(i)

$$1, -2, 3, -4, 5, \dots, \quad a_n = n \cdot (-1)^{n+1}$$

(ii)

$$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{11}, \dots, \quad a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$$

Es wird angemerkt, dass eine Folge sowohl geometrisch als auch alternierend sein kann. Jede arithmetische Folge ist dagegen nicht alternierend.

### 2.1.4 Konvergenz von Zahlenfolgen

In diesem Abschnitt wird das Verhalten der Folgenglieder bei wachsendem  $n$ , d. h. für  $n \rightarrow \infty$  („ $n$  gegen unendlich“) untersucht. Der Grenzwert der Folge für  $n \rightarrow \infty$  wird mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

bezeichnet.

**Beispiel.** Die Glieder der Folge  $\{a_n\}$  mit  $a_n = \frac{1}{n}$  nähern sich für  $n \rightarrow \infty$  immer mehr der Null an,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

In jedem (beliebig kleinen) Intervall um Null liegen unendlich viele Folgenglieder und nur endlich viele außerhalb.

*Definition.* Eine Folge  $\{a_n\}$  heisst *konvergent* für  $n \rightarrow \infty$  gegen eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$ , wenn außerhalb von jeder Umgebung um  $a$  nur endlich viele Folgenglieder liegen<sup>1</sup>, d. h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Gibt es eine solche Zahl  $a$  nicht, dann heißt die Folge  $\{a_n\}$  *divergent*. Wenn  $a = 0$  ist, dann wird  $\{a_n\}$  auch *Nullfolge* genannt.

#### Beispiele

(i)

$$a_n = n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty,$$

$\{a_n\}$  ist divergent.

(ii)

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

$\{a_n\}$  ist konvergent und Nullfolge.

(iii)

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 0,$$

$\{a_n\}$  ist konvergent und Nullfolge.

(iv)

$$a_n = (-1)^{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \quad \text{existiert nicht,}$$

$\{a_n\}$  ist divergent.

Die Definition der Konvergenz einer Folge ist nicht konstruktiv. Es gibt daher Schwierigkeiten die Konvergenz einer Folge auf der Grundlage der Definition nachzuweisen. Besser geeignet ist die Verwendung bekannter Grenzwerte und einiger Rechenregeln für Grenzwerte.

### Wichtige Grenzwerte

(i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

(ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} = \begin{cases} 0, & |a| > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & a < 1 \end{cases}$$

(iii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & |a| < 1 \end{cases}$$

(iv)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0$$

(v)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a, \quad a \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

(vi)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_1 n + b_0}{c_\ell n^\ell + c_{\ell-1} n^{\ell-1} + \dots + c_1 n + c_0} = \begin{cases} 0, & k < \ell \\ \frac{b_k}{c_k}, & k = \ell \\ \infty, & k > \ell, \operatorname{sgn} b_k = \operatorname{sgn} c_\ell \\ -\infty, & k > \ell, \operatorname{sgn} b_k \neq \operatorname{sgn} c_\ell \end{cases}$$

### Beispiele

(i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 7n - 1}{n^3 - 5} = 0$$

(ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 7n^2 - 2n - 1}{-5n^3 + 10} = -\frac{3}{5}$$

(iii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 1}{10n^2 + 20n + 30} = \infty$$

**Rechenregeln**

Es seien  $\{a_n\}$  und  $\{b_n\}$  konvergente Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  bzw.  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , wobei  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

(i)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= a + b \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= a - b\end{aligned}$$

(ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad c \in \mathbb{R}$$

(iii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

(iv)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \quad b_n, b \neq 0$$

(v)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b, \quad a_n, a > 0$$

**Beispiele**

(i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n + \sqrt[3]{3} \cdot \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 2n + 3} \right] = e^2 + \frac{1}{2}$$

(ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n+4} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}{n^n \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n} = \frac{e^2}{e^4} = e^{-2}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{4n^2 + 3n} - 2n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{4n^2 \left( 1 + \frac{3n}{4n^2} \right)} - 2n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \left[ \sqrt{1 + \frac{3n}{4n^2}} - 1 \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \frac{\left( \sqrt{1 + \frac{3n}{4n^2}} - 1 \right) \left( \sqrt{1 + \frac{3n}{4n^2}} + 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{3n}{4n^2}} + 1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \frac{1 + \frac{3n}{4n^2} - 1}{\sqrt{1 + \frac{3n}{4n^2}} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \frac{3n}{4n^2}}{\sqrt{1 + \frac{3n}{4n^2}} + 1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{1 + \frac{3}{4n}} + 1} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Eine alternierende Folge ist konvergent, wenn die Folge der Absolutbeträge ihrer Glieder Nullfolge ist, sonst ist sie divergent.

### Beispiele

(iv)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$$

(v)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad \text{ist divergent}$$

## 2.2 Reihen

*Definition.* Eine *Reihe* ist die Summe der Elemente einer Folge  $\{a_n\}$ ,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Konvergiert die Folge  $\{s_n\}$  der endlichen Partialsummen  $s_n = \sum_{n=1}^n a_n$ , d. h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s, \quad s \in \mathbb{R},$$

dann heißt auch die zu der Folge  $\{a_n\}$  gehörige Reihe *konvergent* und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Ist die Folge  $\{s_n\}$  divergent, dann heißt auch die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  *divergent*.

Neben der Berechnung des Grenzwertes einer Reihe spielt der Nachweis seiner Existenz eine wichtige Rolle. Ein solcher Nachweis ist in der Regel schwieriger als der Nachweis der Konvergenz von Folgen.

### Beispiele

- (i) Die Folge  $\{a_n\}$  mit  $a_n = 1^n$  ist konvergent,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ . Die Folge der Partialsummen  $\{s_n\}$  mit  $s_n = \sum_{n=1}^n a_n = n$  sowie die dazu gehörige Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sind jedoch divergent.
- (ii) Zu arithmetischen Folgen gehörige Reihen (so genannte *arithmetische Reihen*) sind divergent,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} d = \pm\infty.$$

- (iii) Zu geometrischen Folgen gehörige Reihen (so genannte *geometrische Reihen*) sind konvergent, wenn  $-1 < q < 1$ . Das folgt unmittelbar aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

- (iv) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

wird *harmonische Reihe* genannt. Die harmonische Reihe ist divergent,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ . Das ist jedoch nicht offensichtlich und wird später noch gezeigt, siehe Seite 30.

### Bemerkungen

- (i) An den Beispielen (iii) und (iv) sieht man, dass aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  nicht notwendiger Weise folgen muss, dass die zugehörige Reihe konvergent ist.
- (ii) Umgekehrt gilt jedoch, dass aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  stets die Divergenz der zugehörigen Reihe folgt.

### Konvergenzkriterien

- (i) *Vergleichskriterium*. Es seien  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  Reihen mit positiven Gliedern,  $a_n, b_n > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Aussagen über  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  lassen sich in den folgenden Varianten (Majorantenkriterium bzw. Minorantenkriterium) auf  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  übertragen.

*Majorantenkriterium*. Wenn  $a_n \leq b_n$  für alle  $n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$  ist, dann gilt auch  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ .

*Minorantenkriterium*. Wenn  $a_n \geq b_n$  für alle  $n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergent ist, dann ist auch  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergent.

(ii) *Quotientenkriterium.* Statt der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  wird der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$$

des Absolutbetrags aufeinander folgender Glieder betrachtet.

Falls  $q < 1$ , dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent,

falls  $q > 1$ , dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergent, und

falls  $q = 1$ , dann kann auf der Grundlage des Quotientenkriteriums keine Aussage zur Konvergenz bzw. Divergenz von  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  gemacht werden.

(iii) *Wurzelkriterium.* An Stelle der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  wird der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$$

betrachtet.

Falls  $q < 1$ , dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent,

falls  $q > 1$ , dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergent, und

falls  $q = 1$ , dann kann auf der Grundlage des Wurzelkriteriums keine Aussage gemacht werden.

(iv) *Kriterium für alternierende Reihen (Leibniz-Kriterium).* Eine alternierende Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ,  $a_n > 0$ , konvergiert, wenn es eine natürliche Zahl  $n_0$  gibt, so dass  $a_{n+1} \leq a_n$  für alle  $n > n_0$  und wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ist.

## Beispiele

(i) Aussagen zur Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

erhält man beispielsweise über das Quotientenkriterium. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0.$$

Daraus folgt, dass die Reihe konvergent ist.

(ii) Aussagen zur Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+2}{n+5} \right)^{n^2}$$

erhält man unter anderem über das Wurzelkriterium. Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{n+2}{n+5} \right)^{n^2} \right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n+5} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{5}{n}} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{5}{n}\right)^n} = \frac{e^2}{e^5} = \frac{1}{e^3} < 1.\end{aligned}$$

Die Reihe ist also konvergent.

(iii) Aussagen zur Konvergenz der alternierenden Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$$

bekommt man über das Leibniz-Kriterium. Es gilt

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+2} \leq a_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{für alle } n \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Die Reihe ist also auch konvergent.

(iv) Mit Hilfe des Vergleichskriteriums kann gezeigt werden, dass die harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergiert. Dazu wird eine Vergleichsfolge  $\{b_n\}$  auf die folgende Weise konstruiert:

$$\begin{array}{l} \{a_n\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \dots \right\} \\ \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \{b_n\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \dots \right\} \end{array}$$

Wegen  $b_n \leq a_n$  und

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty,$$

und damit ist auch  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ , d. h., die harmonische Reihe ist divergent.

(v) Analog untersucht man das Konvergenzverhalten der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}, \quad a > 1.$$

Mit Hilfe des Vergleichskriteriums erhält man

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} &= 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{4^a} + \frac{1}{5^a} + \frac{1}{6^a} + \frac{1}{7^a} + \dots \\
 &= 1 + \left( \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} \right) + \left( \frac{1}{4^a} + \frac{1}{5^a} + \frac{1}{6^a} + \frac{1}{7^a} \right) + \dots \\
 &\leq 1 + \left( \frac{1}{2^a} + \frac{1}{2^a} \right) + \left( \frac{1}{4^a} + \frac{1}{4^a} + \frac{1}{4^a} + \frac{1}{4^a} \right) + \dots \\
 &= 1 + \frac{2}{2^a} + \frac{4}{4^a} + \frac{8}{8^a} + \dots \\
 &= 1 + \left( \frac{1}{2^{a-1}} \right)^1 + \left( \frac{1}{2^{a-1}} \right)^2 + \left( \frac{1}{2^{a-1}} \right)^3 + \dots \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{a-1}} \right)^n \quad (\text{ist eine geometrische Reihe}) \\
 &= 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{a-1}}} \\
 &< \infty,
 \end{aligned}$$

d. h., die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$  ist konvergent für  $a > 1$ .

(vi) Aussagen zur Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3 + 4}$$

erhält man beispielsweise über das Vergleichskriterium. Es gilt

$$\frac{2n}{n^3 + 4} \leq \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} \quad \text{für alle } n, \text{ und somit ist } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3+4}$  ist damit ebenfalls konvergent.

## 2.3 Potenzreihen

*Definition.* Eine Reihe der Form

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

heißt *Potenzreihe*.

**Beispiele**

(i)

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(ii)

$$f(x) = a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}, a > 0$$

(iii)

$$f(x) = \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad -1 < x \leq 1$$

(iv)

$$f(x) = \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(v)

$$f(x) = \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(vi)

$$f(x) = \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1$$

(vii)

$$f(x) = \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x| \leq 1$$

**Konvergenz**

Die Konvergenz ist für eine Potenzreihe eine sehr wichtige Eigenschaft. Insbesondere stellt sich die Frage, für welche Werte  $x$  eine Potenzreihe konvergiert und für welche  $x$  sie divergiert.

Für einen festen Wert  $x$  kann jede Potenzreihe zunächst allgemein als Reihe betrachtet werden, und man kann die Konvergenzkriterien aus Abschnitt 2.2 anwenden.

(i) *Quotientenkriterium.* Es gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x|,$$

d. h., eine Potenzreihe ist konvergent, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| < 1 \quad \text{bzw.}$$

$$|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Der Wert

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

wird *Konvergenzradius* einer Potenzreihe genannt ( $r \geq 0$ ).

(ii) *Wurzelkriterium.* Analog erhält man

$$\sqrt[n]{|a_nx^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x|,$$

und eine Potenzreihe konvergiert, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| < 1 \quad \text{d. h.}$$

$$|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = r.$$

Eine Potenzreihe ist konvergent für  $|x| < r$ . Die Menge aller  $x$ , für die eine Potenzreihe konvergent ist, heißt *Konvergenzbereich*. Die Potenzreihe ist divergent für  $|x| > r$ , und für  $|x| = r$  lässt sich auf der Grundlage des Quotienten- bzw. Wurzelkriteriums keine Aussage über Konvergenz treffen.

### Beispiele

(i) Gegeben sei die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , d. h.  $a_n = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Für Konvergenzaussagen empfiehlt sich in diesem Fall z. B. das Quotientenkriterium. Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$$

ist der Konvergenzradius  $r = 1$ . Die Potenzreihe ist also für  $|x| < 1$  konvergent und für  $|x| > 1$  divergent. Für  $x = 1$  und  $x = -1$  kann mit Hilfe des Quotientenkriteriums keine Aussage zur Konvergenz getroffen werden. Es ist jedoch offensichtlich, dass die Potenzreihe auch für  $x = 1$  und  $x = -1$  divergiert.

(ii) Analog erhält man für

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

mit Hilfe des Quotientenkriteriums

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty,$$

d. h., der Konvergenzradius ist also unendlich ( $r = \infty$ ) und die Potenzreihe konvergiert für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

(iii) Für die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

folgt unmittelbar aus dem Quotientenkriterium

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  ist also für  $|x| < 1$  konvergent und für  $|x| > 1$  divergent. Für  $|x| = 1$  lässt sich mit Hilfe des Quotientenkriteriums keine Aussage treffen.

Für  $x = 1$  erhält man aber die harmonische Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$  deren Divergenz in Abschnitt 2.2 bereits nachgewiesen wurde. Für  $x = -1$  bekommt man die alternierende Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ , die nach dem Leibniz-Kriterium konvergent ist.

Zusammenfassend erhält man als Ergebnis, dass die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  für  $x \in [-1, 1)$  konvergent und sonst divergent ist.

# Kapitel 3

## Funktionen

### 3.1 Definition und allgemeine Eigenschaften

*Definition.* Unter einer *Funktion* versteht man eine Vorschrift, die jedem Element  $x$  aus einer Menge  $D(f)$  genau einen Wert  $y = f(x)$  aus einer Menge  $W(f)$  zuordnet. Die Mengen  $D(f)$  und  $W(f)$  heißen *Definitionsbereich* bzw. *Wertebereich* der Funktion  $f$ . Weiterhin bezeichnet man  $x$  als *unabhängige Variable* oder *Argument* und  $y$  als abhängige Variable oder *Funktionswert*.

Schreibweise  $f : D \rightarrow W$

Für reelle Funktionen sind sowohl  $D(f)$  als auch  $W(f)$  Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , d. h.  $D(f), W(f) \subseteq \mathbb{R}$ .

#### Beispiel

$$f(x) = x^2, \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad W(f) = [0, \infty)$$

Die Zuordnung  $y = x^2$  ist eindeutig, d. h., zu jedem Wert  $x \in \mathbb{R}$  gibt es genau einen Wert  $y$ . Jedoch gibt es zu jedem  $y \in (0, \infty)$  zwei verschiedene Werte  $x_1 = \sqrt{y}$  und  $x_2 = -\sqrt{y}$ .

*Definition.* Eine Funktion  $f$  heißt *eindeutig*, wenn für  $x_1, x_2 \in D(f)$  mit  $x_1 \neq x_2$  gilt  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

Jede eindeutige Funktion  $f$  besitzt eine *inverse Funktion*  $f^{-1}$ , für die gilt

$$\begin{aligned} D(f^{-1}) &= W(f), \\ W(f^{-1}) &= D(f), \\ f^{-1}(f(x)) &= x, \quad \text{für alle } x \in D(f), \\ f(f^{-1}(y)) &= y, \quad \text{für alle } y \in W(f). \end{aligned}$$

Die inverse Funktion wird auch *Umkehrfunktion* genannt.

Die Menge

$$\{(x, f(x)) : x \in D(f)\}$$

heißt *Graph* oder *Kurve*.

*Bemerkung.* Die Bestimmung der inversen Funktion  $f^{-1}$  von  $f$  entspricht anschaulich einer „Spiegelung“ des Graphen der Funktion  $f$  an der Geraden  $y = x$ .

### Beispiele

- (i) Die Funktion  $f(x) = 3x + 6$  mit  $D(f) = W(f) = \mathbb{R}$  ist eineindeutig. Das Bestimmen der inversen Funktion entspricht dem Umstellen der Gleichung  $y = 3x + 6$  nach  $x$ ,

$$\begin{aligned} y &= 3x + 6 \\ y - 6 &= 3x \\ x &= \frac{y}{3} - 2, \end{aligned}$$

und dem anschließenden Vertauschen von  $x$  und  $y$ , d. h.

$$y = \frac{x}{3} - 2.$$

Die zu  $f$  inverse Funktion  $f^{-1}$  ist somit durch

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{3} - 2$$

gegeben, wobei der Definitions- und Wertebereich von  $f^{-1}$  mit dem von  $f$  übereinstimmen.

- (ii) Schränkt man den Definitionsbereich der Funktion  $f(x) = x^2$  auf  $D(f) = [0, \infty)$  ein, dann ist  $f$  eineindeutig und hat die inverse Funktion

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

### Allgemeine Eigenschaften

- (i) *Nullstellen:* Die Funktion  $f$  besitzt an der Stelle  $x_0$  eine *Nullstelle*, wenn  $f(x_0) = 0$ . Nullstellen sind Stellen, an denen der Graph der Funktion die x-Achse schneidet oder berührt.

Beispielsweise haben die Funktionen  $f(x) = 3x + 6$  und  $f(x) = x^2$  jeweils eine Nullstelle bei  $x_0 = -2$  bzw.  $x_0 = 0$ .

- (ii) *Symmetrie:* Die Funktion  $f$  heißt *gerade Funktion*, wenn

$$f(x) = f(-x), \quad \text{für alle } x \in D(f).$$

Der Graph einer geraden Funktion ist spiegelsymmetrisch zur y-Achse. Beispiele für gerade Funktionen sind  $f(x) = x^2$  und  $f(x) = \cos x$ .

Die Funktion  $f$  heißt *ungerade Funktion*, wenn

$$f(x) = -f(-x), \quad \text{für alle } x \in D(f).$$

Der Graph einer ungeraden Funktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Beispiele für gerade Funktionen sind  $f(x) = x^3$  und  $f(x) = \sin x$ .

(iii) *Monotonie*: Eine Funktion  $f$  heißt

- monoton wachsend*, wenn  $f(x_1) \leq f(x_2)$  für alle  $x_1, x_2 \in D(f)$  mit  $x_1 < x_2$ ,
- streng monoton wachsend*, wenn  $f(x_1) < f(x_2)$  für alle  $x_1, x_2 \in D(f)$  mit  $x_1 < x_2$ ,
- monoton fallend*, wenn  $f(x_1) \geq f(x_2)$  für alle  $x_1, x_2 \in D(f)$  mit  $x_1 < x_2$  und
- streng monoton fallend*, wenn  $f(x_1) > f(x_2)$  für alle  $x_1, x_2 \in D(f)$  mit  $x_1 < x_2$ .

Beispielsweise ist die Funktion  $f(x) = e^x$  streng monoton wachsend in ihrem gesamten Definitionsbereich  $D(f) = \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f(x) = x^2$  ist streng monoton wachsend in  $[0, \infty)$  und streng monoton fallend in  $(-\infty, 0]$ .

Eine Funktion heißt *streng monoton*, wenn sie entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist. Wenn eine Funktion in einem Teilbereich von  $D(f)$  streng monoton ist, so ist sie in diesem Teilbereich eineindeutig und damit auch invertierbar.

(iv) *Beschränktheit*: Eine Funktion  $f$  heißt

- beschränkt nach oben*, wenn eine Zahl  $c \in \mathbb{R}$  existiert, so dass  $f(x) \leq c$  für alle  $x \in D(f)$ ,
- beschränkt nach unten*, wenn eine Zahl  $c \in \mathbb{R}$  existiert, so dass  $f(x) \geq c$  für alle  $x \in D(f)$ ,
- beschränkt*, wenn sie sowohl von oben als auch von unten beschränkt ist.
- unbeschränkt*, wenn sie nicht beschränkt ist.

Die Funktion  $f(x) = x^2$  ist von unten beschränkt, die Funktion  $f(x) = \sin x$  ist beschränkt, und die Funktion  $f(x) = e^x$  ist unbeschränkt.

(v) *Periodizität*: Eine Funktion  $f$  heißt *periodisch*, wenn es eine Zahl  $p > 0$  gibt, so dass

$$f(x) = f(x + p) \quad \text{für alle } x \in D(f).$$

Der kleinste Zahl  $p$ , für die die obige Gleichung gilt, heißt *Periodenlänge*.

Die Periodenlänge von  $\sin x$  ist  $p = 2\pi$ . Es gilt  $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ .

### Einfache Transformationen

- $f(x) + a, a \in \mathbb{R}$  – Verschiebung in y-Richtung
- $f(x + a), a \in \mathbb{R}$  – Verschiebung in x-Richtung
- $a \cdot f(x), a > 0$  – Stauchung ( $0 < a < 1$ ) bzw. Streckung ( $a > 1$ ) in y-Richtung
- $f(ax), a > 0$  – Stauchung ( $a > 1$ ) bzw. Streckung ( $0 < a < 1$ ) in x-Richtung
- $f(-x)$  – Spiegelung an der y-Achse
- $-f(x)$  – Spiegelung an der x-Achse

## 3.2 Grenzwert und Stetigkeit

Wichtige Eigenschaften einer Funktion  $f$  an einer Stelle  $x_0$  sind mit ihrem Verhalten bei beliebiger Annäherung an  $x_0$  verbunden. Dazu betrachten wir eine Folge  $\{x_n\}$  reeller Zahlen mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

Damit lässt sich das Verhalten von  $f$  an der Stelle  $x_0$  durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

beschreiben.

### Beispiele

- (i) Für die Funktion  $f(x) = x^2$  betrachten wir die harmonische Folge  $\{x_n\}$  mit  $x_n = \frac{1}{n}$ . Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = 0.$$

- (ii) Die Folge  $\{x_n\}$  mit  $x_n = -\frac{1}{n^2}$  hat den gleichen Grenzwert wie die harmonische Folge,  $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n^2} = 0$ , und für  $f(x) = x^2$  erhält man ebenfalls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} = 0.$$

*Definition.* Eine Funktion  $f$  sei in einer Umgebung von  $x_0$  definiert. Wenn für jede Folge  $\{x_n\}$  aus dem Definitionsbereich  $D(f)$ , die gegen  $x_0$  konvergiert, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g,$$

dann heißt  $g$  der *Grenzwert* von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

Schreibweise:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$

### Beispiele

- (i) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} +1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

besitzt an der Stelle  $x_0 = 0$  keinen Grenzwert, da man für die Folge  $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

erhält und für  $\{x_n\} = \{-\frac{1}{n}\}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$$

gilt.

(ii) Die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$  besitzt an der Stelle  $x_0 = 0$  ebenfalls keinen Grenzwert, denn

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \quad \text{für } \{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty \quad \text{für } \{x_n\} = \left\{ -\frac{1}{n} \right\}.$$

(iii) Auch  $f(x) = \left| \frac{1}{x} \right|$  besitzt an der Stelle  $x_0 = 0$  keinen Grenzwert, da

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{x_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \quad \text{für } \{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{x_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{-\frac{1}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \quad \text{für } \{x_n\} = \left\{ -\frac{1}{n} \right\}.$$

### Bezeichnung

(i) Falls der Grenzwert  $\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 + x_n) = g$  für jede Nullfolge  $\{x_n\}$  mit positiven Gliedern existiert, heißt  $g$  *rechtsseitiger Grenzwert*.

(ii) Falls der Grenzwert  $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 - x_n) = g$  für jede Nullfolge  $\{x_n\}$  mit positiven Gliedern existiert, heißt  $g$  *linksseitiger Grenzwert*.

Schließlich betrachten wir noch das Verhalten einer Funktion im Unendlichen, d. h. für  $x \rightarrow \infty$  oder  $x \rightarrow -\infty$ . Dazu betrachten wir divergente Folgen  $\{x_n\}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  bzw.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

*Definition.* Wenn für jede Folge  $\{x_n\}$  aus  $D(f)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$ , dann heißt  $g$  der Grenzwert von  $f$  für  $x \rightarrow \infty$ . Analog heißt  $g$  der Grenzwert von  $f$  für  $x \rightarrow -\infty$ , falls für jede Folge  $\{x_n\}$  aus  $D(f)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$ .

### Beispiele

(i)

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

(ii)

$$f(x) = x, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

(iii)

$$f(x) = e^x, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

(iv)

$$f(x) = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e^a$$

(v)

$$f(x) = \frac{1+x}{x^2+5}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

(vi)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x^2 - 1)}{x + 1} &= 3 \cdot \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 1)}{x + 1} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} \\ &= 3 \cdot \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = 3 \cdot (-2) = -6 \end{aligned}$$

(vii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x + 5}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = \frac{5}{1} = 5$$

(viii)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1 - 1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

*Definition.* Eine Funktion, die in einer Umgebung von  $x_0$  definiert ist, heißt *stetig* in  $x_0$ , wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

d. h., Grenzwert und Funktionswert stimmen an dieser Stelle überein.

### Bemerkungen

- (i) Stetigkeit (und damit auch Unstetigkeit) ist eine Eigenschaft, die sich nur auf den Definitionsbereich einer Funktion bezieht. An Stellen, wo die Funktion nicht definiert ist (z. B. an Polstellen), ist sie weder stetig noch unstetig.<sup>1</sup>
- (ii) Eine Funktion, die an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs stetig ist, heißt *stetige Funktion*.
- (iii) Eine Funktion heißt *unstetig* in  $x_0$ , wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$  oder der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  nicht existiert.

<sup>1</sup>Diese Auffassung ist nicht einheitlich in der Literatur.

**Beispiele**

(i) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} +1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

ist unstetig in  $x_0 = 0$ .(ii) Die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$  ist stetig in ihrem gesamten Definitionsbereich  $D(f)$ . (Der Wert  $x_0 = 0$  gehört nicht zu  $D(f)$ .)

(iii) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

ist unstetig in  $x_0 = 0$ .

(iv) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$$

ist stetig.

(v) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

ist unstetig in  $x_0 = 0$ .**3.3 Wichtige Funktionenklassen****3.3.1 Polynome (ganz rationale Funktionen)**

*Definition.* Eine Funktion vom Typ

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \neq 0$  heißt *Polynom* vom Grad  $n$ .

**Beispiele**

(i)

$f(x) = 4$	– Polynom vom Grad $n = 0$ ( <i>konstante Funktion</i> )
$f(x) = a_0$	– Gerade parallel zur x-Achse
$f(x) = 3x - 2$	– Polynom vom Grad $n = 1$ ( <i>lineare Funktion</i> )
$f(x) = ax + b$	– Gerade mit dem Anstieg $a$ und dem Schnittpunkt $b$ mit der y-Achse
$f(x) = 6x^2 - 7x + 2$	– Polynom vom Grad $n = 2$ ( <i>quadratische Funktion</i> )
$f(x) = ax^2 + bx + c$	– Parabel

(ii)

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{– Potenzfunktion}$$

*Bemerkung.* Polynome spielen in der Anwendung eine besondere Rolle, da sie unter anderem

- problemlos differenziert und integriert und
- zur Annäherung von komplizierten und unbekanntem Zusammenhängen verwendet werden können.

### Eigenschaften

(i) Ein Polynom vom Grad  $n$  besitzt maximal  $n$  (reellwertige) Nullstellen.<sup>2</sup>

(ii) Es sei  $x_0$  eine Nullstelle des Polynoms  $f(x)$  vom Grad  $n$ , d. h.  $f(x_0) = 0$ . Dann gilt

$$f(x) = (x - x_0) \cdot f_1(x),$$

wobei  $f_1(x)$  ein Polynom vom Grad  $n - 1$  ist. Die Differenz  $x - x_0$  heißt *Linearfaktor*.

(iii) Ein Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit den (reellwertigen) Nullstellen  $x_1, \dots, x_n$  läßt sich als Produkt seiner Linearfaktoren darstellen,

$$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n). \quad (3.1)$$

Die *Vielfachheit* einer Nullstelle  $x_k$  entspricht der Anzahl des Vorkommens des Linearfaktors in der Produktdarstellung.

---

<sup>2</sup>Ein Polynom vom Grad  $n$  besitzt genau  $n$  komplexe Nullstellen.

**Beispiele**

- (i) Die Funktion  $f(x) = 2x^2 + 8x + 8$  hat die Nullstellen  $x_1 = -2$  und  $x_2 = -2$ , d. h., die Zahl  $-2$  ist doppelte Nullstelle (Nullstelle mit der Vielfachheit 2). Es gilt

$$f(x) = 2(x+2)(x+2).$$

- (ii) Das Polynom 4. Grades  $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$  kann durch die Substitution  $z = x^2$  in ein Polynom 2. Grades  $f(z) = z^2 - 13z + 36$  der Form  $f(z) = z^2 + pz + q$  überführt werden. Man erhält die Nullstellen

$$\begin{aligned} z_{1/2} &= -\frac{z}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ &= \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - \frac{144}{4}} \\ &= \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2} \\ z_1 &= 9, & \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -3 \\ z_2 &= 4, & \Rightarrow x_3 = 2, x_4 = -2 \end{aligned}$$

Es gibt also vier (einfache, reelwertige) Nullstellen, und es gilt

$$f(x) = (x-3) \cdot (x+3) \cdot (x-2) \cdot (x+2).$$

**Das Horner-Schema zur Durchführung einer Polynomdivision**

Die Bestimmung der Nullstellen von Polynomen höheren Grades basiert im allgemeinen auf numerischen Methoden. Grundlage dafür ist unter anderem das *Horner-Schema*, das im wesentlichen auf Formel (3.1) basiert. Ist beispielweise bekannt, dass  $x_1$  eine Nullstelle des Polynoms

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit den Nullstellen  $x_1, \dots, x_n$  ist, dann ist die durch

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{x - x_1} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{x - x_1} = a_n \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

gegebene Funktion

$$f_1(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$$

ein Polynom mit den Nullstellen  $x_2, \dots, x_n$ . Wegen

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) \cdot (x - x_1) \\ &= b_{n-1} x^{n-1} (x - x_1) + b_{n-2} x^{n-2} (x - x_1) + \dots + b_1 x (x - x_1) + b_0 (x - x_1) \\ &= b_{n-1} x^n - b_{n-1} x^{n-1} x_1 + b_{n-2} x^{n-1} - b_{n-2} x^{n-2} x_1 + \dots + b_1 x^2 - b_1 x x_1 + b_0 x - b_0 x_1 \\ &= b_{n-1} x^n + (b_{n-2} - b_{n-1} x_1) x^{n-1} + (b_{n-3} - b_{n-2} x_1) x^{n-2} + \dots + (b_0 - b_1 x_1) x - b_0 x_1 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
 a_n &= b_{n-1} \\
 a_{n-1} &= b_{n-2} - b_{n-1}x_1 \\
 a_{n-2} &= b_{n-3} - b_{n-2}x_1 \\
 &\vdots \\
 a_1 &= b_0 - b_1x_1 \\
 a_0 &= b_0x_1
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

und

$$\begin{aligned}
 b_{n-1} &= a_n \\
 b_{n-2} &= a_{n-1} + b_{n-1}x_1 \\
 b_{n-3} &= a_{n-2} + b_{n-2}x_1 \\
 &\vdots \\
 b_0 &= a_1 + b_1x_1.
 \end{aligned}$$

Das bedeutet, die Koeffizienten  $b_k$  von  $f_1$  lassen sich rekursiv mit Hilfe von

$$b_{k-1} = a_k + b_kx_1, \quad k = n, n-1, \dots, 1,$$

berechnen, wobei  $b_n = 0$  gesetzt wird.<sup>3</sup> Die rekursive „Rechenvorschrift“ kann durch das Schema

$k = n$	$k = n - 1$	$k = n - 2$	$\dots$	$k = 1$	$k = 0$	
$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\dots$	$a_1$	$a_0$	Koeffizienten $a_k$ von $f$
0	$a_n$	$a_{n-1} + b_{n-1}x_1$	$\dots$	$a_2 + b_2x_1$	$a_1 + b_1x_1$	Koeffizienten $b_k$ von $f_1$

repräsentiert werden (*Horner-Schema*).

Die Berechnung aller weiteren Nullstellen von  $f$  reduziert sich damit auf die Berechnung der Nullstellen von  $f_1$ .

Das Horner-Schema bzw. die dazugehörige Rekursionsvorschrift ist zusammen mit dem Gauss-Newton-Verfahren die Grundlage für die numerische Nullstellenberechnung von Polynomen. Zur Demonstration des Horner-Schemas soll im folgenden ein einfaches Rechenbeispiel betrachtet werden, das mit einer numerischen Nullstellenberechnung jedoch nur wenig zu tun hat.

### Beispiel

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = -x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 6x + 9,$$

von der bekannt ist, dass sie nur ganzzahlige Nullstellen besitzt. Zu bestimmen sind die Nullstellen.

<sup>3</sup>Durch die Rekursionsvorschrift wird implizit eine Polynomdivision mit dem Divisor  $x - x_1$  ausgeführt.

Aus Gleichung (3.2) folgt unmittelbar, dass mindestens eine Nullstelle von  $f$  ganzzahliger Teiler von  $a_0 = 9$  sein muss, d. h., mindestens eine der Zahlen  $-9, -3, -1, 1, 3$  oder  $9$  muss Nullstelle von  $f$  sein. Durch Einsetzen stellt man fest, dass  $-9$  und  $-3$  keine Nullstellen von  $f$  sind, jedoch  $-1$ . Für  $x_1 = -1$  erhält man mit Hilfe der obigen Rekursionsvorschrift  $b_3 = -1, b_2 = 7, b_1 = -15$  und  $b_0 = 9$  als Koeffizienten der Funktion  $f_1$ , d. h.

$$f_1(x) = -x^3 + 7x^2 - 15x + 9.$$

Analog erhält man mit  $x_2 = 1$  aus  $f_1$  die Funktion

$$f_2(x) = -x^2 + 6x - 9,$$

die die Nullstellen  $x_3 = x_4 = 3$  hat, usw.

Diese Rechnung kann im Horner-Schema

	$k = 4$	$k = 3$	$k = 2$	$k = 1$	$k = 0$
	-1	6	-8	-6	9
$x_1 = 1$	0	-1	5	-3	-9
$x_2 = -1$	0	0	-1	6	-9
$x_3 = 3$	0	0	0	-1	3
$x_4 = 3$	0	0	0	0	-1

übersichtlich dargestellt werden.

### Das Horner-Schema zur effektiven Berechnung des Funktionswertes eines Polynoms

Sei  $x_1 \in \mathbb{R}$  eine beliebige Zahl (also nicht unbedingt eine Nullstelle), für die der Funktionswert des Polynoms berechnet werden soll. Mit  $b_n = 0$  gilt die Berechnungsvorschrift

$$\begin{aligned} b_{k-1} &= a_k + b_k x_1, & k = n, n-1, \dots, 1 \\ f(x_1) &= a_0 + b_0 x_1, \end{aligned}$$

die in übersichtlicher Form durch das Schema

$k = n$	$k = n - 1$	$k = n - 2$	...	$k = 1$	$k = 0$	$f(x_1)$
$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	...	$a_1$	$a_0$	
0	$a_n$	$a_{n-1} + b_{n-1}x_1$	...	$a_2 + b_2x_1$	$a_1 + b_1x_1$	$a_0 + b_0x_1$

veranschaulicht werden kann.

Auf diese Weise kann der Funktionswert  $f(x_1)$  schneller berechnet werden als auf direktem Wege, und das Horner-Schema ist in der Regel auch numerisch stabiler.

### Beispiel

Die Funktion

$$f(x) = -x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 6x + 9$$

soll an der Stelle  $x_1 = 2$  berechnet werden. Für dieses Beispiel liefert das Horner-Schema in der Form

$$\begin{array}{r|rrrrr} k=4 & k=3 & k=2 & k=1 & k=0 & f(2) \\ \hline & -1 & 6 & -8 & -6 & 9 \\ & 0 & -1 & 4 & 0 & -6 \\ \hline & & & & & -3 \end{array}$$

den Wert  $f(2) = -3$ .

### 3.3.2 Gebrochen rationale Funktionen

*Definition.* Eine Funktion vom Typ

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

mit  $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ ,  $a_m, b_n \neq 0$  heißt *gebrochen rationale Funktion*.

Für  $m \geq n$  heißt  $f$  *unecht gebrochen rationale Funktion* sonst *echt gebrochen rationale Funktion*. Der Definitionsbereich ist  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ , wobei  $x_1, \dots, x_n$  die Nullstellen des Quotienten  $Q_n(x)$  bezeichnen.

Jede unecht gebrochen rationale Funktion läßt sich durch Polynomdivision darstellen als Summe eines Polynoms und einer echt gebrochen rationalen Funktion,

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = S_{m-n}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_n(x)},$$

wobei  $R_k$  und  $S_{m-n}$  Polynome vom Grade  $k < n$  bzw.  $m - n$  sind. Das Polynom  $S_{m-n}$  wird auch *ganz rationaler Anteil* genannt.

#### Beispiel

Gegeben sei die unecht gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = \frac{4x^4 - 2x + 5}{x^2 - 3x - 10},$$

d. h.  $m = 4$  und  $n = 2$ .

Polynomdivision liefert

$$\begin{array}{r} (4x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x + 5) : (x^2 - 3x - 10) = 4x^2 + 12x + 76 \\ \underline{4x^4 - 12x^3 - 40x^2} \phantom{- 2x + 5} \\ 12x^3 + 40x^2 - 2x + 5 \\ \underline{12x^3 - 36x^2 - 120x} \\ 76x^2 + 118x + 5 \\ \underline{76x^2 - 228x - 760} \\ 346x + 765 \end{array}$$

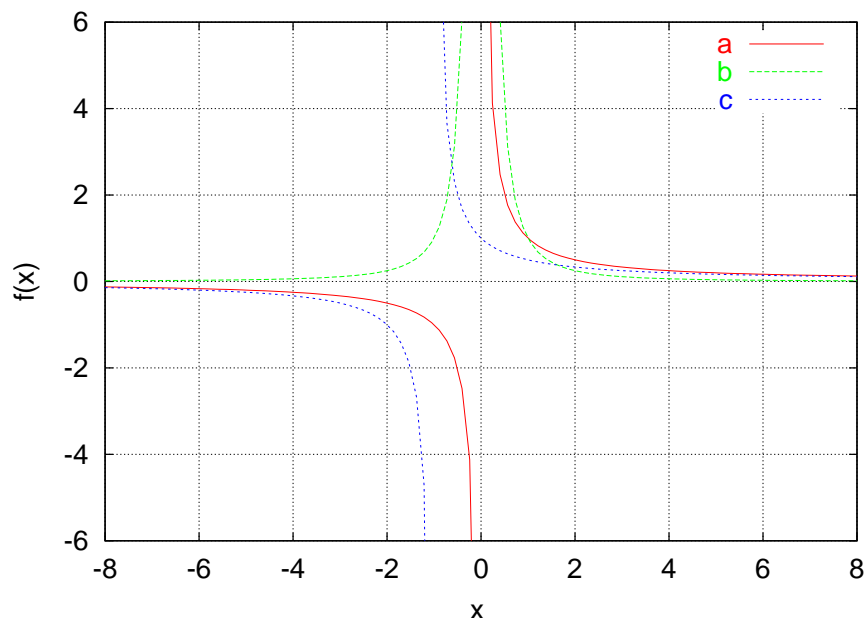
d. h.

$$f(x) = \underbrace{4x^2 + 12x + 76}_{\text{Polynom}} + \underbrace{\frac{346x + 765}{x^2 - 3x - 10}}_{\text{echt gebrochen}}$$

### Charakteristische Stellen

- (i) *Nullstellen*: Werte  $x_0$  mit  $P_m(x_0) = 0$  und  $Q_n(x_0) \neq 0$
- (ii) *Polstellen*: Werte  $x_p$  mit  $Q_n(x_p) = 0$  und  $P_m(x_p) \neq 0$ . Die Funktionswerte von  $f$  wachsen oder fallen in der Umgebung ihrer Polstellen (abkürzend auch *Pole* genannt) über alle Grenzen („Unendlichkeitsstelle“).

Sei  $x_p$  eine Nullstelle von  $Q_n$  mit der Vielfachheit  $k \in \mathbb{N}$ , dann heißt  $x_p$  *Pol der Ordnung  $k$* . Ist  $k$  geradzahlig, dann heißt  $x_p$  *Pol gerader Ordnung*, sonst *Pol ungerader Ordnung*.



**Abbildung 3.1:** Die Graphen der Funktionen (a)  $f(x) = \frac{1}{x}$ , (b)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  und (c)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ .

### Beispiele

- (i) Die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$  ist eine gebrochen rationale Funktion mit  $m = 0$ ,  $P_m(x) = 1$ ,  $n = 1$  und  $Q_n(x) = x$ ,  $f$  ist echt gebrochen rationale Funktion. Der Graph von  $f$  ist in Abbildung 3.1a dargestellt. Der Zähler  $P_m(x)$  hat keine Nullstellen. Folglich hat auch  $f$  keine Nullstellen. Der Nenner  $Q_n(x)$  hat eine einfache Nullstelle (d. h. eine Nullstelle der Ordnung  $k = 1$ ) bei  $x_p = 0$ . Somit hat  $f$  einen Pol ungerader Ordnung  $k = 1$  bei  $x_p = 0$ .

- (ii) Die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , siehe Abbildung 3.1b, ist ebenfalls eine echt gebrochen rationale Funktion ( $m = 0$ ,  $P_m(x) = 1$ ,  $n = 2$  und  $Q_n(x) = x^2$ ). Der Nenner  $Q_n(x)$  hat eine Nullstelle der Ordnung  $k = 2$  bei  $x_p = 0$ , d. h.,  $f$  hat bei  $x_p = 0$  einen Pol gerader Ordnung.
- (iii) Nach Umformung der Funktion

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$$

erkennt man, dass  $f$  keine Nullstellen hat, siehe Abbildung 3.1c. Mit Hilfe der dritten binomischen Formel erhält man

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1},$$

d. h.,  $f$  hat lediglich eine Polstelle  $x_p = -1$  der Ordnung  $k = 1$ .

### Asymptotisches Verhalten im Unendlichen

- (i) Jede echt gebrochen rationale Funktion nähert sich für  $x \rightarrow \infty$  und  $x \rightarrow -\infty$  an die x-Achse an, d. h.  $y = 0$  ist die Gleichung der Asymptote.
- (ii) Wegen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{R_k(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{R_k(x)}{Q_n(x)} = 0$$

strebt jede unecht gebrochen rationale Funktion für  $x \rightarrow \pm\infty$  gegen den ganzrationalen Anteil, d. h. die *Asymptote* ist die Funktion  $S_{m-n}(x)$ .

### Beispiel

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^2 + 3x + 2}.$$

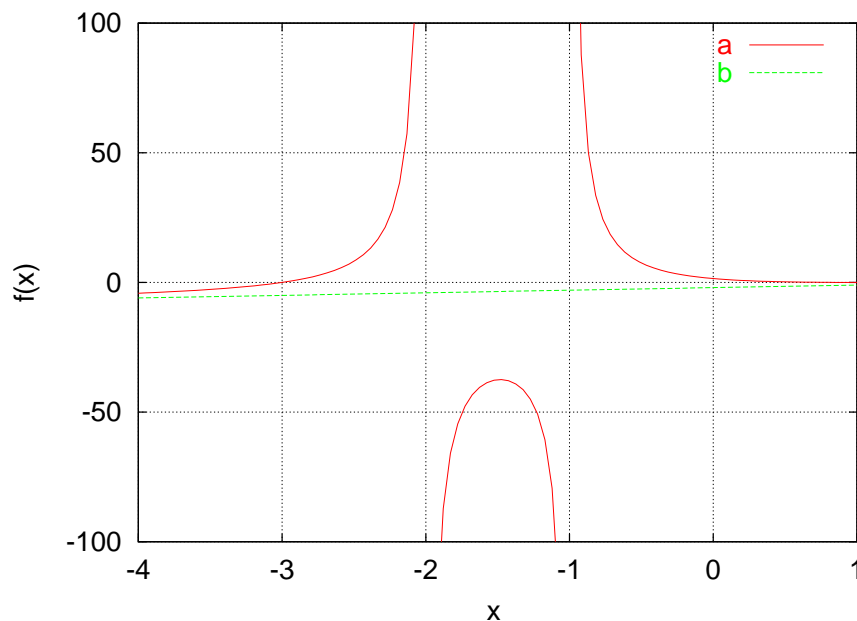
Der Zähler

$$P_m(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x-1)^2 \cdot (x+3)$$

besitzt die Nullstellen  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$  und  $x_3 = -3$ , d. h.,  $x_1 = x_2 = 1$  ist doppelte Nullstelle. Der Nenner

$$Q_n(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

hat zwei Nullstellen bei  $x_4 = -2$  bzw.  $x_5 = -1$ . Somit hat  $f$  bei  $x_4$  und  $x_5$  Pole erster Ordnung ( $k = 1$ ).



**Abbildung 3.2:** Die Graphen der gebrochen rationalen Funktion (a)  $f(x) = \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2+3x+2}$  und (b) ihrer Asymptote  $S_{m-n}(x) = x - 2$ .

Mit Polynomdivision erhält man

$$\begin{array}{r} (x^3 + x^2 - 5x + 3) : (x^2 + 3x + 2) = x - 2 \\ \underline{x^3 + 3x^2 + 2x} \phantom{+ 3} \\ -2x^2 - 7x + 3 \\ \underline{-2x^2 - 6x - 4} \\ -x + 7 \end{array}$$

und somit

$$f(x) = x - 2 + \frac{7 - x}{x^2 + 3x + 2}.$$

Die Gerade  $S_{m-n}(x) = x - 2$  ist also Asymptote, siehe Abbildung 3.2.

### 3.3.3 Potenz- und Wurzelfunktionen

Die Potenzfunktionen

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

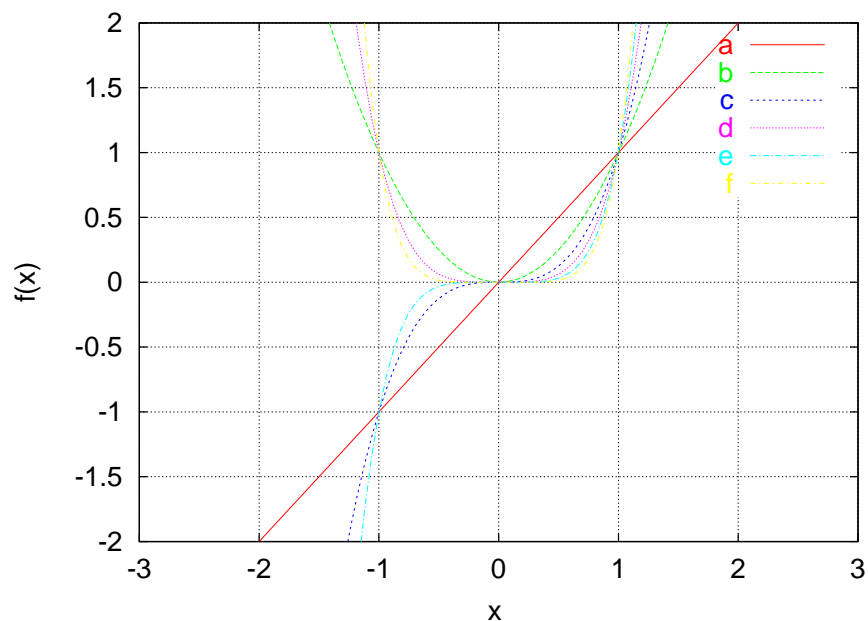
siehe Abbildung 3.3 und Abschnitt 1.1.4, sind Spezialfälle ganzrationaler bzw. gebrochen rationaler Funktionen.

Für geradzahliges  $n$  sind die Funktionen  $f(x) = x^n$  gerade, d. h.  $f(x) = f(-x)$ , für ungeradzahliges  $n$  ungerade, d. h.  $f(x) = -f(-x)$ .

Es sei besonders darauf hingewiesen, dass die Potenzfunktion im Definitionsbereich  $D(f) = [0, \infty)$  auch für nicht ganzzahlige Exponenten erklärt ist,

$$f(x) = x^a = \exp\{a \cdot \ln x\}, \quad a \in \mathbb{R}, x \geq 0.$$

Die Wurzelfunktion  $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$  ist die inverse Funktion von  $f(x) = x^n$  wobei zur Bildung der inversen Funktion der Definitionsbereich  $D(f)$  für geradzahliges  $n$  entsprechend eingeschränkt werden muss.



**Abbildung 3.3:** Die Graphen der Funktionen (a)  $f(x) = x$ , (b)  $f(x) = x^2$ , (c)  $f(x) = x^3$ , (d)  $f(x) = x^4$ , (e)  $f(x) = x^5$ , (f)  $f(x) = x^6$ , ...

### 3.3.4 Exponential- und Logarithmusfunktion

Die *Exponentialfunktion*

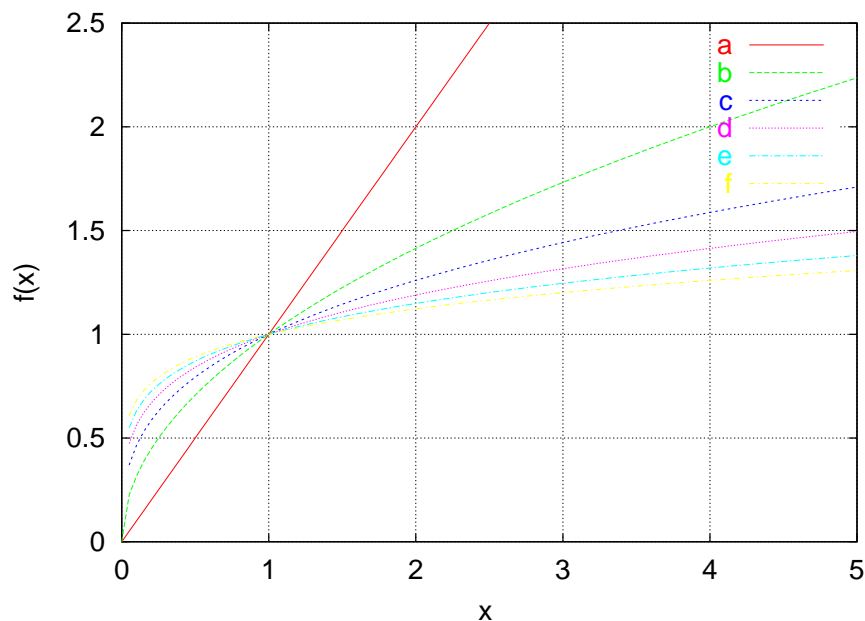
$$f(x) = a^x, \quad a > 0, x \in \mathbb{R}$$

ist für  $0 < a < 1$  streng monoton fallend und für  $a > 1$  streng monoton steigend, siehe auch Abbildung 3.5.

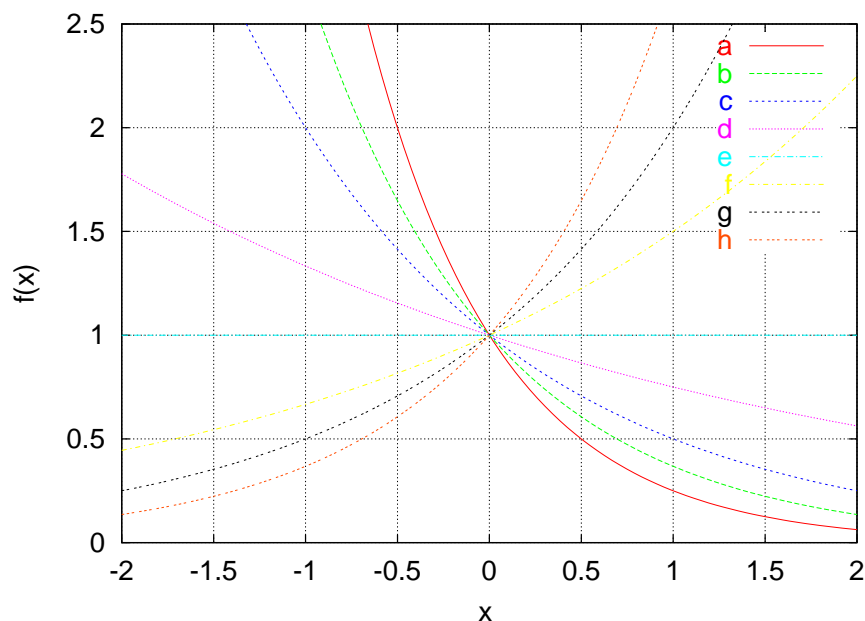
Wichtige Spezialfälle sind die Funktionen

$$f(x) = e^x \quad \text{und} \quad f(x) = e^{-x},$$

die in der Praxis vielfältige Anwendungen haben.

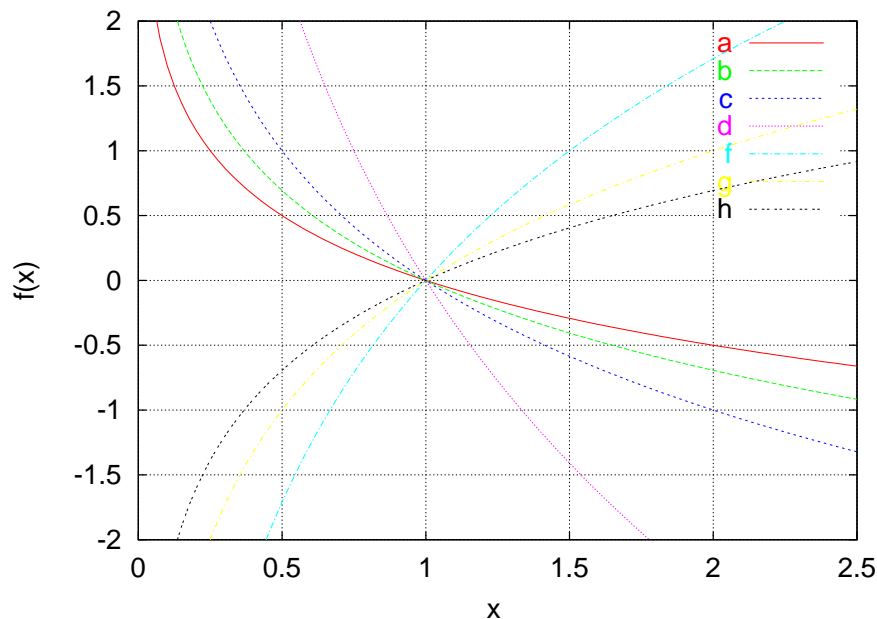


**Abbildung 3.4:** Die Graphen der Funktionen (a)  $f(x) = x$ , (b)  $f(x) = \sqrt{x}$ , (c)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ , (d)  $f(x) = \sqrt[4]{x}$ , (e)  $f(x) = \sqrt[5]{x}$ , (f)  $f(x) = \sqrt[6]{x}$ , ...



**Abbildung 3.5:** Die Graphen der Funktion  $f(x) = a^x$  für (a)  $a = \frac{1}{4}$ , (b)  $a = \frac{1}{e}$ , (c)  $a = \frac{1}{2}$ , (d)  $a = \frac{3}{4}$ , (e)  $a = 1$ , (f)  $a = \frac{3}{2}$ , (g)  $a = 2$ , (h)  $a = e$ , ...

Die *Logarithmusfunktion*  $f^{-1}(x) = \log_a x$  ist die inverse Funktion der Exponentialfunktion  $f(x) = a^x$  für  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Die Graphen der inversen Funktionen von Abbildung 3.5 sind in Abbildung 3.6 dargestellt, außer für  $a = 1$  (Graph e), für die keine Inverse existiert.



**Abbildung 3.6:** Die Graphen der Funktion  $f(x) = \log_a x$  für (a)  $a = \frac{1}{4}$ , (b)  $a = \frac{1}{e}$ , (c)  $a = \frac{1}{2}$ , (d)  $a = \frac{3}{4}$ , (f)  $a = \frac{3}{2}$ , (g)  $a = 2$ , (h)  $a = e, \dots$

### 3.3.5 Trigonometrische Funktionen

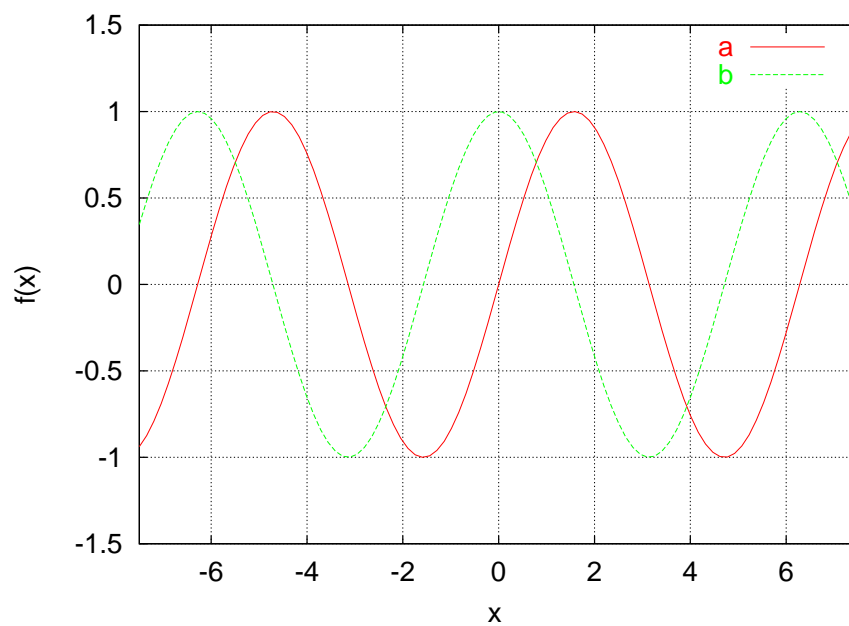
Die *trigonometrischen Funktionen*  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$  und  $\cot x$  sind periodische Funktionen. Die Periodenlängen  $2\pi$  für  $\sin x$  und  $\cos x$  und  $\pi$  für  $\tan x$  und  $\cot x$ , siehe auch Abbildungen 3.7 und 3.8.

Wichtige Zusammenhänge zwischen den trigonometrischen Funktionen sind

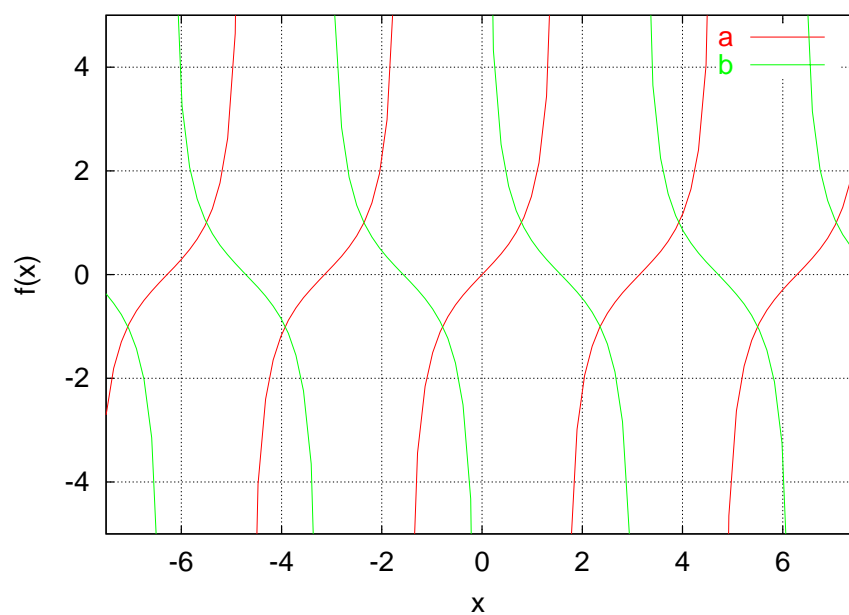
$$\begin{array}{ll}
 \sin x = -\sin(-x), & \cos x = \cos(-x), \\
 \sin x = \sin(x + 2\pi), & \cos x = \cos(x + 2\pi), \\
 \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), & \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\
 \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, & \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \\
 \tan x = -\tan(-x), & \cot x = -\cot(-x), \\
 \tan x = \tan(x + \pi), & \cot x = \cot(x + \pi), \\
 \sin^2 x + \cos^2 x = 1, & \tan x \cdot \cot x = 1, \\
 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, & 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \\
 \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, & \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \\
 \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}, & \cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot x \pm \cot y}, \\
 \cos^2 y - \cos^2 x = \sin(x + y) \sin(x - y), & \cos^2 y - \sin^2 x = \cos(x + y) \cos(x - y), \\
 \sin 2x = 2 \sin x \cos x, & \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.
 \end{array}$$

Weitere Beziehungen finden sich in Tabellenbüchern.

Die inversen Funktionen  $\arcsin$ ,  $\arccos$ ,  $\arctan$  und  $\text{arccot}$  der trigonometrischen Funktionen  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$  bzw.  $\cot$  sind nur für Definitionsbereiche definiert, in denen diese Funktionen monoton sind. Die inversen Funktionen der trigonometrischen Funktionen heißen auch *Arcusfunktionen*. Da



**Abbildung 3.7:** Die Graphen der trigonometrischen Funktion (a)  $f(x) = \sin x$  und (b)  $f(x) = \cos x$ .



**Abbildung 3.8:** Die Graphen der trigonometrischen Funktion (a)  $f(x) = \tan x$  und (b)  $f(x) = \cot x$ .

in vielen Softwarebibliotheken lediglich die Funktion `atan` für den Arcustangens enthalten ist, sind

noch die Beziehungen

$$\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arccos x = \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

und

$$\operatorname{arccot} x = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \arctan \frac{1}{x} + \pi, & x < 0 \end{cases}$$

wichtig, mit deren Hilfe die Berechnung von  $\arcsin$ ,  $\arccos$  und  $\operatorname{arccot}$  auf  $\arctan$  zurück geführt wird.<sup>4</sup>

Bei der Berechnung des Arcustangens des Verhältnisses zweier Zahlen  $a$  und  $b$ , die als Punkt  $P = (a, b)$  in der reellen Zahlenebene  $\mathbb{R}^2$  aufgefasst werden, müssen Quadrantenbeziehungen berücksichtigt werden.<sup>5</sup> Für den Winkel  $\phi$  zwischen der x-Achse und dem Punkt  $P$  gilt

$$\begin{array}{lll} \varphi = \arctan \frac{b}{a}, & a > 0, b \geq 0, & (P \text{ im ersten Quadranten}), \\ \varphi = \arctan \frac{b}{a} + \pi, & a < 0, b \geq 0, & (P \text{ im zweiten Quadranten}) \\ \varphi = \arctan \frac{b}{a} + \pi, & a < 0, b \leq 0, & (P \text{ im dritten Quadranten}) \\ \varphi = \arctan \frac{b}{a} + 2\pi, & a > 0, b \leq 0, & (P \text{ im vierten Quadranten}) \\ \varphi = \frac{\pi}{2}, & a = 0, b > 0, & (P \text{ auf der y-Achse}) \\ \varphi = \frac{3\pi}{2}, & a = 0, b < 0, & (P \text{ auf der y-Achse}) \\ \varphi = 0, & a = 0, b = 0, & (P \text{ im Koordinatenursprung}). \end{array}$$

### 3.3.6 Hyperbel- und Areafunktionen

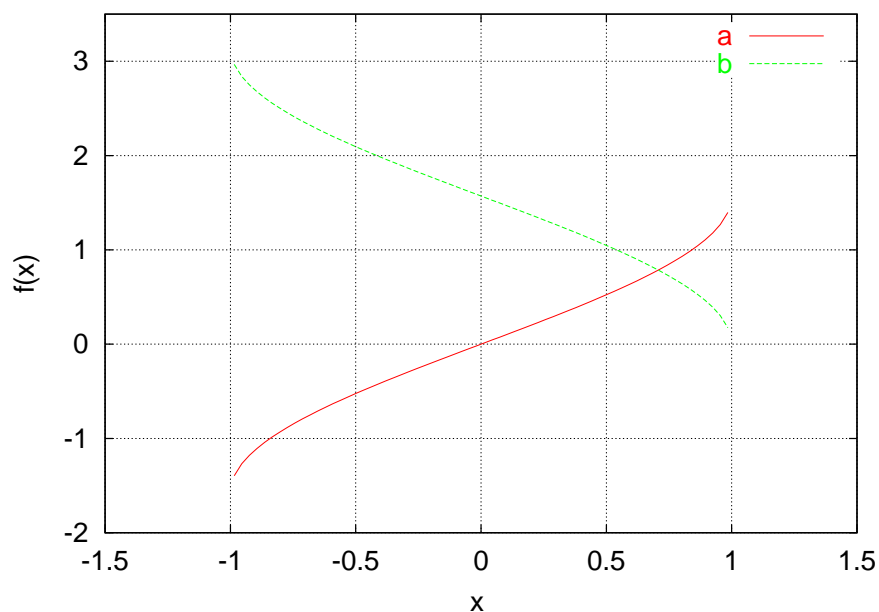
Die *Hyperbelfunktionen* – auch *hyperbolische Funktionen* genannt – sind durch

$$\begin{array}{ll} \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \text{sinus hyperbolicus,} \\ \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \text{cosinus hyperbolicus,} \\ \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x} & \text{tangens hyperbolicus,} \\ \operatorname{coth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\cosh x}{\sinh x} & \text{cotangens hyperbolicus.} \end{array}$$

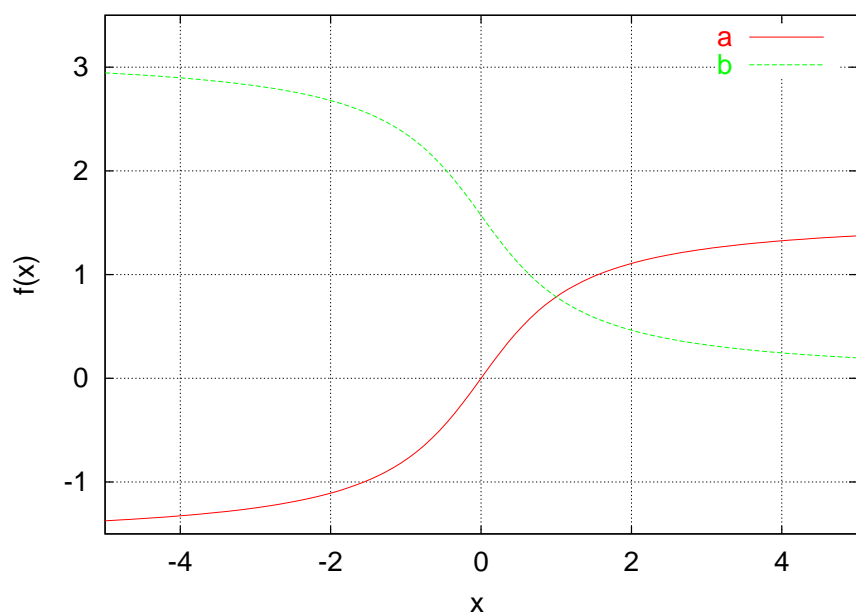
definiert. Die Graphen der hyperbolischen Funktionen sind in den Abbildungen 3.11 bzw. 3.12 dargestellt. Ihre Namen und Bezeichnungen haben die Hyperbelfunktionen in Anlehnung an die trigonometrischen Funktionen erhalten, da für sie ähnliche Rechengesetze (z. B. Additionstheoreme) gelten, siehe Formelsammlungen.

<sup>4</sup>Es wird noch auf den Zusammenhang zwischen den Arcusfunktionen und der Logarithmusfunktion hingewiesen. Es gilt  $\arcsin x = -i \ln(ix + \sqrt{1-x^2})$ ,  $\arccos x = -i \ln(x + \sqrt{1-x^2})$ ,  $\arctan x = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+ix}{1-ix}$ ,  $\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{2i} \ln \frac{ix+1}{ix-1}$ , wobei  $i$  die imaginäre Einheit bezeichnet,  $i = \sqrt{-1}$ .

<sup>5</sup>In der Programmiersprache gibt es neben der Funktion `atan` zur Berechnung des Arcustangens als Standard auch noch die Funktion `atan2`, bei deren Berechnung die Quadrantenbeziehungen berücksichtigt werden.



**Abbildung 3.9:** Die Graphen der trigonometrischen Funktion (a)  $f(x) = \arcsin x$  und (b)  $f(x) = \arccos x$ .



**Abbildung 3.10:** Die Graphen der trigonometrischen Funktion (a)  $f(x) = \arctan x$  und (b)  $f(x) = \operatorname{arccot} x$ .

Ihre Umkehrfunktionen sind die *Areafunktionen*,

$$\operatorname{arsinh} x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \quad \textit{area sinus hyperbolicus},$$

$$\operatorname{arcosh} x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad \textit{area cosinus hyperbolicus},$$

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \quad \textit{area tangens hyperbolicus},$$

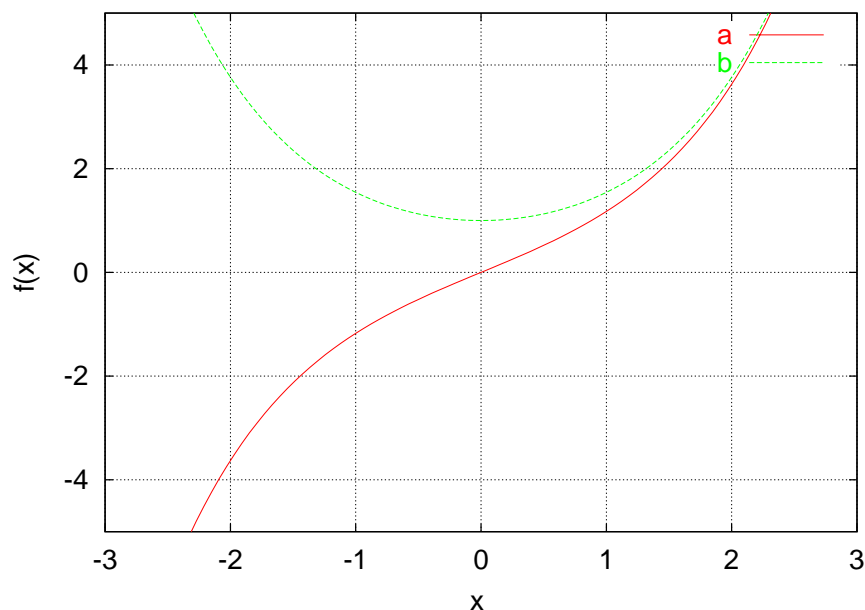
$$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right) \quad \textit{area cotangens hyperbolicus},$$

d. h., es gilt

$$\sinh(\operatorname{arsinh} x) = x, \quad \cosh(\operatorname{arcosh} x) = x, \quad \tanh(\operatorname{artanh} x) = x, \quad \coth(\operatorname{arcoth} x) = x.$$

Die Graphen der Areafunktion sind in den Abbildungen 3.13 und 3.14 dargestellt.

Die Hyperbelfunktionen und ihre inversen Funktionen – die Areafunktionen – werden später noch in der Differential- und Integralrechnung gebraucht. Es gibt aber auch technische Anwendungen. So ist z. B. die Fallgeschwindigkeit als Funktion der Zeit mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes eine hyperbolische Funktion ( $\tanh$ ).<sup>6</sup>



**Abbildung 3.11:** Die Graphen der Hyperbelfunktionen (a)  $f(x) = \sinh x$  und (b)  $f(x) = \cosh x$ .

### 3.3.7 Eulersche Gammafunktion

Schließlich soll noch die *Eulersche Gammafunktion*  $\Gamma(x)$  eingeführt werden, die durch den Grenzwert

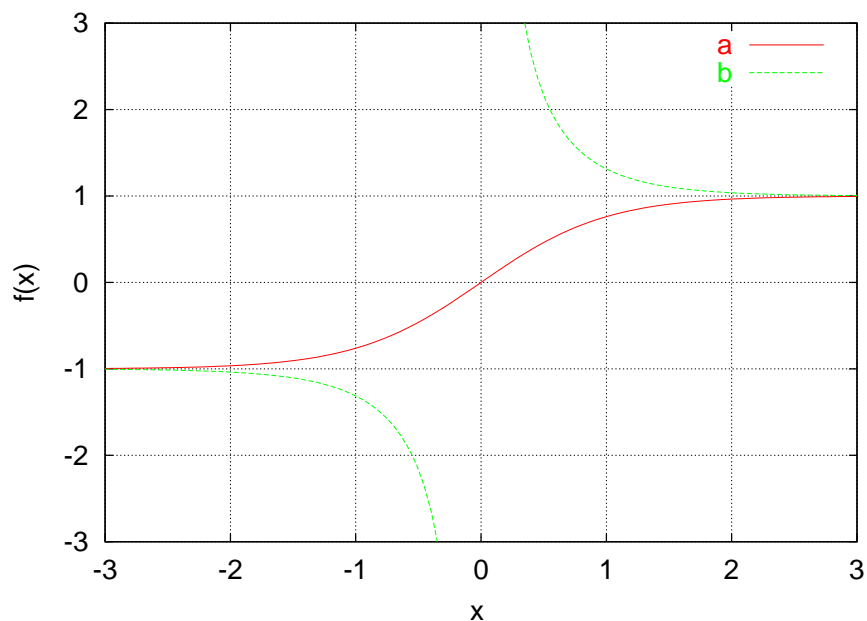
$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

definiert ist.<sup>7</sup>

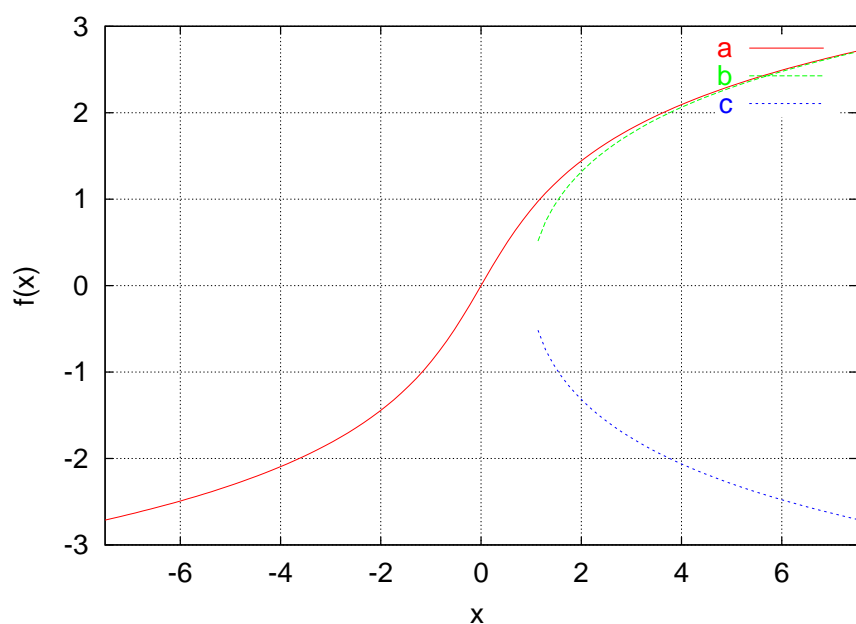
<sup>6</sup>Es wird noch auf die Zusammenhänge zwischen den Area- und Arcusfunktionen verwiesen. Es gilt  $\operatorname{arsinh} ix = i \operatorname{arcsin} x$ ,  $\operatorname{arcosh} ix = i \operatorname{arccos} x$ ,  $\operatorname{artanh} ix = i \operatorname{arctan} x$ ,  $\operatorname{arcoth} ix = i \operatorname{arccot} x$ , wobei  $i$  die imaginäre Einheit ist,  $i = \sqrt{-1}$ .

<sup>7</sup>Eine alternative Definition basiert auf der Integraldarstellung

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{zweites Eulersches Integral.}$$



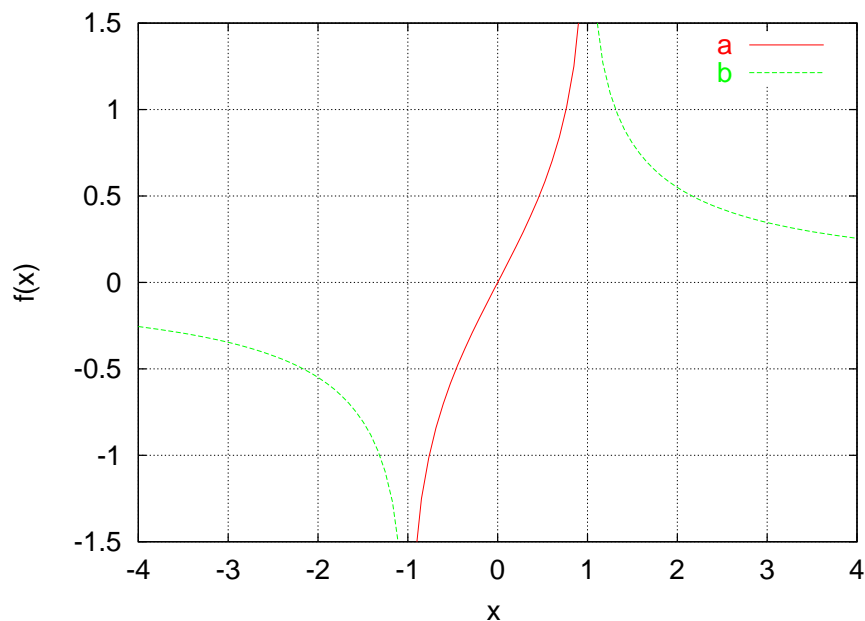
**Abbildung 3.12:** Die Graphen der Hyperbelfunktionen (a)  $f(x) = \tanh x$  und (b)  $f(x) = \coth x$ .



**Abbildung 3.13:** Die Graphen der Areafunktionen (a)  $f(x) = \operatorname{arsinh} x$ , (b)  $f(x) = \operatorname{arcosh} x$ , Umkehrfunktion des monoton steigenden Teils der Funktion  $\cosh x$  und (c)  $f(x) = \operatorname{arccosh} x$ , Umkehrfunktion des monoton fallenden Teils der Funktion  $\cosh x$ .

Es gelten die Beziehungen

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad \Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x).$$



**Abbildung 3.14:** Die Graphen der Areafunktionen (a)  $f(x) = \operatorname{artanh} x$  und (b)  $f(x) = \operatorname{arcoth} x$ .

Die Gammafunktion wird u. a. zur Berechnung der Fakultät verwendet.<sup>8</sup> Es gilt

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N},$$

vgl. auch mit dem Graph der Funktion  $\Gamma(x)$  in Abbildung 3.15.

### Beispiele

(i) Der Wert der Funktion  $\Gamma(x)$  an der Stelle  $x = \frac{1}{2}$  errechnet sich z. B. aus

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right) &= \frac{\pi}{\sin \pi/2} \\ \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) &= \pi, \quad \text{wegen } \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

(ii) Für  $x = \frac{3}{2}$  erhält man aus

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$$

<sup>8</sup>In der Programmiersprache C gibt es als Standard die Funktion `lgamma`, mit der der Logarithmus  $\ln \Gamma(x)$  der Gammafunktion berechnet wird.

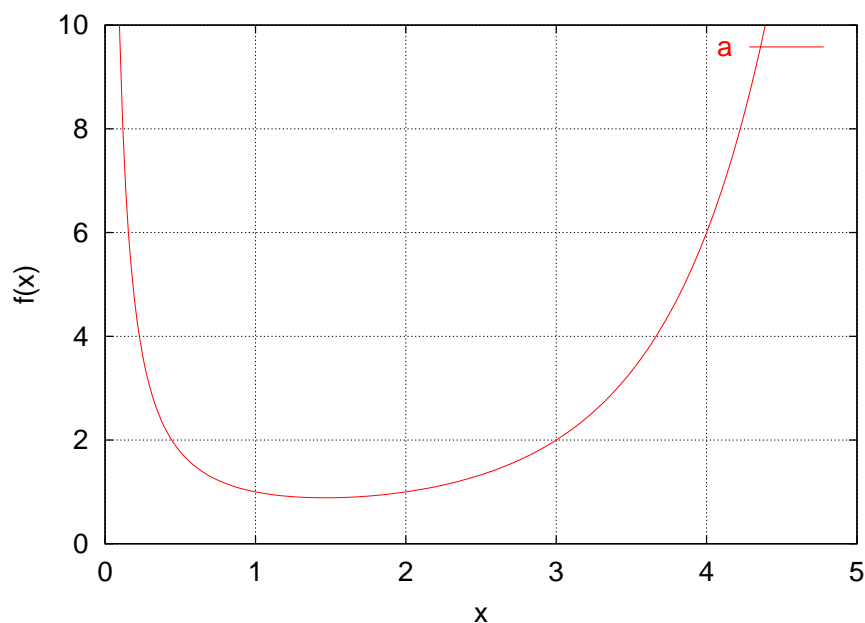


Abbildung 3.15: Der Graph der Eulerschen Gammafunktion  $\Gamma(x)$ .

die Gleichung

$$\Gamma(1)\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2-1}}\Gamma(2)$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \text{wegen } \Gamma(1) = 0! = 1 \quad \text{und} \quad \Gamma(2) = 1! = 1.$$

### 3.4 Parameterform von Funktionen und Kurven

Bisher wurden (ebene) Kurven durch Funktionen beschrieben. Gegeben sei eine Funktion  $f$  mit dem Definitionsbereich  $D(f)$ , dann ist die Menge

$$\{(x, f(x)) : x \in D(f)\}$$

die *Kurve* der Funktion  $f$ .

In manchen Fällen ist es nützlich, eine Kurve durch zwei Funktionen  $x(t)$  und  $y(t)$  mit gemeinsamen Definitionsbereich  $D(x) = D(y) = D(x, y)$  durch die *parametrische Darstellung* oder *Parameterform*

$$\{(x(t), y(t)) : t \in D(x, y)\}$$

zu beschreiben.

Die Notwendigkeit, eine Kurve parametrisch zu beschreiben, kann sich aus einem physikalischen Zusammenhang ergeben. Betrachten wir z. B. den horizontalen Wurf eines Gegenstandes in einer Höhe

$h_0$  unter Berücksichtigung der Erdanziehung mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ . Die Kurve, die der Gegenstand im Verlauf der Zeit  $t$  zurücklegt, kann durch

$$x(t) = v_0 t, \quad y(t) = h_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

beschrieben werden, wobei  $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$  die Erdbeschleunigung bezeichnet. Ein Beispiel einer solchen Wurfkurve ist in Abbildung 3.16 gegeben.

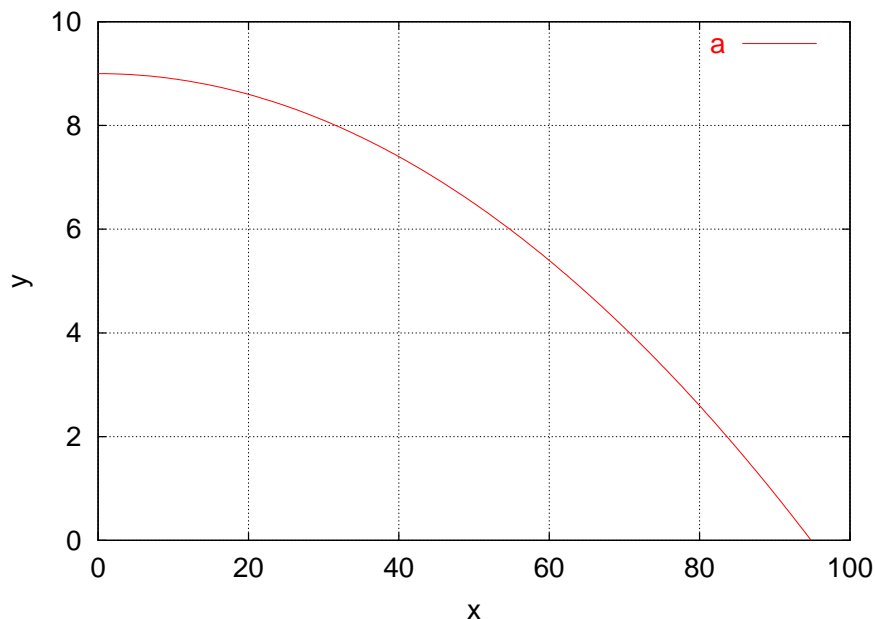


Abbildung 3.16: Eine Wurfkurve für  $h_0 = 9 \text{ m}$  und  $v_0 = 70 \text{ m/s}$ .

Es gibt aber auch mathematische Gründe für Parameterdarstellungen. So kann z. B. die Kreiskurve nicht durch eine Funktion dargestellt werden, d. h., es gibt keine Funktion, deren Graph die Kreiskurve ist. Die Einführung von Polarkoordinaten führt zu der Parameterdarstellung der Kreiskurve,

$$x(\varphi) = r \cos \varphi, \quad y(\varphi) = r \sin \varphi,$$

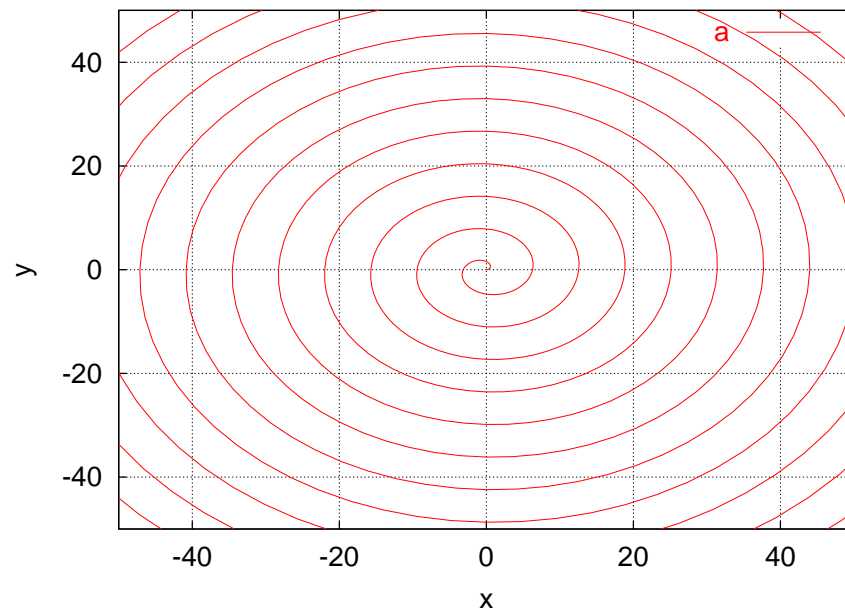
wobei  $D(x, y) = [0, 2\pi)$  und der Radius  $r$  eine Konstante ist.

Analog kann die *Archimedische Spirale* durch

$$x(\varphi) = \varphi \cos \varphi, \quad y(\varphi) = \varphi \sin \varphi$$

mit  $D(x, y) = [0, \infty)$  beschrieben werden, siehe Abbildung 3.17.

Abschließend wird angemerkt, dass der Graph einer jeden Funktion  $f$  in der parametrischen Form  $x(t) = t$  und  $y(t) = f(t)$  auch eine Kurve ist.



**Abbildung 3.17:** Die Archimedische Spirale.



# Kapitel 4

## Differentialrechnung für reelle Funktionen mit einer Veränderlichen

### 4.1 Ableitung einer Funktion

Der *Anstieg*  $\tan \varphi$  einer Geraden  $f(x) = ax + b$  errechnet sich aus

$$\tan \varphi = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

wobei  $x_1$  und  $x_0$  beliebige reelle Zahlen mit  $x_1 \neq x_0$  sind. Der Anstieg einer Geraden ist unabhängig von  $x$  und  $x_0$ .

Entsprechend kann der Anstieg einer beliebigen Funktion an der Stelle  $x_0$  als Grenzwert

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

mit  $\Delta x = x_1 - x_0$  eingeführt werden.

Der Quotient

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

heißt *Differenzenquotient* der Funktion  $f$ , und sein Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

wird als *Differentialquotient* der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  bezeichnet. Der Wert  $f'(x_0)$  heißt erste *Ableitung* der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$ . Man verwendet auch die Schreibweise

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0),$$

um besonders zu unterstreichen, dass nach der Veränderlichen  $x$  abgeleitet wurde. In der Physik wird auch  $\dot{f}$  verwendet für die erste Ableitung einer Funktion  $f(t)$  nach der Zeit  $t$ ,

$$\dot{f}(t_0) = \frac{df}{dt}(t_0).$$

*Definition.* Eine Funktion  $f(x)$  heißt an der Stelle  $x_0$  *differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert.

### Beispiele

(i) Für  $f(x) = x$  erhält man die erste Ableitung

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} = 1.$$

(ii) Für  $f(x) = x^2$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2\Delta x x_0 + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x x_0 + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0. \end{aligned}$$

Häufig wird die erste Ableitung  $f'$  der Funktion  $f$  wieder als Funktion aufgefasst. Man schreibt

$$y' = f'(x) = \frac{df}{dx}(x).$$

Tabelle 4.1 enthält eine Übersicht über die Ableitungen elementarer Funktionen.

### Bemerkungen

(i) Nicht jede in  $x_0$  stetige Funktion ist auch in  $x_0$  differenzierbar. So gilt z. B. für die Funktion  $y = |x|$  an der Stelle  $x_0 = 0$

$$\lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{|0 - \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

während

$$\lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{|0 - \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Der Grenzwert, d. h. der Differenzialquotient, existiert nicht, die Funktion  $y = |x|$  ist an der Stelle  $x_0$  nicht differenzierbar.

(ii) Umgekehrt gilt aber, wenn  $f$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar ist, dann ist  $f$  an der Stelle  $x_0$  auch stetig.

$f(x)$	$f'(x)$	
$x$	1	
$x^a$	$ax^{a-1}$ , $a \in \mathbb{R}$	
$e^x$	$e^x$	
$a^x$	$a^x \ln a$ ,	$a \neq 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$ ,	$a > 0$
$\lg x$	$\frac{1}{x \ln 10} = \frac{1}{x} \lg e$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,	$ x  < 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,	$ x  < 1$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$ ,	
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$ ,	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	
$\operatorname{coth} x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \operatorname{coth}^2 x$	
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	
$\operatorname{arcosh} x$	$\pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ,	$x > 1$
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{x^2-1}$ ,	$ x  < 1$
$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{x^2-1}$ ,	$ x  > 1$

**Tabelle 4.1:** Übersicht über die Ableitungen einiger elementarer Funktionen.

### Ableitungen höherer Ordnung

Wie bereits weiter oben angemerkt wurde, kann die erste Ableitung  $f'$  der Funktion  $f$  wieder als Funktion der unabhängigen Variablen  $x$  aufgefasst werden. Die Ableitung von  $f'$  heißt *zweite Ableitung* oder *Ableitung zweiter Ordnung* und wird mit  $f''$  bezeichnet. Entsprechend erhält man die *dritte Ableitung*  $f'''$  von  $f$  als (erste) Ableitung von  $f''$ , usw. Analog werden für die zweite und dritte Ableitung nach der Zeit die Bezeichnungen  $\dot{f}$  bzw.  $\ddot{f}$  verwendet. Ableitungen  $n$ -ter Ordnung werden mit  $f^{(n)}$  bezeichnet,  $n = 0, 1, \dots$ , mit  $f^{(0)} = f$ ,  $f^{(1)} = f'$ ,  $f^{(2)} = f''$  und  $f^{(3)} = f'''$ .

*Definition.* Eine Funktion  $f(x)$  heißt an der Stelle  $x_0$   $n$ -mal differenzierbar, wenn alle  $n$  Ableitungen  $f', f'', \dots, f^{(n)}$  existieren. Dabei ist die  $k$ -te Ableitung  $f^{(k)}$  an der Stelle  $x_0$  durch den Grenzwert

$$f^{(k)}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(k-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(k-1)}(x_0)}{\Delta x}, \quad k = 1, \dots, n,$$

erklärt.

### Beispiele

(i) Sei  $f(x) = x^6$ . Dann ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6 \cdot x^5, \\ f''(x) &= 5 \cdot 6 \cdot x^4, \\ f'''(x) &= 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot x^3, \\ f^{(4)}(x) &= 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot x^2, \\ f^{(5)}(x) &= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot x^1, \\ f^{(6)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot x^0, \end{aligned}$$

d. h.  $f^{(6)}(x) = 6!$ .

(ii) Für  $f(x) = \log_a x$  erhält man

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x \ln a}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2 \ln a}, \\ f'''(x) &= \frac{1 \cdot 2}{x^3 \ln a}, \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4 \ln a}, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n \ln a}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Eine Übersicht über Ableitungen höherer Ordnung ist in Tabelle 4.2 gegeben. Weitere Formeln finden sich in Tafelwerken.

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
$x^m$	$\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, \quad m \geq n$
$e^x$	$e^x$
$a^x$	$a^x \ln^n a, \quad a > 0$
$\ln x$	$(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$
$\log_a x$	$(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n \ln a}, \quad a > 0$
$\sin x$	$\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos x$	$\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

**Tabelle 4.2:** Übersicht über die  $n$ -ten Ableitungen einiger elementarer Funktionen.

### Ableitungsregeln

Es seien  $u$  und  $v$  differenzierbare Funktionen. Dann können für die Bildung der ersten Ableitung der Funktion  $f$  folgende Regeln verwendet werden:

(i) *Faktorregel.*

$$f(x) = c \cdot u(x), \quad f'(x) = c \cdot u'(x), \quad c \in \mathbb{R}$$

(ii) *Summenregel.*

$$f(x) = u(x) + v(x), \quad f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

(iii) *Produktregel.*

$$f(x) = u(x) \cdot v(x), \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

(iv) *Quotientenregel.*

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}, \quad f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

(v) *Kettentregel.*

$$f(x) = u(v(x)), \quad f'(x) = v'(x) \cdot u'(v(x))$$

(vi) *logarithmische Differentiation.*

$$f(x) = \ln u(x), \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \cdot \ln u(x)}, \quad f'(x) = f(x) \left( v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right)$$

(vii) Ableitung einer Funktion  $y = f(x)$  in Parameterdarstellung mit  $x = u(t)$  und  $y = v(t)$ .

$$f'(x) = \frac{\dot{v}(t)}{\dot{u}(t)}$$

(viii) Ableitung der Umkehrfunktion  $f^{-1}$  von  $f$ .

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Aus der Produktregel folgt für  $f(x) = u(x) \cdot v(x)$  unmittelbar

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) \quad \text{Leibnizsche Formel.}$$

## Beispiele

(i) Anwendung der Faktorregel.

$$f(x) = \frac{3}{x^2} = 3 \cdot x^{-2}, \quad f'(x) = 3 \cdot [(-2) \cdot x^{-3}] = -\frac{6}{x^3}$$

(ii) Anwendung der Summenregel.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \ln x - 4 \sin x + 2e^x - 5x^3 \\ f'(x) &= \frac{3}{x} - 4 \cos x + 2e^x - 15x^2 \end{aligned}$$

(iii) Anwendung der Produktregel.

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{(2x^{-4} - \sin x)}_u \cdot \underbrace{(e^x + \cos x)}_v \\ f'(x) &= \underbrace{(-8x^{-5} - \cos x)}_{u'} \cdot \underbrace{(e^x + \cos x)}_v + \underbrace{(2x^{-4} - \sin x)}_u \cdot \underbrace{(e^x - \sin x)}_{v'} \end{aligned}$$

(iv) Anwendung der Produktregel.

$$f(x) = x \cdot \ln x, \quad f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

(v) Produkt aus drei Faktoren. Allgemein gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x) \cdot v(x) \cdot w(x) \\ f'(x) &= u'(x) \cdot [v(x) \cdot w(x)] + u(x) \cdot [v(x) \cdot w(x)]' \\ &= u'(x) \cdot v(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x). \end{aligned}$$

Im Spezialfall könnte das wie folgt aussehen:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \underbrace{x^2}_u \cdot \underbrace{e^x}_v \cdot \underbrace{\sin x}_w \\
 f'(x) &= \underbrace{2x}_{u'} \cdot \underbrace{e^x}_v \cdot \underbrace{\sin x}_w + \underbrace{x^2}_u \cdot \underbrace{e^x}_{v'} \cdot \underbrace{\sin x}_w + \underbrace{x^2}_u \cdot \underbrace{e^x}_v \cdot \underbrace{\cos x}_{w'} \\
 &= e^x [x(2+x) \sin x + x^2 \cos x]
 \end{aligned}$$

(vi) *Anwendung der Quotientenregel.*

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{2x^2 + 3x - 4}{\ln x}, \\
 f'(x) &= \frac{(4x + 3) \cdot \ln x - (2x^2 + 3x - 4) \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} \\
 &= \frac{(4x + 3) \ln x - 2x - 3 + \frac{4}{x}}{\ln^2 x}
 \end{aligned}$$

(vii) *Anwendung der Quotientenregel.*

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

(viii) *Anwendung der Kettenregel.*

$$f(x) = \sin(2x + 1), \quad f'(x) = \cos(2x + 1) \cdot 2 = 2 \cos(2x + 1)$$

(ix) *Anwendung der Kettenregel.*

$$f(x) = e^{2x}, \quad f'(x) = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$$

(x) *Anwendung der Kettenregel.* Es wird darauf hingewiesen, dass sorgfältig zwischen „äußerer“ und „innerer“ Funktion unterschieden werden muss. So gilt

$$f(x) = \cos x^2, \quad f'(x) = -2x \sin x^2,$$

aber

$$f(x) = \cos^2 x, \quad f'(x) = -2 \cos x \sin x.$$

(xi) *Anwendung der Kettenregel.*

$$f(x) = 3 \sin(5x), \quad f'(x) = 3 \cos(5x) \cdot 5 = 15 \cos 5x$$

(xii) *Anwendung der Kettenregel.*

$$f(x) = \ln(2x^2 + 3), \quad f'(x) = \frac{1}{2x^2 + 3} \cdot 4x = \frac{4x}{2x^2 + 3}$$

(xiii) *Anwendung der Kettenregel.*

$$f(x) = (2x - 5)^4, \quad f'(x) = 4 \cdot (2x - 5)^3 \cdot 2 = 8(2x - 5)^3 = (4x - 10)^3$$

(xiv) *Anwendung der Kettenregel.*

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad \dot{f}(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cdot \omega = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

(xv) *Mehrfache Anwendung der Kettenregel.*

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(\sin(3x^2 + 2)) \\ f'(x) &= \frac{1}{\sin(3x^2 + 2)} \cdot \cos(3x^2 + 2) \cdot 6x = 6x \cot(3x^2 + 2) \end{aligned}$$

(xvi) *Anwendung der logarithmischen Differentiation.*

$$\begin{aligned} y = f(x) &= x^x \\ \ln f(x) &= x \ln x \\ f(x) &= e^{x \ln x} \\ f'(x) &= e^{x \ln x} \cdot \left( \ln x \cdot 1 + x \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= y(\ln x + 1) \\ &= x^x(\ln x + 1) \end{aligned}$$

(xvii) *Anwendung der logarithmischen Differentiation.*

$$f(x) = a^x = e^{x \ln a}, \quad f'(x) = a^x(1 \cdot \ln a + x \cdot 0) = a^x \ln a$$

(xviii) *Anwendung der logarithmischen Differentiation.*

$$f(x) = x^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln x}, \quad f'(x) = x^{\sin x} \left( \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

(xix) *Anwendung für die Differentiation einer Funktion in Parameterdarstellung.* Gegeben sei die Kurve des Kreises mit dem Radius  $r$  durch

$$x(\varphi) = r \cos \varphi, \quad y(\varphi) = r \sin \varphi.$$

Dann gilt

$$\frac{dy}{dx}(\varphi) = \frac{\frac{dy}{d\varphi}(\varphi)}{\frac{dx}{d\varphi}(\varphi)} = \frac{-r \cos \varphi}{r \sin \varphi} = -\cot \varphi,$$

d. h., der Anstieg einer Tangente an die Kreiskurve im Punkt  $(x, y)$  ist  $-\cot \varphi$ .

(xx) *Anwendung für die Differentiation einer Umkehrfunktion.* Zunächst ein wenig sinnvolles aber einleuchtendes Beispiel – die Berechnung der Ableitung der Umkehrfunktion von  $f(x) = e^x$ . Es gilt

$$f(x) = e^x, \quad f^{-1}(x) = \ln x, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

(xxi) *Anwendung für die Differentiation einer Umkehrfunktion.*

$$f(x) = \tan x, \quad f^{-1}(x) = \arctan x, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\tan^2(\arctan x) + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

## 4.2 Anwendungen der Differentialrechnung

### 4.2.1 Charakteristische Kurvenpunkte

Für die Funktion  $f$  existiere die erste und zweite Ableitung  $f'$  bzw.  $f''$  in einer Umgebung des Punktes  $x_0$ .

1. Ableitung. Ist  $f'(x_0) > 0$ , dann ist  $f$  in der Umgebung von  $x_0$  streng monoton wachsend. Ist  $f'(x_0) < 0$ , dann ist  $f$  in der Umgebung von  $x_0$  streng monoton fallend.
2. Ableitung. Ist  $f''(x_0) > 0$ , dann heißt  $f$  in der Umgebung von  $x_0$  (streng) *konvex*. Ist  $f''(x_0) < 0$ , dann heißt  $f$  in der Umgebung von  $x_0$  (streng) *konkav*.

*Beispiel.* Zu untersuchen ist das Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktion  $f(x) = xe^{-x}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= xe^{-x}, \\ f'(x) &= 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-1) \cdot e^{-x} = e^{-x}(1 - x) \quad \text{und} \\ f''(x) &= -1 \cdot e^{-x} \cdot (1 - x) + e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(x - 2). \end{aligned}$$

Die Graphen der Funktionen  $f$ ,  $f'$  und  $f''$  sind in Abbildung 4.1 dargestellt.

Da  $e^{-x} > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , ist  $f'(x) > 0$  für alle  $x < 1$ , d. h., die Funktion  $f$  ist streng monoton wachsend im Bereich  $(-\infty, 1)$  und streng monoton fallend für  $x \in (1, \infty)$ . Außerdem ist  $f''(x) > 0$  für  $x > 2$  und  $f''(x) < 0$  für  $x < 2$ . Folglich ist  $f$  konvex in  $(2, \infty)$  und konkav in  $(-\infty, 2)$ .

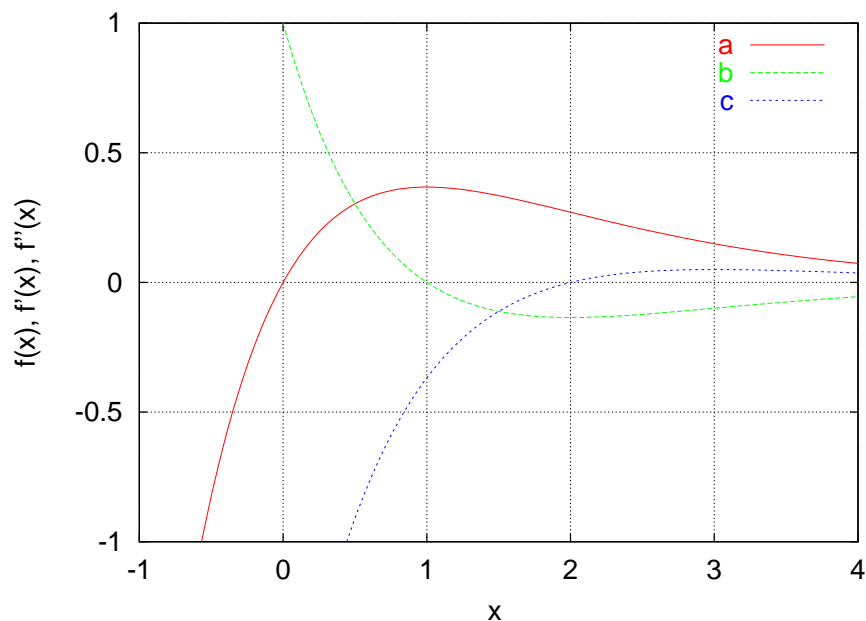
*Definition.* Die Funktion  $f$  hat in  $x_0 \in D(f)$  ein *lokales Maximum*, wenn

$$f(x_0) > f(x)$$

für alle  $x$  in einer Umgebung von  $x_0$ , und  $f$  hat in  $x_0 \in D(f)$  ein *lokales Minimum*, wenn

$$f(x_0) < f(x)$$

für alle  $x$  in einer Umgebung von  $x_0$ . Lokale Minima und lokale Maxima heißen *Extrema*. Die Funktion  $f$  besitzt in  $x_0 \in D(f)$  einen *Wendepunkt*, wenn ihre erste Ableitung  $f'$  in  $x_0$  einen lokalen Extrempunkt hat.



**Abbildung 4.1:** Die Graphen der Funktion (a)  $f(x) = xe^{-x}$  und ihrer Ableitungen (b)  $f'(x) = e^{-x}(1-x)$  und (c)  $f''(x) = e^{-x}(x-2)$ .

### Bemerkungen

- (i) In ihren Extrempunkten ändert die Funktion ihr Monotonieverhalten.
- (ii) In ihren Wendepunkten ändert die Funktion ihr Krümmungsverhalten.
- (iii) Die Bedingung  $f'(x_0) = 0$  ist eine notwendige aber keine hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums von  $f$ . (Wenn  $f$  an der Stelle  $x_0$  ein lokales Extremum hat, dann ist  $f'(x_0) = 0$ .)
- (iv) Die Bedingung  $f''(x_0) = 0$  ist eine notwendige aber keine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes von  $f$ . (Wenn  $f$  an der Stelle  $x_0$  einen Wendepunkt hat, dann ist  $f''(x_0) = 0$ .)

### Beispiele

- (i) Die erste Ableitung der Funktion  $f(x) = x^3$  an der Stelle  $x_0 = 0$  ist  $f'(0) = 0$ . Dennoch hat  $f$  an der Stelle  $x_0 = 0$  kein lokales Extremum.
- (ii) Die zweite Ableitung der Funktion  $f(x) = x^4$  an der Stelle  $x_0 = 0$  ist  $f''(0) = 0$ . Dennoch hat  $f$  an der Stelle  $x_0 = 0$  keinen Wendepunkt.

### Hinreichende Bedingungen

- (i) Gegeben sei eine Funktion  $f$  mit  $f'(x_0) = 0$ . Dann hat  $f$  in  $x_0$  ein Extremum, wenn

$$f''(x_0) \neq 0.$$

Die Stelle  $x_0$  ist lokales Maximum, wenn  $f''(x_0) < 0$ , und die Stelle  $x_0$  ist lokales Minimum, wenn  $f''(x_0) > 0$ .

(ii) Gegeben sei eine Funktion  $f$  mit  $f''(x_0) = 0$ . Dann hat  $f$  in  $x_0$  einen Wendepunkt, wenn

$$f'''(x_0) \neq 0.$$

(iii) Gegeben sei eine Funktion  $f$  mit  $f^{(k)}(x_0) = 0$  für  $k = 1, \dots, n-1$  und  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ . Ist  $n$  geradzahlig und  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , dann ist in  $x_0$  ein lokales Maximum. Ist  $n$  eine geradzahlig und  $f^{(n)}(x_0) > 0$  dann ist in  $x_0$  ein lokales Minimum.

(iv) Gegeben sei eine Funktion  $f$  mit  $f^{(k)}(x_0) = 0$  für  $k = 2, \dots, n-1$  und  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ . Ist  $n$  ungerade, dann ist in  $x_0$  ein Wendepunkt.

### Beispiele

(i) Für die Funktion  $f(x) = x^8$  ist  $f^{(k)}(0) = 0$  für  $k = 1, \dots, 7$  und  $f^{(8)}(0) = 8! > 0$ , d. h.  $f$  hat an der Stelle  $x_0 = 0$  ein lokales Minimum.

(ii) Für die Funktion  $f(x) = x^9$  ist  $f^{(k)}(0) = 0$  für  $k = 1, \dots, 8$  und  $f^{(9)}(0) = 9! \neq 0$ , d. h.  $f$  hat an der Stelle  $x_0 = 0$  einen Wendepunkt.

(iii) Gegeben sei die Funktion  $f(x) = xe^{-x}$ , siehe auch Abbildung 4.1. Wegen  $f'(1) = 0$  und  $f''(1) = -\frac{1}{e} < 0$  hat  $f$  an der Stelle  $x_0 = 1$  ein lokales Maximum. Die dritte Ableitung ist

$$f'''(x) = -1 \cdot e^{-x}(x-2) + e^{-x} \cdot 1 = e^{-x}(3-x).$$

Wegen  $f''(2) = 0$  und  $f'''(2) = e^{-2} \neq 0$  hat  $f$  an der Stelle  $x_1 = 2$  einen Wendepunkt.

#### 4.2.2 Extremwertaufgaben

(i) Die Seitenlängen  $a$  und  $b$  eines Rechtecks sind so zu wählen, dass sein Umfang bei vorgegebener Fläche minimal wird.

Der Umfang  $U$  und die Fläche  $F$  eines Rechtecks errechnen sich aus

$$U = 2(a+b), \quad F = ab.$$

Der Umfang  $U$  kann als Funktion einer Kantenlänge – beispielsweise der Kantenlänge  $a$  – betrachtet werden,

$$U(a) = 2 \left( a + \frac{F}{a} \right),$$

wobei  $F$  eine Konstante ist. Es gilt

$$U'(a) = 2 \left( 1 - \frac{F}{a^2} \right), \quad U''(a) = \frac{4F}{a^3}.$$

Die Gleichung  $U'(a) = 0$  hat eine positive Lösung  $a = \sqrt{F}$ . Die Stelle  $a = \sqrt{F}$  ist lokales Minimum, da  $U''$  für alle positiven Werte für  $a$  ebenfalls positiv ist,  $U''(a) > 0$  für  $a > 0$ . Wegen  $F = a^2$  und  $b = F/a = a$  ist der Umfang für ein Quadrat mit der Kantenlänge  $a$  minimal.

- (ii) Ebenso wird sicher vermutet, dass der Umfang einer Ellipse mit vorgegebener Fläche dann minimal ist, wenn die Halbachsen  $a$  und  $b$  der Ellipse gleich lang sind. Für den Beweis tritt jedoch zunächst die Schwierigkeit auf, dass zwar für die Fläche einer Ellipse  $F = \pi ab$  gilt, der Umfang  $U$  aber entweder als Potenzreihe berechnet oder durch eine Näherungsformel abgeschätzt werden muss. Verwendet man die Näherung

$$U \approx \pi \left[ \frac{3}{2}(a+b) + \sqrt{ab} \right],$$

dann gilt

$$\begin{aligned} U(a) &\approx \pi \left[ \frac{3}{2} \left( a + \frac{F}{\pi a} \right) + \sqrt{\frac{F}{\pi}} \right], \\ U'(a) &\approx \pi \left[ \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{F}{\pi a^2} \right) \right] = \frac{3\pi}{2} \left( 1 - \frac{F}{\pi a^2} \right), \\ U''(a) &\approx \frac{3F}{a^3}. \end{aligned}$$

Mit der gleichen Argumentation wie im vorangegangenen Beispiel folgt, dass bei vorgegebener Fläche der Umfang einer Ellipse für  $a = b$  minimal ist.

### 4.2.3 Krümmung einer Kurve

Der *Krümmungskreis* einer Kurve einer Funktion  $f$  an einer Stelle  $x_0$  ist der Kreis, der sich an die Kurve im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  „anschmiegt“. Der Krümmungskreis hat den Mittelpunkt  $(x_1, y_1)$  und den Radius  $r = \frac{1}{|\kappa|}$  mit

$$x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0) [1 + (f'(x_0))^2]}{f''(x_0)}, \quad y_1 = y_0 + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)}, \quad \kappa = \frac{f''(x_0)}{\sqrt{[1 + (f'(x_0))^2]^3}}.$$

Der Wert  $\kappa$  heist *Krümmung* der Kurve der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$ . Für  $\kappa > 0$  liegt der Krümmungskreis oberhalb des Graphen der Funktion  $f$ . Die Funktion  $f$  ist in diesem Fall konvex an der Stelle  $x_0$ . Für  $\kappa < 0$  liegt der Krümmungskreis unterhalb des Graphen von  $f$ , und  $f$  ist konkav.

*Beispiel.* Sei  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ . Dann gilt

$$f'(x) = nx^{n-1}, \quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$$

und

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0 [1 + n^2 x_0^{2(n-1)}]}{n-1}, \quad y_1 = y_0 + \frac{1 + n^2 x_0^{2(n-1)}}{n(n-1)x_0^{n-2}}, \quad \kappa = \frac{n(n-1)x_0^{n-2}}{\sqrt{[1 + n^2 x_0^{2(n-1)}]^3}}.$$

Für  $n = 2$  und  $x_0 = 0$  ergibt sich daraus

$$x_1 = 0, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad \kappa = 2.$$

Der Krümmungskreis des Graphen der Funktion  $f(x) = x^2$  an der Stelle  $x_0 = 0$  hat den Mittelpunkt  $(0, \frac{1}{2})$  und den Radius  $r = \frac{1}{2}$ . Für  $n > 2$  ist die Krümmung an der Stelle  $x_0 = 0$  gleich Null, d. h., ein Krümmungskreis existiert nicht. Der Radius des Krümmungskreises divergiert für  $x \rightarrow 0$ .

### 4.3 Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe

Im Abschnitt 2.3 wurden Potenzreihen eingeführt und deren Konvergenzbereiche charakterisiert. So erhält man beispielsweise

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{für } |x| < 1.$$

In diesem Abschnitt soll das dazu komplementäre Problem betrachtet werden: Gegeben sei eine Funktion  $f$ , und gesucht ist ihre Darstellung als eine Potenzreihe. Gesucht ist also eine konstruktive Methode zur Entwicklung einer gegebenen Funktion in eine Potenzreihe.

#### 4.3.1 MacLaurinsche Reihen

Dazu setzen wir zunächst voraus, dass die Funktion  $f$  in einer Umgebung der Stelle  $x_0 = 0$  beliebig oft differenzierbar ist. Weiterhin sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihe von  $f$ . Dann gilt

$$\begin{array}{ll} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, & f(0) &= a_0, \\ f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots, & f'(0) &= a_1, \\ f''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + 4 \cdot 3 \cdot a_4 x^2 + \dots, & f''(0) &= 2a_2, \\ f'''(x) &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 x + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot a_5 x^2 + \dots, & f'''(0) &= 3 \cdot 2 \cdot a_3, \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \frac{n!}{0!} a_n + \frac{(n+1)!}{1!} a_{n+1} x + \frac{(n+2)!}{2!} a_{n+2} x^2 + \dots, & f^{(n)}(0) &= n! a_n, \\ &\vdots & &\vdots \end{array}$$

Falls die Funktion  $f$  in einer Umgebung der Stelle  $x_0 = 0$  beliebig oft differenzierbar ist, erhält man die Koeffizienten  $a_n$  einer Potenzreihe von  $f$  aus

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

d. h.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad \text{MacLaurinsche Reihe.} \end{aligned}$$

**Bemerkungen**

- (i) Die MacLaurinsche Reihe ist eine spezielle Taylor-Reihe. Das Entwicklungszentrum liegt bei  $x_0 = 0$ .
- (ii) Der Konvergenzradius einer MacLaurinschen Reihe wird wie in Abschnitt 2.3 bestimmt.
- (iii) Die Voraussetzung, dass  $f$  beliebig oft differenzierbar ist, ist nicht hinreichend dafür, dass die MacLaurin-Reihe eine konvergente Potenzreihe von  $f$  ist.
- (iv) Durch Partialsummen der MacLaurin-Reihe einer Funktion  $f$  kann diese Funktion approximiert werden, was oft Grundlage der numerischen Berechnung von Funktionswerten ist, siehe z. B. Abbildung 4.2.

**Beispiele**

(i)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^x \\
 f^{(n)}(x) &= e^x \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = 1 \\
 e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots
 \end{aligned}$$

Der Konvergenzradius ist  $r = \infty$ , d.h., diese MacLaurin-Reihe ist für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergent.

(ii)

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = \sin x, & f(0) = 0, \\
 f'(x) = \cos x, & f'(0) = 1, \\
 f''(x) = -\sin x, & f''(0) = 0, \\
 f'''(x) = -\cos x, & f'''(0) = -1, \\
 \vdots & \vdots
 \end{array}$$

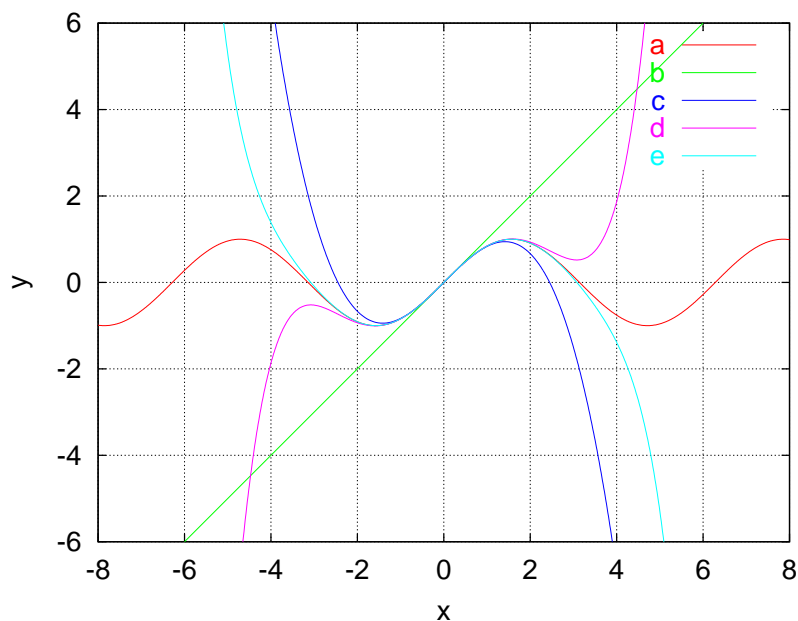
Man erhält also

$$\sin x = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

was man auch in der Form

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

schreiben kann, siehe auch Abschnitt 2.3, wo noch weitere MacLaurin-Reihen einiger wichtiger Funktionen angegeben sind.



**Abbildung 4.2:** (a) die Funktion  $f(x) = \sin x$  und ihre Approximation durch Partialsummen ihrer MacLaurin-Reihe: (b)  $f(x) = x$ , (c)  $f(x) = x - \frac{x^3}{6}$ , (d)  $f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ , (e)  $f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$ ,

(iii)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin x^2, & f(0) &= 0, \\
 f'(x) &= \cos x^2 \cdot 2x, & f'(0) &= 0, \\
 f''(x) &= -\sin x^2 \cdot 2x \cdot 2x + \cos x^2 \cdot 2, & f''(0) &= 2, \\
 &\vdots & &\vdots
 \end{aligned}$$

Das scheint kompliziert zu werden. Daher empfiehlt sich als Alternative die Substitution  $z = x^2$ . Mit

$$\sin z = \frac{z^1}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

erhält man

$$\begin{aligned}
 \sin x^2 &= \frac{x^2}{1!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2(2n+1)}.
 \end{aligned}$$

Potenzreihen dürfen innerhalb ihres Konvergenzbereichs gliedweise addiert, subtrahiert, differenziert und integriert werden. Auch dafür noch einmal zwei Beispiele:

**Beispiele**

(iv) Die Ableitung der Funktion  $f(x) = \sin x$  ist bekanntlich  $f'(x) = \cos x$ . Folglich erhält man die MacLaurin-Reihe von  $\cos x$  als erste Ableitung der MacLaurin-Reihe von  $\sin x$ ,

$$\begin{aligned} f(x) = \sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ f'(x) = \cos x &= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned} \sin x \cos x &= \left( \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) \cdot \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) \\ &= \begin{cases} \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ -\frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{3!2!} - \frac{x^7}{5!2!} + \dots \\ +\frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{3!4!} + \dots \\ -\frac{x^7}{3!4!} + \dots \end{cases} \\ &= \frac{x}{1!} - \frac{(1+3)x^3}{3!} + \frac{(1+5 \cdot 2+5)x^5}{5!} - \frac{(1+3 \cdot 7+5 \cdot 7+7)x^7}{7!} + \dots \\ &= \frac{x}{1!} - \frac{4x^3}{3!} + \frac{16x^5}{5!} - \frac{64x^7}{7!} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2x}{1!} - \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!} - \frac{128x^7}{7!} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{(2x)}{1!} - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x \end{aligned}$$

**4.3.2 Taylor-Reihen**

Sei  $f$  in einer Umgebung der Stelle  $x_0$  beliebig oft differenzierbar, dann gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \text{Taylor-Reihe.} \end{aligned}$$

Bei der Taylor-Reihe ist das Entwicklungszentrum ein Wert  $x_0 \in D(f)$ .

Die Taylor-Reihe wird u. a. zur Approximation einer vorgegebenen Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  durch das Polynom

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{f_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \dots}_{R_n(x)}$$

verwendet, wobei  $f_n(x)$  die  $n$ -te Partialsumme der Taylor-Reihe ist und die Funktion  $R_n(x)$  als *Restglied* bezeichnet wird.

Im Konvergenzbereich einer Taylor-Reihe wird das Restglied bei genügend großem  $n$  vernachlässigbar klein. Zur Abschätzung des Restgliedes werden folgende Formeln verwendet:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\delta(x-x_0)), \quad \text{für } 0 < \delta < 1, \quad \text{Formel von Lagrange,}$$

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} (1-\delta)^n f^{(n+1)}(x+\delta(x-x_0)), \quad \text{für } 0 < \delta < 1, \quad \text{Cauchy-Formel.}$$

### 4.3.3 Das Newton-Verfahren

Von großer Bedeutung ist die Approximation einer Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  durch eine Gerade,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R_1(x), \quad (4.1)$$

und das davon abgeleitete *Tangentenverfahren* von Newton. Aus Gleichung (4.1) leitet sich für  $f(x) = 0$  unmittelbar die Rekursionsvorschrift

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (4.2)$$

zur Berechnung einer Nullstelle der Funktion  $f$  ab, wobei  $x_0$  ein geeignet gewählter Näherungswert für die zu berechnende Nullstelle ist (Initial- oder Startwert).

Für die Wahl des Startwertes  $x_0$  muss die Konvergenzbedingung

$$\left| \frac{f(x_0) \cdot f''(x_0)}{(f'(x_0))^2} \right| < 1 \quad (4.3)$$

erfüllt sein.

### Beispiele

(i) Gesucht ist eine Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x^3 - 1,5x - 1.$$

Die ersten beiden Ableitungen der Funktion  $f$  sind

$$f'(x) = 3x^2 - 1,5 \quad \text{und} \quad f''(x) = 6x.$$

Für den Startwert  $x_0 = 1,5$  erhält man

$$f(1,5) = 0,125, \quad f'(1,5) = 5,25, \quad f''(1,5) = 9.$$

Wegen

$$\frac{f(1,5) \cdot f''(1,5)}{(f'(1,5))^2} = \frac{0,125 \cdot 9}{5,25^2} = 0,0408$$

ist die Konvergenzbedingung (4.3) erfüllt. Die Zwischenergebnisse des Newton-Verfahrens (4.2) sind in Tabelle 4.3 zusammengefasst. Als Näherungswert für die Nullstelle wird  $x_2 = 1,4757$  erhalten.

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f(x_i)/f'(x_i)$
0	1,5	0,125	5,25	0,023 81
1	1,476 19	0,002 537 5	5,037 4	0,000 503 73
2	1,475 686	$-1,25 \cdot 10^{-6}$	5,032 95	$-2,48 \cdot 10^{-7}$

**Tabelle 4.3:** Ergebnisse des Newton-Verfahrens zur Bestimmung der Nullstelle der Funktion  $f(x) = x^3 - 1,5x - 1$  unter Verwendung der Anfangslösung der Anfangslösung  $x_0 = 1,5$ .

(ii) Die Lösung der Gleichung  $x = e^{-x}$  kann iterativ durch

$$x_{i+1} = e^{-x_i}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (4.4)$$

mit einer geeignet gewählten Anfangslösung  $x_0$  bestimmt werden. Es gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0,567\,143\,290\,409\,783\dots$$

Ergebnisse der ersten Iterationsschritte für die Anfangslösung  $x_0 = 1$  sind in Tabelle 4.4 angegeben.

Alternativ dazu kann eine Lösung der Gleichung  $x = e^{-x}$  auch mit Hilfe des Newton-Verfahrens als Nullstelle der Funktion  $f(x) = e^{-x} - x$  bestimmt werden. Aus Formel (4.2) leitet sich die Rekursionsvorschrift

$$x_{i+1} = x_i + \frac{e^{-x_i} - x_i}{e^{-x_i} + 1}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (4.5)$$

ab. Rechenergebnisse sind in Tabelle 4.4 angegeben.

Ein Vergleich der beiden iterativen Methoden (4.4) und (4.5) zeigt, dass in diesem Beispiel eine Realisierung des Newton-Verfahrens aufwändiger ist, die notwendig Anzahl der Iterationen zur Berechnung einer Lösung mit einer gewünschten Genauigkeit ist aber deutlich geringer als bei Anwendung von (4.4).

$i$	$x_i$ für (4.4)	$x_i$ für (4.5)
0	1,000 000 000 000 000 0	1,000 000 000 000 000 0
1	0,367 879 441 171 442 3	0,537 882 842 739 990 2
2	0,692 200 627 555 346 4	0,566 986 991 405 413 2
3	0,500 473 500 563 636 8	0,567 143 285 989 122 9
4	0,606 243 535 085 597 4	0,567 143 290 409 783 8
5	0,545 395 785 975 027 0	0,567 143 290 409 783 8
6	0,579 612 335 503 378 9	0,567 143 290 409 783 8
7	0,560 115 461 361 089 1	0,567 143 290 409 783 8
8	0,571 143 115 080 177 0	0,567 143 290 409 783 8
9	0,564 879 347 391 049 5	0,567 143 290 409 783 8
10	0,568 428 725 029 060 7	0,567 143 290 409 783 8
11	0,566 414 733 146 883 3	0,567 143 290 409 783 8
12	0,567 556 637 328 283 4	0,567 143 290 409 783 8
13	0,566 908 911 921 495 3	0,567 143 290 409 783 8
14	0,567 276 232 175 569 6	0,567 143 290 409 783 8
15	0,567 067 898 390 788 4	0,567 143 290 409 783 8
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
30	0,567 143 305 640 762 2	0,567 143 290 409 783 9
31	0,567 143 281 771 636 8	0,567 143 290 409 783 9

**Tabelle 4.4:** Ergebnisse  $x_i$  der Iterationsmethoden (4.4) und (4.5) zur Lösung der Gleichung  $x = e^{-x}$  mit der Anfangslösung  $x_0 = 1$ .

- (iii) Das Newton-Verfahren kann auch zur numerischen Berechnung der Quadratwurzel  $\sqrt{a}$  verwendet werden. Der Wert  $\sqrt{a}$  ist positive Lösung der Gleichung  $x^2 = a$  oder positive Nullstelle der Funktion  $f(x) = x^2 - a$ . Damit erhält man die Rekursionsvorschrift

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2 - a}{2x_i} = \frac{1}{2} \left( x_i + \frac{a}{x_i} \right), \quad i = 0, 1, \dots$$

zur numerischen Berechnung des Wertes  $\sqrt{a}$ . Für  $a = 2$  und den Startwert  $x_0 = 2$  erhält man

$$x_1 = 1,5, \quad x_2 = 1,41\bar{6}, \quad x_3 = 1,414\,215\,686\,274\,509\dots$$

Das Newton-Verfahren konvergiert also sehr schnell gegen den Wert

$$\sqrt{2} = 1,414\,213\,562\,373\,095\dots$$

#### 4.3.4 Anwendung in der Fehlerrechnung

Ein Messwert  $x$  wird in der Regel mit einem absoluten Fehler  $|\Delta x|$  oder einem relativen Fehler  $|\delta x|$  mit  $\delta x = \frac{\Delta x}{x}$  angegeben.

Wie wirkt sich dieser Fehler auf einen Wert  $y$  aus, der selbst nicht gemessen wird, aber von  $x$  abhängig ist? Gegeben sei also eine Funktion  $f$  mit

$$y = f(x).$$

Dann sind

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad \text{und} \quad \delta y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)}$$

der absolute bzw. relative Fehler des Wertes  $y$ .

Ist der Messfehler  $|\Delta x|$  hinreichend klein, dann können die Näherungsformeln

$$\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x \quad \text{und} \quad \delta y \approx \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x \delta x$$

zur Berechnung von  $\Delta y$  bzw.  $\delta y$  verwendet werden.

*Beispiel:* Für den Zusammenhang zwischen dem Weg  $s$  und der Zeit  $t$  beim freien Fall gilt

$$s = \frac{g}{2} t^2,$$

wobei  $g$  die Erdbeschleunigung bezeichne. Angenommen, in einem Experiment wird die Zeit  $t$  mit einem relativen Fehler  $|\delta t| = 5\%$  gemessen. Dann ergibt sich

$$\delta s = \frac{\dot{s}(t) \cdot \Delta t}{s(t)} = \frac{\dot{s}(t)}{s(t)} \cdot t \delta t = \frac{gt}{\frac{g}{2}t^2} \cdot t \delta t = 2 \delta t = 10\%,$$

d. h., der relative Fehler  $|\delta s|$ , der sich durch Berechnung von  $s$  aus einem fehlerbehafteten Wert  $t$  für die Zeit ergibt, beträgt  $10\%$ .

## 4.4 Die l'Hospitalsche Regel

Die Bildung der Grenzwerte von Produkten wie z. B.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x}$$

führt häufig zu unbestimmten Ausdrücken der Form „ $\frac{0}{0}$ “ bzw. „ $\frac{\infty}{\infty}$ “. Die damit verbundenen Schwierigkeiten lassen sich in der Regel durch Anwendung der Differentialrechnung lösen.

Gegeben sei eine Funktion

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{mit} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = 0.$$

Durch die Entwicklung der beiden Funktionen  $u$  und  $v$  an der Stelle  $x_0$  in eine Taylor-Reihe erhält man die Darstellung der Funktion  $f$  durch

$$f(x) = \frac{u(x_0) + \frac{u'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{u''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{u'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots}{v(x_0) + \frac{v'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{v''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{v'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots}.$$

Diese Darstellung ist identisch mit

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\frac{u(x_0)}{x-x_0} + u'(x_0) + \frac{u''(x_0)}{2!}(x-x_0) + \frac{u'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^2 + \dots}{\frac{v(x_0)}{x-x_0} + v'(x_0) + \frac{v''(x_0)}{2!}(x-x_0) + \frac{v'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^2 + \dots} \\ &= \frac{u'(x_0) + \frac{u''(x_0)}{2!}(x-x_0) + \frac{u'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^2 + \dots}{v'(x_0) + \frac{v''(x_0)}{2!}(x-x_0) + \frac{v'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^2 + \dots}. \end{aligned}$$

Falls die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow x_0} u'(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} v'(x)$  existieren und verschieden von Null sind, gilt also

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}, \quad \text{Regel von l'Hospital.}$$

Ist jedoch auch der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)}$  vom Typ „ $\frac{0}{0}$ “ oder „ $\frac{\infty}{\infty}$ “, dann kann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u''(x)}{v''(x)}$$

gesetzt werden, usw.

### Bemerkungen

- (i) Die l'Hospitalsche Regel gilt auch für die Grenzwerte  $x \rightarrow \infty$  und  $x \rightarrow -\infty$ .
- (ii) Voraussetzung für die Anwendung der l'Hospitalsche Regel ist die Differenzierbarkeit der Funktionen  $u$  und  $v$  an der Stelle  $x_0$ .

### Beispiele

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{(l'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x} \stackrel{(l'H)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{xe^x} = 0$$

(iii)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x \tan x} \\ &\stackrel{(l'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + \tan^2 x)}{\tan x + x(1 + \tan^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{\tan x + x + x \tan^2 x} \\ &\stackrel{(l'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x (1 + \tan^2 x)}{1 + \tan^2 x + 1 + \tan^2 x + x \cdot 2 \tan x (1 + \tan^2 x)} = 0 \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \\ &\stackrel{(l'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0 \end{aligned}$$

(v) Der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  wurde bereits auf den Seiten 8 und 25, Formel (2.1), eingeführt. Unter Verwendung der l'Hospitalschen Regel lässt sich diese Formel nun auch herleiten. Es gilt zunächst

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$$

Daher ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right\},$$

und man erhält

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \\ &\stackrel{(l'H)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e.$$

# Kapitel 5

## Integralrechnung

### 5.1 Integration als Umkehrung der Differentiation – das unbestimmte Integral

Bei der Differentiation war zu einer gegebenen Funktion  $f$  ihre Ableitung  $f'$  gesucht. In diesem Abschnitt wird die umgekehrte Fragestellung betrachtet: Zu einer gegebenen Funktion  $f$  wird eine Funktion  $F$  gesucht, deren erste Ableitung die Funktion  $f$  ist.

#### Beispiele

- (i) Die Funktion  $f(x) = 1$  ist offensichtlich die erste Ableitung der Funktion  $F(x) = x$ , aber auch alle anderen Funktionen der Form

$$F(x) = x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

haben die erste Ableitung  $f(x) = 1$ . Die Graphen der Funktionen  $F(x) = x + c$  sind Geraden mit dem Anstieg  $f(x) = 1$ . Es gibt also mehrere Funktionen  $F$ , deren erste Ableitung  $f$  ist; die obige Frage kann also nicht eindeutig beantwortet werden.

- (ii) Gegeben sei eine Funktion  $f$  durch

$$f(x) = x.$$

Dann haben alle Funktionen des Typs

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

die erste Ableitung  $f$ , denn  $F'(x) = x$  für alle Werte  $c \in \mathbb{R}$ .

*Definition.* Eine Funktion  $F$  mit der Eigenschaft  $F'(x) = f(x)$  heißt *Stammfunktion* zu  $f$ .

*Bemerkung.* Zu jeder Funktion  $f$  gibt es unendlich viele Stammfunktionen, denn falls  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist, dann ist wegen

$$(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$$

auch jede Funktion  $F(x) + c$  Stammfunktion von  $f$ .

*Definition.* Die Menge aller Stammfunktionen zu einer Funktion  $f$  heißt *unbestimmtes Integral*,

$$\int f(x) dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion  $f$  ist der *Integrand* und die Konstante  $c$  wird *Integrationskonstante* genannt.

*Beispiele.*

$$\int 1 dx = x + c, \quad \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + c.$$

Stammfunktionen  $F$  zu wichtigen Funktionen können im Prinzip auch der Tabelle 4.1 entnommen werden. Wegen ihrer Bedeutung sind die wichtigsten Grundintegrale in Tabelle 5.1 zusammengefasst.

$\int f(x) dx$	=	$F(x) + c$	
$\int x^n dx$	=	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$	$n \in \mathbb{R}, n \neq -1$
$\int \frac{dx}{x}$	=	$\ln  x  + c,$	$x \neq 0$
$\int e^x dx$	=	$e^x + c$	
$\int a^x dx$	=	$\frac{a^x}{\ln a} + c = a^x \log_a e + c,$	$a > 0, a \neq 1$
$\int \sin x dx$	=	$-\cos x + c$	
$\int \cos x dx$	=	$\sin x + c$	
$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$	=	$\tan x + c,$	$x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x}$	=	$-\cot x + c,$	$x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	=	$\arcsin x + c,$	$ x  < 1$
$\int \frac{dx}{1+x^2}$	=	$\arctan x + c$	
$\int \sinh x dx$	=	$\cosh x + c$	
$\int \cosh x dx$	=	$\sinh x + c$	
$\int \frac{dx}{\cosh^2 x}$	=	$\tanh x + c$	
$\int \frac{dx}{\sinh^2 x}$	=	$-\coth x + c$	
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$	=	$\operatorname{arsinh} x + c$	
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$	=	$\operatorname{arcosh} x + c,$	$ x  > 1$
$\int \frac{dx}{1-x^2}$	=	$\operatorname{artanh} x + c,$	$ x  < 1$
$\int \frac{dx}{1-x^2}$	=	$\operatorname{arcoth} x + c,$	$ x  > 1$

**Tabelle 5.1:** Übersicht über einige Grundintegrale.

Komplizierte Integrale werden (nach Möglichkeit) auf einfache Integrale zurückgeführt, wobei die folgenden Regeln angewendet werden können:

### Integrationsregeln für unbestimmte Integrale

(i) *Integration einer Funktion mit einem konstanten Faktor.*

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx, \quad c \in \mathbb{R}$$

(ii) *Integration von Summen.*

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx, \quad \int \sum_{i=1}^n f_i(x) dx = \sum_{i=1}^n \int f_i(x) dx$$

(iii) *Integration von Differenzen.*

$$\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

(iv) *Substitutionsregel (analog zur Kettenregel der Differentialrechnung).*

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt \quad \text{mit} \quad t = g(x) \quad \text{und} \quad \frac{dt}{dx} = g'(x)$$

(v) *Partielle Integration (analog zur Produktregel der Differentialrechnung).*

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

(vi) *Integration nach Partialbruchzerlegung.*

1. *Fall:* Es sei  $f(x)$  eine echt gebrochen rationale Funktion mit

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_1}{x - x_1} + \dots + \frac{a_n}{x - x_n} \quad \text{mit} \quad a_1 = \frac{P_m(x_1)}{Q'_n(x_1)}, \dots, a_n = \frac{P_m(x_n)}{Q'_n(x_n)}$$

und  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m < n$ , d. h.,  $x_1, \dots, x_n$  sind einfache reellwertige Nullstellen des Nenners. Dann ist

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= a_1 \int \frac{dx}{x - x_1} + \dots + a_n \int \frac{dx}{x - x_n} \\ &= a_1 \ln |x - x_1| + \dots + a_n \ln |x - x_n| + c \end{aligned}$$

2. *Fall:* Die  $k$ -te Nullstelle ist doppelte reellwertige Nullstelle von  $Q_n$ . Dann kann  $f$  in der Form

$$f(x) = \frac{a_1}{x - x_1} + \dots + \frac{a_{k,1}}{x - x_k} + \frac{a_{k,2}}{(x - x_k)^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x - x_{n-1}}$$

geschrieben werden, und man erhält

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \int \frac{a_1 dx}{x-x_1} + \dots + \int \frac{a_{k,1} dx}{x-x_k} + \int \frac{a_{k,2} dx}{(x-x_k)^2} + \dots + \int \frac{a_{n-1} dx}{x-x_{n-1}} \\ &= a_1 \ln|x-x_1| + \dots + a_{k,1} \ln|x-x_k| - \frac{a_{k,2}}{x-x_k} + \dots + a_n \ln|x-x_n| + c\end{aligned}$$

Die beiden unbekanntenen Koeffizienten  $a_{k,1}$  und  $a_{k,2}$  erhält man mittels eines *Koeffizientenvergleichs*. Die Methode lässt sich leicht auf Fälle übertragen, in denen mehr als eine doppelte oder mehrfache Nullstelle auftritt.

### Beispiele

(i)

$$\int (x^3 + 5x^2 - 3x + 7) dx = \frac{x^4}{4} + 5\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 7x + c$$

(ii)

$$\int \left( \frac{1}{x^3} + 4e^x - \frac{1}{x} - \cos x \right) dx = -\frac{1}{2x^2} + 4e^x - \ln|x| - \sin x + c$$

(iii)

$$\int \frac{x^2 - 3\sqrt{x}}{x} dx = \int \left( x - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 3 \cdot 2\sqrt{x} + c$$

(vi)

$$\begin{aligned}\int \cos(3x-7) dx &= \int \cos t \frac{dt}{3} \quad \text{mit } t = 3x-7, \frac{dt}{dx} = 3, \text{ d. h. } dx = \frac{dt}{3} \\ &= \frac{1}{3} \int \cos t dt \\ &= \frac{1}{3} \sin t + c \\ &= \frac{1}{3} \sin(3x-7) + c\end{aligned}$$

(v) Allgemein gilt

$$\begin{aligned}\int f(ax+b) dx &= \int f(t) \frac{dt}{a} \quad \text{mit } t = ax+b, \frac{dt}{dx} = a, \text{ d. h. } dx = \frac{dt}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int f(t) dt \\ &= \frac{1}{a} \cdot F(t) + c \\ &= \frac{F(ax+b)}{a} + c.\end{aligned}$$

(vi) Mit dieser Argumentation erhält man z. B.

$$\int \sqrt{4x-5} \, dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot (4x-5)^{3/2} = \frac{1}{6} \sqrt{(4x-5)^3} + c$$

(vii) oder

$$\int e^{7x-2} \, dx = \frac{1}{7} e^{7x-2} + c.$$

(viii)

$$\begin{aligned} \int x \cos x^2 \, dx &= \int x \cos t \frac{dt}{2x} \quad \text{mit } t = x^2, \frac{dt}{dx} = 2x, \text{ d. h. } dx = \frac{dt}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \int \cos t \, dt \\ &= \frac{1}{2} \sin t + c = \frac{1}{2} \sin x^2 + c \end{aligned}$$

(ix)

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos x \, dx &= \int t \, dt \quad \text{mit } t = \sin x, \frac{dt}{dx} = \cos x, dx = \frac{dt}{\cos x} \\ &= \frac{t^2}{2} + c = \frac{\sin^2 x}{2} + c \end{aligned}$$

(x)

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x} \, dx &= \int \frac{t}{x} \, dt \quad \text{mit } t = \ln x, \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}, dx = x \, dt \\ &= \int t \, dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c \end{aligned}$$

(xi) Allgemein gilt

$$\begin{aligned} \int f(x) \cdot f'(x) \, dx &= \int t \, dt \quad \text{mit } t = f(x), \frac{dt}{dx} = f'(x), dx = \frac{dt}{f'(x)} \\ &= \int t \, dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{(f(x))^2}{2} + c. \end{aligned}$$

(xii)

$$\begin{aligned} \int \frac{2e^x}{2e^x+3} \, dx &= \int \frac{dt}{t} \quad \text{mit } t = 2e^x+3, \frac{dt}{dx} = 2e^x, dx = \frac{dt}{2e^x} \\ &= \ln |t| + c = \ln |2e^x+3| + c \end{aligned}$$

(xiii) Allgemein gilt

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c.$$

(xiv)

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2}{(1-3x^3)^4} dx &= \int \frac{4x^2}{t^4} \frac{dt}{(-9x^2)} \\ &\quad \text{mit } t = 1 - 3x^3, \frac{dt}{dx} = -9x^2, dx = \frac{dt}{(-9x^2)} \\ &= -\frac{4}{9} \int \frac{1}{t^4} dt = -\frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{t^3} + c \\ &= \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{(1-3x^3)^3} + c \end{aligned}$$

(xv) Das Integral  $\int xe^x dx$  lässt sich leicht durch partielle Integration lösen, wenn man  $f(x) = x$  und  $g'(x) = e^x$  setzt. Dann ist  $f'(x) = 1$  und  $g(x) = e^x$ . Partielle Integration liefert

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c.$$

Der Ansatz  $f(x) = e^x$ ,  $g'(x) = x$  würde hier nicht zum Ziel führen: Es ist  $f'(x) = e^x$  und  $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ , und damit erhält man

$$\int xe^x dx = \frac{1}{2}x^2 e^x - \int \frac{1}{2}x^2 e^x dx,$$

aber das Integral  $\int x^2 e^x dx$  ist nicht leichter berechenbar als  $\int xe^x dx$ .

(xvi)

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x dx &\quad \text{mit } \begin{cases} f(x) = x^2, & f'(x) = 2x \\ g'(x) = \cos x & g(x) = \sin x \end{cases} \\ &= x^2 \sin x - \int 2x \cdot \sin x dx \quad \text{mit } \begin{cases} f(x) = 2x, & f'(x) = 2 \\ g'(x) = \sin x & g(x) = -\cos x \end{cases} \\ &= x^2 \sin x - \left( 2x \cdot (-\cos x) - \int 2 \cdot (-\cos x) dx \right) \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c \end{aligned}$$

(xvii)

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &\quad \text{mit } \begin{cases} f(x) = \ln x, & f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = 1 & g(x) = x \end{cases} \\ &= x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx \\ &= x \ln x - x + c \\ &= x(\ln x - 1) + c \end{aligned}$$

(xviii) Der Nenner der echt gebrochen rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{P_1(x)}{Q_2(x)} = \frac{3x - 11}{x^2 + x - 6}$$

hat die einfachen Nullstellen

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}, \quad \text{d. h.} \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -3.$$

Folglich lässt sich die Funktion  $f$  in der Form

$$f(x) = \frac{a_1}{x - 2} + \frac{a_2}{x + 3}$$

darstellen mit

$$a_1 = \frac{P_1(2)}{Q_2'(2)} = \frac{-5}{5} = -1, \quad a_2 = \frac{P_1(-3)}{Q_2'(-3)} = \frac{-20}{-5} = 4.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-1}{x - 2} + \frac{4}{x - (-3)} = \frac{4}{x + 3} - \frac{1}{x - 2} \\ \int f(x) dx &= 4 \ln |x + 3| - \ln |x - 2| + c \end{aligned}$$

(xix) Mögliche Nullstellen für die gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} \tag{5.1}$$

sind ganzzahlige Teiler von  $-4$ . Das Horner-Schema für  $x_1 = 1$  liefert

$$x_1 = 1 : \begin{array}{cccc|c} & 1 & -5 & 8 & -4 & \\ & 0 & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array},$$

d. h.  $x_1 = 1$  ist Nullstelle. Alle weiteren Nullstellen sind Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 4x + 4 = 0, \quad \text{und folglich ist} \quad x_{2/3} = 2 \pm \sqrt{4 - 4}.$$

Der Wert  $x_2 = x_3 = 2$  ist somit doppelte Nullstelle, und es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_{2,1}}{x - x_2} + \frac{a_{2,2}}{(x - x_2)^2} = \frac{a_1}{x - 1} + \frac{a_{2,1}}{x - 2} + \frac{a_{2,2}}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{a_1(x - 2)^2 + a_{2,1}(x - 1)(x - 2) + a_{2,2}(x - 1)}{(x - 1) \cdot (x - 2)^2} \\ &= \frac{a_1(x^2 - 4x + 4) + a_{2,1}(x^2 - 3x + 2) + a_{2,2}(x - 1)}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} \\ &= \frac{(a_1 + a_{2,1})x^2 + (-4a_1 - 3a_{2,1} + a_{2,2}) + (4a_1 + 2a_{2,1} - a_{2,2})}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Koeffizienten des Zählers mit denen des Zähler von Gleichung (5.1) führt zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1 + a_{2,1} &= 0 \\ -4a_1 - 3a_{2,1} + a_{2,2} &= 1 \\ 4a_1 + 2a_{2,1} - a_{2,2} &= 1 \end{aligned}$$

für die unbekanntenen Koeffizienten  $a_1$ ,  $a_{2,1}$ ,  $a_{2,2}$ . Als Lösung dieses Gleichungssystems erhält man

$$a_1 = 2, \quad a_{2,1} = -2, \quad a_{2,2} = 3,$$

und damit ist

$$f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}.$$

Integration liefert schließlich

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^3-5x^2+8x-4} dx &= \int \frac{2}{x-1} dx - \int \frac{2}{x-2} dx + \int \frac{3}{(x-2)^2} dx \\ &= 2 \ln|x-1| - 2 \ln|x-2| - \frac{3}{x-2}. \end{aligned}$$

### Integration nach Potenzreihenentwicklung

In vielen Fällen ist eine Integration mit den bisherigen Mitteln nicht möglich bzw. zu aufwändig. Neben der numerischen Integration, siehe Abschnitt 5.5, empfiehlt sich eine Integration nach einer Potenzreihenentwicklung des Integranden.

Beispiel  $\int e^{-x^2} dx$ :

1. Schritt (*Potenzreihenentwicklung des Integranden*):

$$\begin{aligned} e^t &= 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \\ e^{-t} &= 1 - \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots \\ e^{-x^2} &= 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} \end{aligned}$$

2. Schritt (*Integration*):

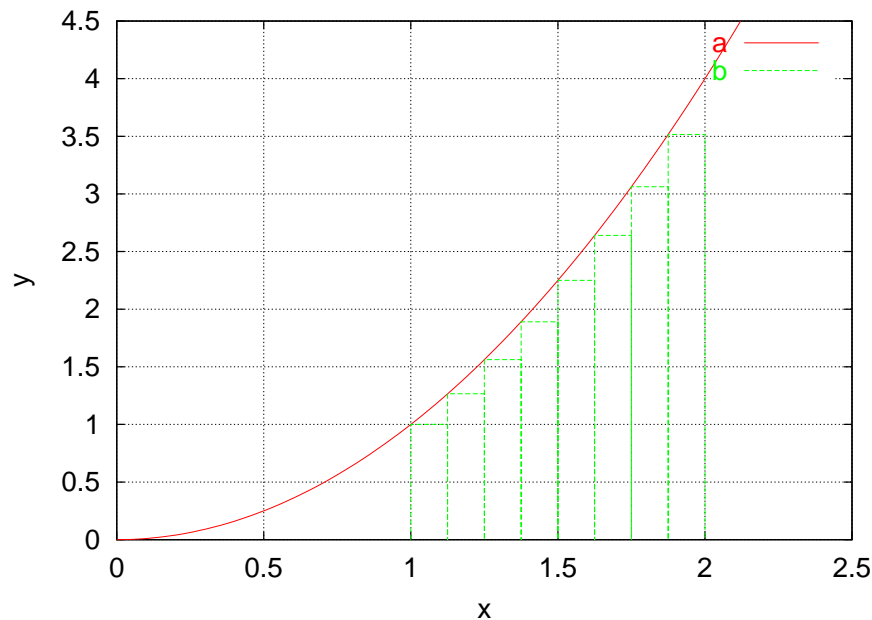
$$\begin{aligned} \int e^{-x^2} dx &= \int \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \int x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k! \cdot (2k+1)} \end{aligned}$$

Die Vertauschung der Reihenfolge von Integration und Summation ist jedoch nur möglich, wenn die Potenzreihe konvergent ist.

## 5.2 Das bestimmte Integral – Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

### Einführung

Gesucht sei der Flächeninhalt  $A$  zwischen der Funktion  $f(x) = x^2$  und der x-Achse im Intervall von  $a = 1$  bis  $b = 2$ . Dabei kann wie folgt vorgegangen werden: Die Fläche wird in  $n$  Streifen gleicher Breite  $\Delta$  mit  $\Delta = \frac{b-a}{n}$  zerlegt, und jeder der Streifen wird durch ein Rechteck ersetzt. Dann kann die Fläche  $A$  durch die Summe der Flächen der Rechtecke approximiert werden, siehe Abbildungen 5.1 und 5.2.



**Abbildung 5.1:** (a) Die Funktion  $f(x) = x^2$  und (b) die Approximation der Fläche  $A$  durch die Summe der Rechteckflächen für  $n = 8$  (Untersumme  $A_8^u$ ).

Für eine solche Approximation gibt es zwei Möglichkeiten, die Approximation mit der Untersumme

$$A_n^u = \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\Delta) \cdot \Delta = \Delta \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\Delta)$$

und die Approximation durch die Obersumme

$$A_n^o = \Delta \sum_{k=1}^n f(a + k\Delta).$$

Offensichtlich konvergieren in diesem Beispiel sowohl die Untersumme als auch die Obersumme für  $n \rightarrow \infty$  gegen die zu bestimmende Fläche  $A$ . Wegen  $\Delta = \frac{1}{n}$  gilt für die Obersumme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^o &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{2k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{n^2 + n}{n^2} + \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} \right) \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

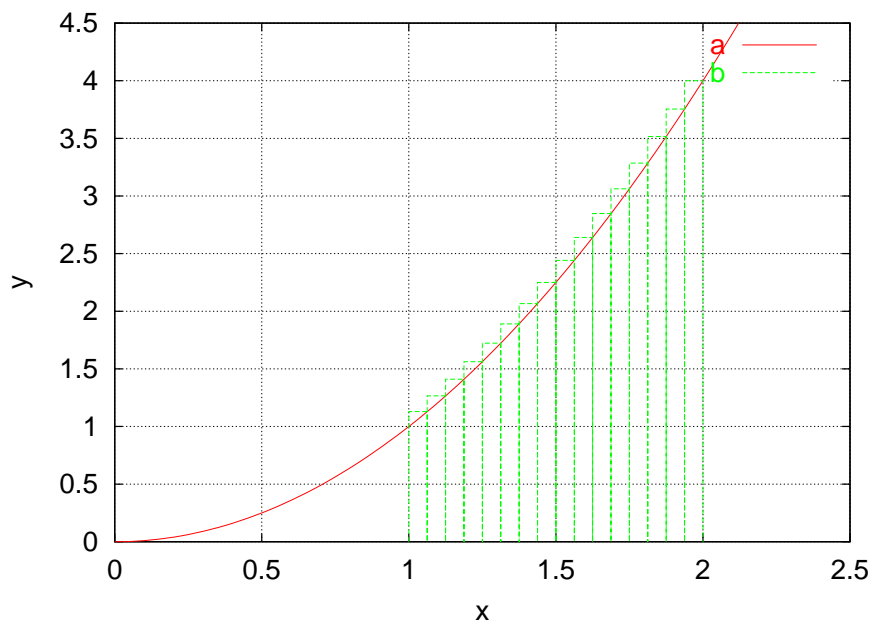
Für den Grenzwert der Obersumme erhält man das gleiche Resultat,  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^o = \frac{7}{3}$ .

*Satz.* Sei  $f(x)$  im Intervall  $[a, b]$  stetig, so streben ihre Untersumme  $A_n^u$  und Obersumme  $A_n^o$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen den gleichen Wert  $A$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^u = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^o = A.$$

### Bemerkungen

- (i) Die Berechnung der Fläche  $A$  als Grenzwert der Ober- oder Untersumme ist aufwändig.
- (ii) Liegt der Graph der Funktion  $f(x)$  unterhalb der x-Achse, dann ist der Wert  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^u = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^o = A$  negativ.



**Abbildung 5.2:** (a) Die Funktion  $f(x) = x^2$  und (b) die Approximation der Fläche  $A$  durch die Summe der Rechteckflächen für  $n = 16$  (Obersumme  $A_{16}^o$ ).

*Definition.* Der Grenzwert  $A$  heißt *bestimmtes Integral* der Funktion  $f$  in den Grenzen  $a$  und  $b$ ,

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

*Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).* Es sei  $f$  eine im Intervall  $[a, b]$  stetige Funktion und  $F$  eine beliebige Stammfunktion zu  $f$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Häufig wird die Schreibweise  $F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$  verwendet.

### Beispiele

- (i) Wir hatten bereits gezeigt, dass  $\int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}$ . Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung kommt man zum gleichen Ergebnis,

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Die Berechnung des bestimmten Integrals mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ist jedoch einfacher als die Bildung der Grenzwerte der Ober- und Untersummen.

(ii)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin x \, dx &= -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(-1) + 1 = 2 \\ \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx &= -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -1 + (-1) = -2 \\ \int_0^{2\pi} \sin x \, dx &= -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -(-1) + (-1) = 0 \\ \int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx &= \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) \, dx = 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

**Integrationsregeln für bestimmte Integrale**

(i)

$$\int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

(ii)

$$\int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \leq b \leq c$$

(iii)

$$\int_a^b c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int_a^b f(x) \, dx, \quad c \in \mathbb{R}$$

(iv)

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx$$

(v)

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx$$

(vi)

$$\int_a^b f(g(x)) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt = F(t) \Big|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(x)) \Big|_a^b$$

**Beispiele**

(i)

$$\int_0^2 (3x^2 + 2x - 1) dx = (x^3 + x^2 - x) \Big|_0^2 = 8 + 4 - 2 = 10$$

(ii)

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \sin x dx & \quad \text{mit} \quad \begin{cases} f(x) = x, & g'(x) = \sin x \\ f'(x) = 1, & g(x) = -\cos x \end{cases} \\ &= -x \cdot \cos x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) dx \\ &= -x \cdot \cos x \Big|_0^\pi - (-\sin x) \Big|_0^\pi \\ &= -(\pi \cdot (-1)) - (0 - 0) \\ &= \pi \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx & \quad \text{mit} \quad t = 1 + x^2, \quad \frac{dt}{dx} = 2x, \quad dx = \frac{dt}{2x} \\ &= \int_1^{17} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ &= \sqrt{t} \Big|_1^{17} = \sqrt{17} - 1 \\ &\left( = \sqrt{1+x^2} \Big|_0^4 = \sqrt{17} - 1 \right) \end{aligned}$$

**5.3 Uneigentliche Integrale**

Die bestimmten Integrale mit unendlichem Integrationsbereich

$$\int_a^\infty f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x) dx$$

heißen *uneigentliche Integrale*. Sie sind durch die Grenzwerte

$$\begin{aligned}\int_a^\infty f(x) dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx, \\ \int_{-\infty}^b f(x) dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \\ \int_{-\infty}^\infty f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^\infty f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx\end{aligned}$$

definiert.

Ein uneigentliches Integral ist konvergent, wenn der dazugehörige Grenzwert existiert.

Weitere uneigentliche Integrale sind Integrale, deren Integranden im Integrationsbereich eine oder mehrere Polstellen besitzen. Sei  $f(x)$  eine Funktion mit einer Polstelle  $x_0$  im Integrationsbereich,  $x_0 \in [a, b]$ . Dann ist das bestimmte Integral dieser Funktion definiert durch

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \uparrow x_0} \int_a^c f(x) dx + \lim_{c \downarrow x_0} \int_c^b f(x) dx.$$

### Beispiele

(i)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} &= \lim_{c \uparrow 0} \int_{-1}^c \frac{dx}{x} + \lim_{c \downarrow 0} \int_c^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c \uparrow 0} \ln |x| \Big|_{-1}^c + \lim_{c \downarrow 0} \ln |x| \Big|_c^1 \\ &= \lim_{c \uparrow 0} (\ln |c| - \ln 1) + \lim_{c \downarrow 0} (\ln 1 - \ln c) \\ &= (-\ln 1 + \ln 1) + \lim_{c \downarrow 0} (\ln |-c| - \ln c) \\ &= 0\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \arctan x \Big|_c^0 + \lim_{c \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_0^c \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} (\arctan 0 - \arctan c) + \lim_{c \rightarrow \infty} (\arctan c - \arctan 0) \\ &= \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi\end{aligned}$$

(iii)

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x} \, dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \sqrt{x} \, dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left. \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right|_0^c = \frac{2}{3} \lim_{c \rightarrow \infty} (c^{\frac{3}{2}} - 0) = \infty$$

(iv) Gesucht ist die Arbeit  $W$ , die aufzubringen ist, um eine Masse  $m$  aus einer Entfernung  $r_0$  vom Erdmittelpunkt ins Weltall, d. h. außerhalb des Gravitationsfeldes der Erde, zu bringen. Es gilt

$$W = \int_{r_0}^{\infty} F(r) \, dr \quad \text{mit} \quad F(r) = \frac{fmM}{r^2},$$

wobei  $f$  die Gravitationskonstante,  $M$  die Erdmasse und  $r$  die Entfernung zum Erdmittelpunkt bezeichnen. Man erhält

$$\begin{aligned} W &= \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \int_{r_0}^{r_1} \frac{fmM}{r^2} \, dr = fmM \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r^2} = fmM \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \left. \left( -\frac{1}{r} \right) \right|_{r_0}^{r_1} \\ &= fmM \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0} \right) \\ &= \frac{fmM}{r_0}. \end{aligned}$$

## 5.4 Anwendungen

### 5.4.1 Flächenberechnung

Zur Berechnung des Flächeninhalts  $A$  zwischen dem Graph einer Funktion  $f$  und der x-Achse im Intervall  $[a, b]$  werden zunächst die Nullstellen  $x_1, \dots, x_n$  von  $f$  im Intervall  $[a, b]$  bestimmt und dann die Integrale über die Teilintervalle zwischen den Nullstellen gebildet,

$$\begin{aligned} A = \int_a^b |f(x)| \, dx &= \int_a^{x_1} |f(x)| \, dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| \, dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} |f(x)| \, dx + \int_{x_n}^b |f(x)| \, dx \\ &= \left| \int_a^{x_1} f(x) \, dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx \right| + \dots + \left| \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) \, dx \right| + \left| \int_{x_n}^b f(x) \, dx \right|, \end{aligned}$$

wobei die Nullstellen nach ihrer Größe geordnet sind,  $a \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq b$ .

### Beispiele

(i) Zu berechnen ist die Fläche  $A$  zwischen  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$  und der x-Achse in den

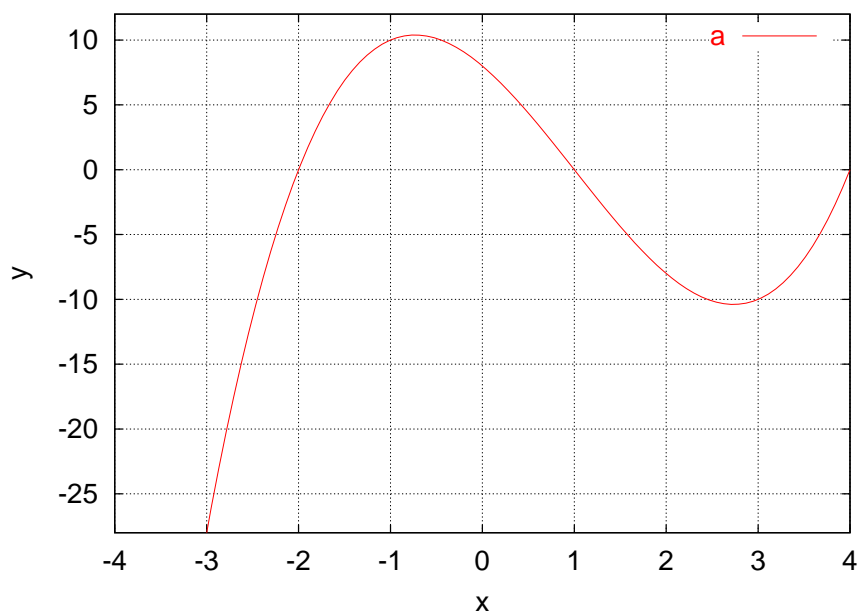


Abbildung 5.3: Der Graph der Funktion  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ .

Grenzen  $a = -3$  und  $b = 3$ . Die Nullstellen von  $f$  sind  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 4$ . Es gilt

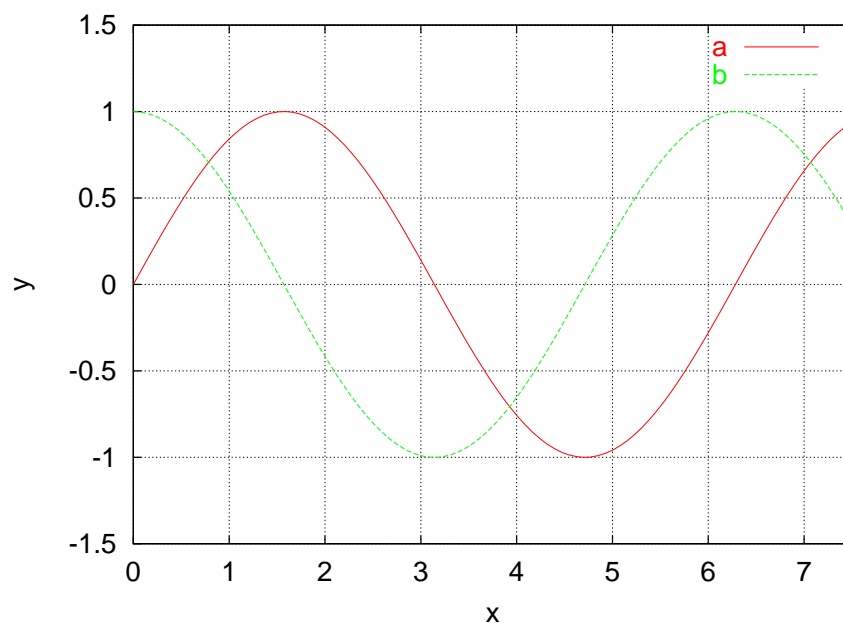
$$F(x) = \int f(x) dx = \frac{x^4}{4} - x^3 - 3x^2 + 8x + c$$

und

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{x_1} |f(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \int_{x_2}^b |f(x)| dx \\ &= \int_{-3}^{-2} |f(x)| dx + \int_{-2}^1 |f(x)| dx + \int_1^3 |f(x)| dx \\ &= -F(x) \Big|_{-3}^{-2} + F(x) \Big|_{-2}^1 + (-F(x)) \Big|_1^3 \\ &= 12,25 + 20,25 + 14 \\ &= 46,5, \end{aligned}$$

vgl. auch Abbildung 5.3.

(ii) Die Fläche  $A$  zwischen den Kurven der Funktionen  $\sin x$  und  $\cos x$  errechnet sich aus



**Abbildung 5.4:** Die Graphen der Funktionen (a)  $\sin x$  und (b)  $\cos x$  haben Schnittpunkte an den Stellen  $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x| dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{2\pi + \frac{\pi}{4}} |\sin x - \cos x| dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi + \frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx + \int_{\pi + \frac{\pi}{4}}^{2\pi + \frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx \\
 &= (-\cos x - \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi + \frac{\pi}{4}} + (\sin x + \cos x) \Big|_{\pi + \frac{\pi}{4}}^{2\pi + \frac{\pi}{4}} \\
 &= 4 \sin \frac{\pi}{4} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= 2\sqrt{2},
 \end{aligned}$$

vgl. auch Abbildung 5.4.

### 5.4.2 Länge eines Graphen

Die Länge  $\ell$  des Graphen der Funktion  $f$ , d. h. die *Bogenlänge* von  $f$ , zwischen den Werten  $a$  und  $b$  errechnet sich aus

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Ist die Kurve in parametrischer Form  $(x(t), y(t))$  gegeben, dann gilt

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt.$$

### Beispiele

(i) Zu berechnen ist die Länge des Graphen der Funktion  $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$  im Intervall  $[0, 4]$ . Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2}\sqrt{x}, & (f'(x))^2 &= \frac{9}{4}x \\ \ell &= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx, & \text{Substitution } t &= 1 + \frac{9}{4}x, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{9}{4} \\ &= \frac{4}{9} \int_1^{10} \sqrt{t} dt = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{10} \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{8}{27} (\sqrt{1000} - 1) \\ &= 9,0734\dots \end{aligned}$$

(ii) Bekanntlich ist der Kreisumfang gleich  $2\pi r$ . Das soll als einfaches Beispiel mit Hilfe der obigen Formel nachvollzogen werden. Aus der parametrischen Form der Kreislinie

$$x(\varphi) = r \cos \varphi, \quad y(\varphi) = r \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

erhält man

$$\frac{dx}{d\varphi}(\varphi) = -r \sin \varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi}(\varphi) = r \cos \varphi$$

und

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}(\varphi)\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}(\varphi)\right)^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(-\sin \varphi)^2 + r^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \\ &= r \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} d\varphi = r \int_0^{2\pi} 1 d\varphi \\ &= 2\pi r. \end{aligned}$$

(iii) Auf analoge Weise erhält man den Umfang einer Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ ,  $a \leq b$ . Die parametrischen Form des Randes einer Ellipse ist

$$x(\varphi) = a \cos \varphi, \quad y(\varphi) = b \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Daraus ergibt sich

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi} d\varphi$$

mit  $k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ . Das Integral lässt sich nicht analytisch berechnen.<sup>1</sup> Wir probieren es daher mit einer Integration nach Potenzreihenentwicklung des Integranden. Es gilt

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}, & f(0) &= \sqrt{1 - k^2}, \\ f'(\varphi) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-2k^2 \cos \varphi (-\sin \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}} \\ &= \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{f(\varphi)}, & f'(0) &= 0, \\ f''(\varphi) &= \frac{k^2(\sin \varphi \cdot (-\sin \varphi) + \cos \varphi \cdot \cos \varphi) \cdot f(\varphi)}{f^2(\varphi)} - \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot f'(\varphi)}{f^2(\varphi)} \\ &= \frac{k^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{f(\varphi)} - \frac{(f'(\varphi))^2}{f(\varphi)}, & f''(0) &= \frac{k^2}{\sqrt{1 - k^2}}, \\ f(\varphi) &= \sqrt{1 - k^2} + \frac{0}{1!} \varphi + \frac{k^2}{\sqrt{1 - k^2}} \cdot \frac{1}{2!} \varphi^2 + \dots \\ &= \sqrt{1 - k^2} + \frac{k^2 \varphi^2}{2\sqrt{1 - k^2}} + \dots \\ \ell &= 4a \int_0^{\pi/2} f(\varphi) d\varphi = 4a \left( \sqrt{1 - k^2} \varphi + \frac{k^2 \varphi^3}{6\sqrt{1 - k^2}} \right) \Big|_0^{\pi/2} + \dots \\ &\approx 2\pi a \sqrt{1 - k^2} + \frac{\pi^3 a k^2}{12\sqrt{1 - k^2}}. \end{aligned}$$

Diese Formel liefert für  $a = b$  den exakten Umfang (Kreisumfang), für  $a \neq b$  jedoch nur eine Näherung des Umfangs der entsprechenden Ellipse. Für die Werte  $a = 2$  und  $b = 1$  erhält man  $\ell \approx 14,03 \dots$ . Das exakte Ergebnis ist  $\ell = 9,688 \dots$ . Die erhaltene Näherung ist schlecht.<sup>2</sup>

### 5.4.3 Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern

Ein Rotationskörper  $K$  ist die Menge aller Punkte des Raumes, deren Abstand von der x-Achse nicht größer als der Funktionswert einer gegebenen Funktion  $f$  an der Stelle  $x$  ist, wobei  $x$  zwischen

<sup>1</sup>Unter Verwendung des vollständigen elliptischen Integrals 2. Ordnung  $E(k, \frac{\pi}{2}) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$  kann der Umfang der Ellipse durch

$$\ell = 4aE\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$$

dargestellt werden.

<sup>2</sup>Das liegt daran, dass die MacLaurin-Reihe der Funktion  $f$  leider divergent für  $0 < k < 1$  ist; die Einbeziehung von Reihengliedern höherer Ordnung kann das Ergebnis nicht verbessern. In der Literatur sind bessere Approximationen zu finden, die oft auch durch Integration nach einer Reihenentwicklung erhalten wurden.

den Grenzen  $a$  und  $b$  variiert,

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x), a \leq x \leq b \right\}.$$

Sein Volumen  $V(K)$  und seine Oberfläche  $S(K)$  können mit Hilfe von

$$\begin{aligned} V(K) &= \pi \int_a^b f^2(x) dx \\ S(K) &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx + \pi (f^2(a) + f^2(b)) \end{aligned}$$

berechnet werden, wobei  $2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$  als *Mantelfläche* von  $K$  bezeichnet wird.

### Beispiele

- (i) Das Volumen  $V(K)$  des durch die Funktion  $f(x) = \sin x$  in den Grenzen von 0 bis  $\pi$  gegebenen Rotationskörpers  $K$  errechnet sich aus

$$V(K) = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx.$$

Das in dieser Rechnung auftretende Integral  $\int \sin^2 x dx$  berechnet man durch partielle Integration,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx &= \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin x dx \\ &= (-\cos x) \cdot \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) \cdot \cos x dx \\ &= \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 x) dx = \pi - \int_0^{\pi} \sin^2 x dx \\ 2 \int_0^{\pi} \sin^2 x dx &= \pi \\ \int_0^{\pi} \sin^2 x dx &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$V(K) = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

(Ein alternativer Ansatz zur Berechnung des bestimmten Integrals kann auf der Transformation  $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$  beruhen.)

(ii) Die Oberfläche von  $K$  entspricht in diesem Fall der Mantelfläche,

$$\begin{aligned} S(K) &= 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} \, dx, & \text{Substitution } t = \cos x, \frac{dt}{dx} &= -\sin x \\ &= -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 + t^2} \, dt = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 + t^2} \, dt \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left( t\sqrt{1 + t^2} + \operatorname{arsinh} t \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \pi \left[ \left( \sqrt{2} + \operatorname{arsinh}(1) \right) - \left( -\sqrt{2} + \operatorname{arsinh}(-1) \right) \right] \\ &= \pi \left[ 2\sqrt{2} + \ln \left( 1 + \sqrt{1 + 1^2} \right) - \ln \left( (-1) + \sqrt{1 + (-1)^2} \right) \right] \\ &= \pi \left[ 2\sqrt{2} + \ln \left( \sqrt{2} + 1 \right) - \ln \left( \sqrt{2} - 1 \right) \right] = \pi \left[ 2\sqrt{2} + \ln \left( 3 + 2\sqrt{2} \right) \right] \\ &= 19,0\dots \end{aligned}$$

wobei das unbestimmte Integral  $\int \sqrt{1 + t^2} \, dt$  durch partielle Integration berechnet wurde,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + t^2} \, dt &= \int 1 \cdot \sqrt{1 + t^2} \, dt = t\sqrt{1 + t^2} - \int \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}} \, dt \\ &= t\sqrt{1 + t^2} - \int \frac{1 + t^2 - 1}{\sqrt{1 + t^2}} \, dt \\ &= t\sqrt{1 + t^2} - \int \frac{1 + t^2}{\sqrt{1 + t^2}} \, dt + \int \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \, dt \\ &= t\sqrt{1 + t^2} - \int \sqrt{1 + t^2} \, dt + \operatorname{arsinh} t \\ 2 \int \sqrt{1 + t^2} \, dt &= t\sqrt{1 + t^2} + \operatorname{arsinh} t \\ \int \sqrt{1 + t^2} \, dt &= \frac{1}{2} \left( t\sqrt{1 + t^2} + \operatorname{arsinh} t \right). \end{aligned}$$

## 5.5 Numerische Integration

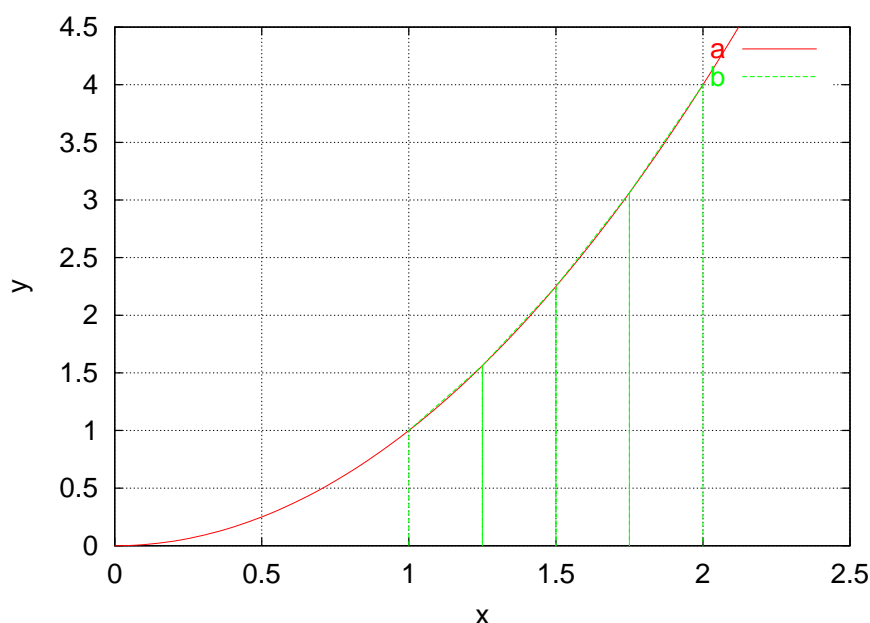
Bei der Einführung des bestimmten Integrals in Abschnitt 5.2 hatten wir bereits Näherungsverfahren zur Bestimmung bestimmter Integrale betrachtet. Die in den Abbildungen 5.1 und 5.2 darge-

stellten Näherungen entsprechen der *Rechteckregel* zur numerischen Integration der Funktion  $f$  im Intervall  $[a, b]$ . Die Näherung

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} [f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})]$$

ist äquivalent zu der in Abschnitt 5.2 eingeführten Untersumme  $A_n^u$ . Zur Berechnung der rechten Seite muss die Funktion  $f$  an den Stützstellen  $x_0 = a, x_i = i \frac{b-a}{n}, i = 1, \dots, n-1$ , bestimmt werden.

Die Güte der Approximation lässt sich weiter verbessern, wenn wie in Abbildung 5.5 an Stelle von Rechtecken Trapeze verwendet werden.



**Abbildung 5.5:** (a) Die Funktion  $f(x) = x^2$  und (b) die Approximation der Fläche  $A$  durch die Summe der Trapezflächen für  $n = 4$ .

Bei der Anwendung der *Tangentenregel*

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{2(b-a)}{n} [f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + \dots + f(x_{n-1})]$$

wird nicht nur eine im Vergleich zur Rechteckregel höhere Genauigkeit bei gleicher Anzahl von Stützstellen erreicht, die Funktion  $f$  muss darüber hinaus nur an jeder zweiten Stützstelle  $x_1, x_3, x_5, \dots, x_{n-1}$  berechnet werden, wobei  $n$  eine gerade Zahl ist.

Eine weitere Verbesserung der Approximation wird durch die *Simpson-Regel* erreicht,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3n} [f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(b)]$$

für geradzahliges  $n$ .

Die *Keplersche Fassregel* ist ein Spezialfall der Simpson-Regel. Für  $n = 2$  erhält man die häufig verwendete Näherung

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(x_1) + f(b)),$$

wobei  $x_1 = (a+b)/2$  ist.

### Beispiele

(i)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx \approx \frac{\pi}{6} (0 + 4 \cdot 1 + 0) = \frac{2\pi}{3} = 2,094\dots$$

(ii)

$$\int_1^3 \Gamma(x) dx \approx \frac{2}{6} (0! + 4 \cdot 1! + 2!) = \frac{7}{3} = 2,33\bar{3}$$

## 5.6 Fourier-Reihen

### 5.6.1 Einführung

Ähnlich wie die Differentialrechnung ist auch die Integralrechnung eine Grundlage zur Entwicklung einer Funktion in eine Reihe. Die Motivation dafür kommt unter anderem aus der Signalanalyse. Die Funktion

$$f(x) = h \sin(\omega x + \varphi)$$

mit der Periodenlänge  $a = \frac{2\pi}{\omega}$  kann als eine harmonische Schwingung (oder ein harmonisches Signal) aufgefasst werden, wobei in der Terminologie der Physik  $h$  die *Amplitude*,  $\varphi$  die *Phasenverschiebung* und  $\omega$  die *Kreisfrequenz* bezeichnen. Wendet man das Additionstheorem für den Sinus an,

$$f(x) = h(\sin \omega x \cdot \cos \varphi + \cos \omega x \cdot \sin \varphi),$$

erkennt man, dass sich die Phasenverschiebung  $\varphi$  als konstante Faktoren in den Amplituden der beiden harmonischen Funktionen  $\sin \omega x$  und  $\cos \omega x$  ausdrücken lassen. Man erhält

$$f(x) = a \sin \omega x + b \cos \omega x$$

mit  $a = h \cos \varphi$  und  $b = h \sin \varphi$ . Umgekehrt können die Amplitude  $h$  und die Phasenverschiebung  $\varphi$  aus den Koeffizienten  $a$  und  $b$  erhalten werden,

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{b}{a}.$$

Überlagert (moduliert) man zwei harmonische Schwingungen mit der gleichen Frequenz (also mit der gleichen Periodenlänge),

$$f_1(x) = h_1 \sin(\omega x + \varphi_1), \quad f_2(x) = h_2 \sin(\omega x + \varphi_2),$$

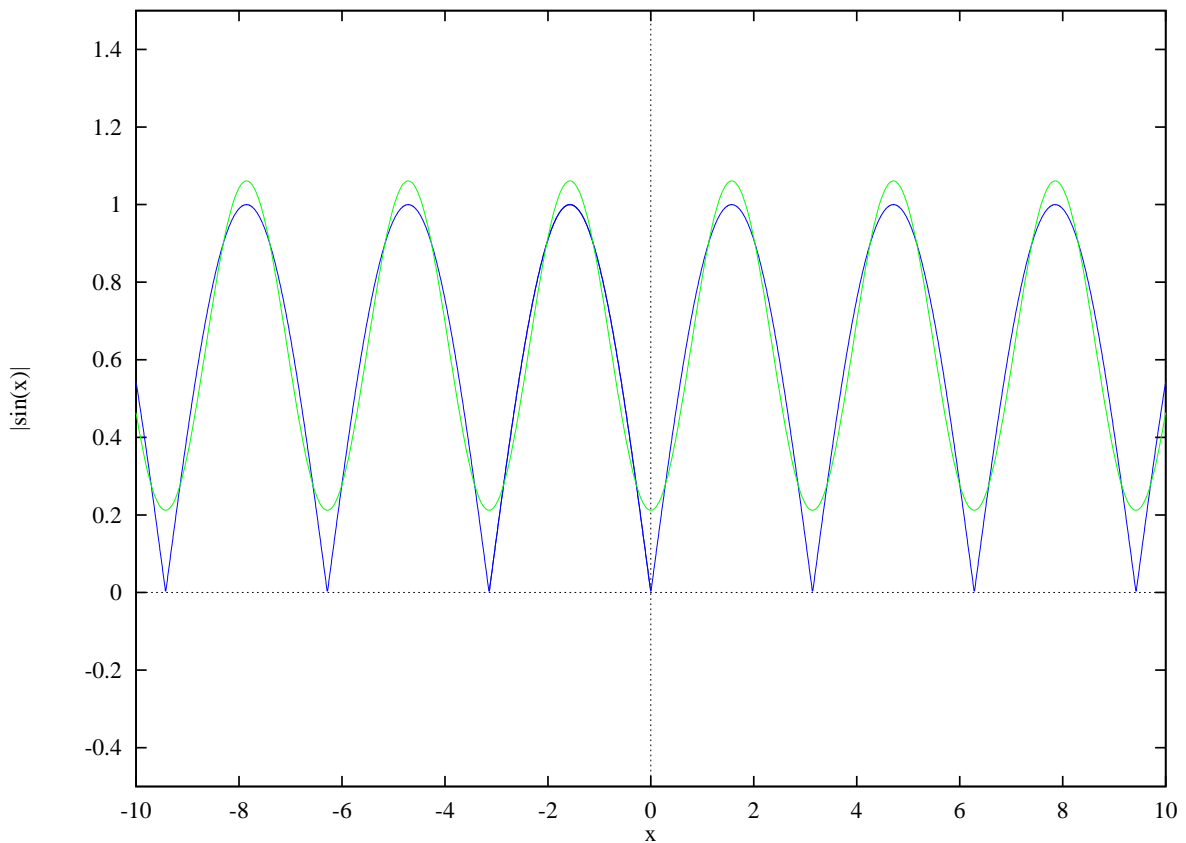
erhält man eine harmonische Schwingung  $g$  mit der gleichen Periodenlänge,

$$\begin{aligned} g(x) &:= f_1(x) + f_2(x) \\ &= h_1 \sin(\omega x + \varphi_1) + h_2 \sin(\omega x + \varphi_2) \\ &= (a_1 + a_2) \sin \omega x + (b_1 + b_2) \cos \omega x \\ &= a \sin \omega x + b \cos \omega x \\ &= h \sin(\omega x + \varphi), \end{aligned}$$

wobei

$$h = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}, \quad \varphi = \frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2}$$

ist. Die Funktion  $g$  hat also die gleiche Gestalt wie  $f$ .



**Abbildung 5.6:** „Gleichgerichtete“ Sinuskurve (Zweiweggleichrichtung). Dargestellt sind die Funktion  $|\sin x|$  (blau) und die Partialsumme  $s_1(x) = 2/\pi - 4/3\pi \cos 2x$  (grün) ihrer Fourier-Reihe.

Überlagert man schließlich harmonische Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen,

$$\tilde{f}_1(x) = h_1 \sin(\omega_1 x + \varphi_1), \quad \tilde{f}_2(x) = h_2 \sin(\omega_2 x + \varphi_2),$$

erhält man dagegen eine harmonische Schwingung

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x) &:= \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_2(x) \\ &= h_1 \sin(\omega_1 x + \varphi_1) + h_2 \sin(\omega_2 x + \varphi_2) \\ &= a_1 \sin \omega_1 x + b_1 \cos \omega_1 x + a_2 \sin \omega_2 x + b_2 \cos \omega_2 x, \end{aligned}$$

die sich nicht in der gleichen Form wie  $f$  darstellen lässt. Offensichtlich hat  $\tilde{g}$  eine andere Form. Die Koeffizienten  $a_1, a_2, b_1, b_2$  sind charakteristisch für die Schwingung  $\tilde{g}$ , sie „charakterisieren“  $\tilde{g}$ . Die Bestimmung der charakteristischen Koeffizienten einer periodischen Schwingung (oder eines periodischen Signals) kann somit der Signalanalyse dienen. Jeder periodische Vorgang (oder Prozess)  $\tilde{g}$  lässt sich als Überlagerung von harmonischen Schwingungen darstellen, wobei neben der Grundfrequenz  $\omega$  von  $\tilde{g}$  nur ganzzahlige Vielfache von  $\omega$  auftreten.

Umgekehrt können durch Modulation von Funktionen des einfachen Typs  $f$  kompliziertere harmonische Signale generiert werden, siehe z. B. Abbildung 5.6. Daraus ergeben sich auch eine Reihe

bildanalytischer Anwendungen und mathematischer Fragestellungen. Unter welchen Bedingungen kann eine Funktion  $\tilde{g}$  durch Modulation von Funktionen des Typs  $f$  dargestellt werden?

### 5.6.2 Die Fourier-Koeffizienten einer Funktion

In diesem Abschnitt wird im allgemeinen (zur Vereinfachung der Darstellung) angenommen, dass die Funktionen  $f(x), g(x), \dots$  reell-wertig und integrierbar<sup>3</sup> sind und die Periode  $2\pi$  haben.

Die Menge der Funktionen

$$1/\sqrt{2\pi}, \cos x/\sqrt{\pi}, \sin x/\sqrt{\pi}, \dots, \cos kx/\sqrt{\pi}, \sin kx/\sqrt{\pi}, \dots$$

wird *trigonometrisches System* genannt. Diese Menge bildet ein orthonormales System<sup>4</sup> auf dem Intervall  $(-\pi, \pi)$ . Sei  $f(x)$  integrierbar in  $(-\pi, \pi)$ . Wir setzen

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.2)$$

und nennen  $a_k, b_k$  die *Fourier-Koeffizienten* von  $f$ . Die formale Reihe

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (5.3)$$

wird *Fourier-Reihe* von  $f$  genannt und häufig mit  $\mathfrak{S}(f)$  bezeichnet. Einige Beispiele für Fourier-Reihen sind in den Tabellen 5.2 und 5.3 enthalten. Weitere Fourier-Reihen sind in vielen mathematischen Formelsammlungen tabelliert.

Wir schreiben  $f(x) \sim \mathfrak{S}(f)$  oder

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

um anzuzeigen, dass die formale Reihe  $\mathfrak{S}(f)$  eine Fourier-Reihe von  $f$  ist. Das Zeichen  $\sim$  soll bedeuten, dass die Koeffizienten  $a_k, b_k$  durch Formel (5.2) von  $f$  abhängig sind; „ $\sim$ “ soll nicht implizieren, dass die Reihe konvergent ist oder gar gegen  $f$  konvergiert. Abbildung 5.7 zeigt ein Beispiel einer nicht konvergenten Reihe<sup>5</sup>.

Im allgemeinen haben trigonometrische Reihen die Form (5.3), wobei  $a_k, b_k$  beliebige reell-wertige Zahlen sind. Da trigonometrische Funktionen die Periode  $2\pi$  haben, werden die betrachteten Funktionen durch die Bedingung

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

<sup>3</sup>Die Integrale bzgl. des Lebesgue-Maßes auf  $(-\pi, \pi)$  sind endlich.

<sup>4</sup>Ein System  $\{f_1, f_2, \dots\}$  heißt orthonormal auf  $(-\pi, \pi]$ , wenn  $\int_{-\pi}^{\pi} f_i(x)f_j(x)dx = 0$  für  $i \neq j$  und  $\int_{-\pi}^{\pi} f_i^2(x)dx = 1$ ,  $i, j = 1, 2, \dots$

<sup>5</sup>Die Fourier-Reihe  $\mathfrak{S}(\cot)$  ist jedoch summierbar z. B. in der in Abschnitt ?? beschriebenen Weise.

$f(x)$	$a_0$	$a_k \ (k = 1, 2, \dots)$	$b_k \ (k = 1, 2, \dots)$	
1	1	0	$[1 + (-1)^{k+1}] \frac{2a}{k\pi}$	
$x$	$\frac{a}{2}$	$[1 + (-1)^{k+1}] \frac{-2a}{k^2\pi^2}$	$(-1)^{k+1} \frac{2a}{k\pi}$	
$x^2$	$\frac{a^3}{3}$	$(-1)^k \frac{4a^2}{k^2\pi^2}$	$\frac{(-1)^{k-1} 2a^2}{k\pi} - [1 + (-1)^{k+1}] \frac{4a^2}{k^3\pi^3}$	
$e^{bx}$	$\frac{e^b x - 1}{ab}$	$\frac{2ab[(-1)^k e^{ab} - 1]}{a^2 b^2 + k^2 \pi^2}$	$\frac{2k\pi[1 - (-1)^k] e^{ab}}{a^2 b^2 + k^2 \pi^2}$	
$\cos \frac{\mu\pi x}{a}$	$\frac{\sin \mu\pi}{\mu\pi}$	$(-1)^k \frac{2}{\pi} \frac{\mu \sin \mu\pi}{\mu^2 - k^2}$	$\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k \cos \mu\pi - 1}{\mu^2 - k^2}$	$\mu \neq 0, \pm 1, \dots$
$\sin \frac{\mu\pi x}{a}$	$\frac{1 - \cos \mu\pi}{\mu\pi}$	$\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k \cos \mu\pi - 1}{\mu^2 - k^2}$	$(-1)^k \frac{2}{\pi} \frac{\mu \sin \mu\pi}{\mu^2 - k^2}$	$\mu \neq 0, \pm 1, \dots$
$\frac{1 - \lambda^2}{1 - 2\lambda \cos(\pi x/a) + \lambda^2}$	1	$2\lambda^k$		$ \lambda  < 1$
$\frac{\lambda \sin(\pi x/a)}{1 - 2\lambda \cos(\pi x/a) + \lambda^2}$			$\lambda^k$	$ \lambda  < 1$
$\log \sin(\pi x/2a)$	$-\log 2$	$-1/k$		
$\cot \frac{\pi x}{2a}$			2	

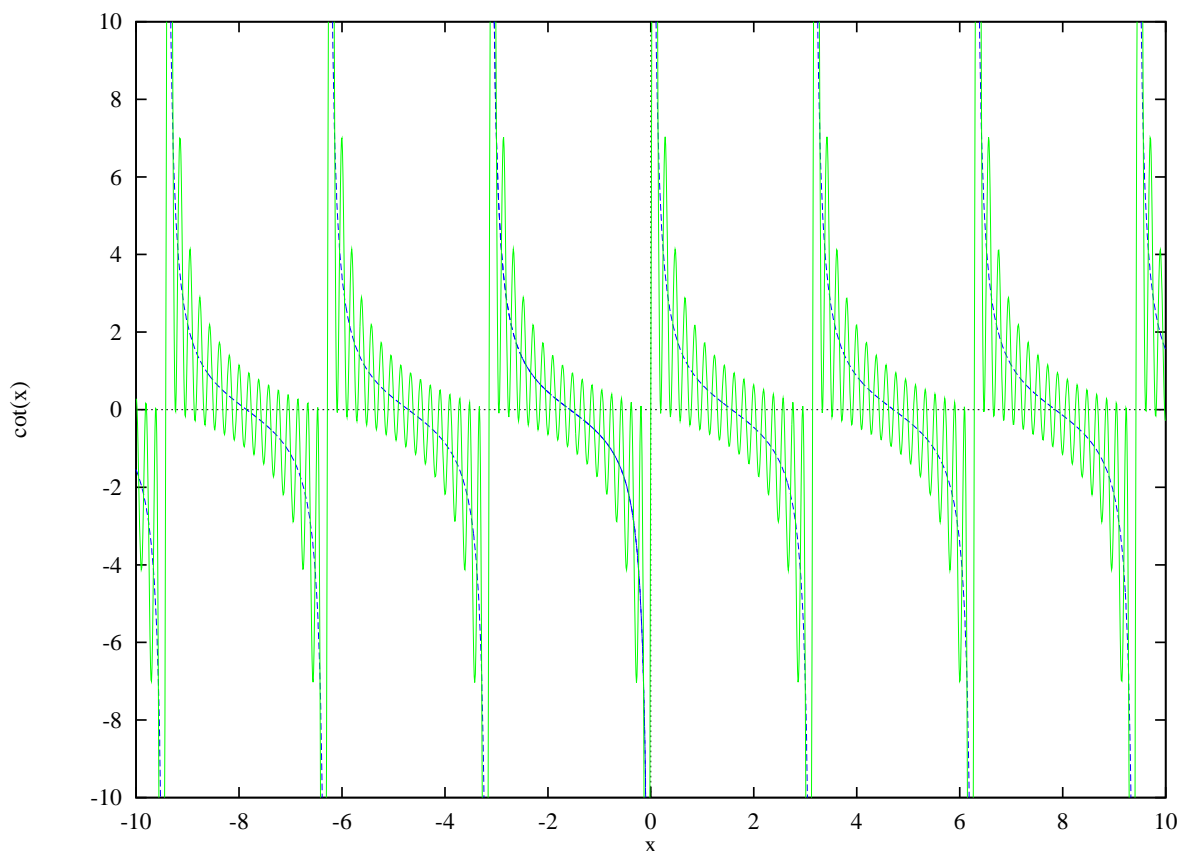
**Tabelle 5.2:** Tabelle der Fourier-Koeffizienten für eine Auswahl von Funktionen mit der Periode  $2a$ , wobei  $f(x)$  je nach Definitionsbereich im Intervall  $[-a, a)$  oder  $[0, 2a)$  angegeben ist.

$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = f(x)$	$-\pi < x < \pi$
$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos kx}{k} = \log \left( 2 \cos \frac{x}{2} \right)$	$-\pi < x < \pi$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{1}{2}(\pi - x)$	$0 < x < 2\pi$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x \cos(2k-1)}{2k-1} = \frac{1}{2} \log \left  \cot \frac{x}{2} \right $	$0 < x < 2\pi, \ x \neq \pi$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x \sin(2k-1)}{2k-1} = \begin{cases} \pi/4, & 0 < x < \pi \\ -\pi/4, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$	$0 < x < 2\pi$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \frac{1}{4}(x - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{12}$	$0 < x < 2\pi$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2} = -x \log 2 - \int_0^x \log \left( \sin \frac{t}{2} \right) dt$	$0 < x < 2\pi$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \cos kx = e^{a \cos x} \cos(a \sin x) - 1$	$-\pi < x < \pi, \ a < 0$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \sin kx = e^{a \cos x} \sin(a \sin x)$	$-\pi < x < \pi, \ a < 0$
$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{k \cos kx}{k^2 - a^2} = \frac{\pi \cos ax}{2a \sin a\pi} - \frac{1}{2a^2}$	$-\pi < x < \pi, \ a \neq 0, \pm 1, \dots$
$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{k \sin kx}{k^2 - a^2} = \frac{\pi \sin ax}{2 \sin a\pi}$	$-\pi < x < \pi, \ a \neq 0, \pm 1, \dots$

**Tabelle 5.3:** Die Funktion  $f(x)$  für einige konvergente trigonometrische Reihen.

für alle reell-wertigen Argumente  $x$  periodisch fortgesetzt.

Die Untersuchung der Eigenschaften der Reihe  $\mathfrak{S}(f)$  und die Darstellung von  $f$  durch  $\mathfrak{S}(f)$  sind der Hauptgegenstand der Theorie der Fourier-Reihen.



**Abbildung 5.7:** Die Funktion  $\cot x$  (blau) und die Partialsumme  $s_{16}$  (grün) ihrer Fourier-Reihe  $\mathfrak{S}(\cot)$ . Diese Fourier-Reihe ist nicht konvergent, d. h.  $\cot x \neq \mathfrak{S}(\cot)$ .

### Gerade und ungerade Funktionen

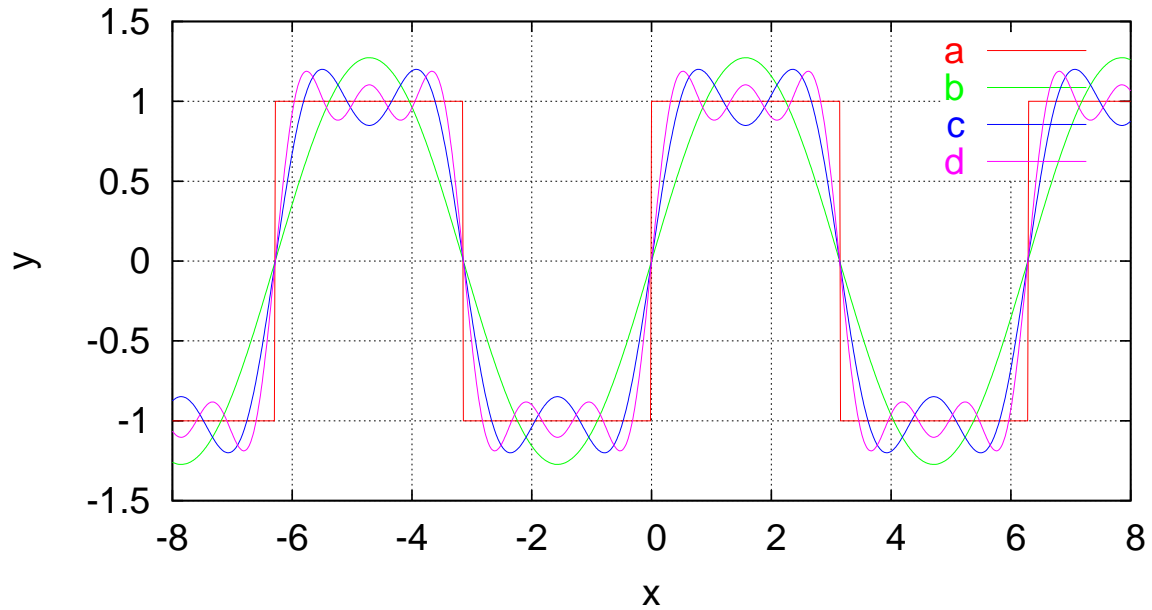
- (i) Ist die Funktion  $f(x)$  gerade,  $f(x) = f(-x)$ , dann sind alle Koeffizienten  $b_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , gleich Null. Es gilt

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx.$$

- (ii) Ist die Funktion  $f(x)$  ungerade,  $f(x) = -f(-x)$ , dann sind alle Koeffizienten  $a_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , gleich Null. Es gilt

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

### Beispiele



**Abbildung 5.8:** (a) die Funktion  $f$  („Rechteckkurve“), (b)  $s_1(x) = \frac{4 \sin x}{\pi}$ , (c)  $s_3(x) = \frac{4 \sin x}{\pi} + \frac{4 \sin 3x}{3\pi}$ , (d)  $s_5(x) = \frac{4 \sin x}{\pi} + \frac{4 \sin 3x}{3\pi} + \frac{4 \sin 5x}{5\pi}$ .

- (i) Wir verwenden die Notation  $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$  und betrachten die periodische Funktion

$$f(x) = (-1)^{\lfloor x/\pi \rfloor}, \quad \text{„Rechteckkurve“},$$

siehe Abbildung 5.8. Diese Funktion ist ungerade, d. h., es müssen nur die Koeffizienten  $b_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , berechnet werden,

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cdot \sin kt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin kt \, dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \left( \frac{-\cos kt}{k} \right) \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left( \frac{-\cos kt}{k} \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{k\pi} (\cos 0 - \cos k\pi) - \frac{1}{k\pi} (\cos k\pi - \cos 0) \\ &= \frac{2 - 2 \cos k\pi}{k\pi} \\ &= \begin{cases} \frac{4}{k\pi}, & k = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & k = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Hieraus folgt

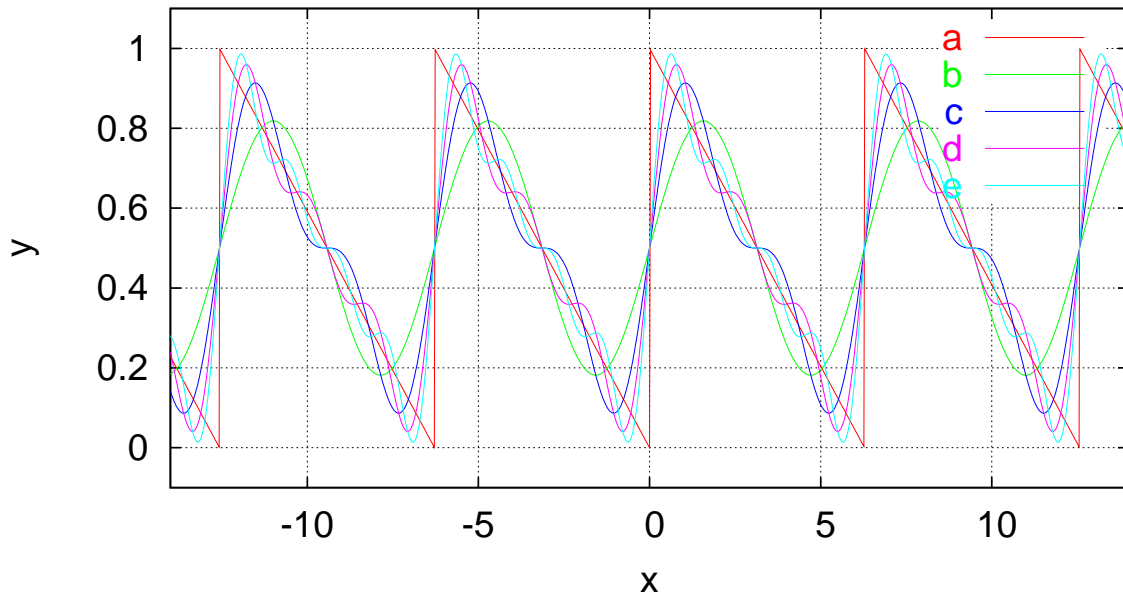
$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{4}{\pi} \sin x + \frac{4}{3\pi} \sin 3x + \frac{4}{5\pi} \sin 5x + \dots \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}. \end{aligned}$$

(ii) Die Funktion

$$f(x) = \left[ \frac{x}{2\pi} \right] - \frac{x}{2\pi}, \quad \text{„Sägezahnkurve“ (fallend),}$$

mit  $[x] = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}$  ist nicht symmetrisch (weder gerade noch ungerade), siehe auch Abbildung 5.9. Folglich müssen alle Fourier-Koeffizienten berechnet werden,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{t}{2\pi}\right) dt = \frac{1}{\pi} \left(t - \frac{t^2}{4\pi}\right) \Big|_0^{2\pi} = 1, \\ \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{t}{2\pi}\right) \cos kt dt, \quad k = 1, 2, \dots \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos kt dt - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} t \cos kt dt \\ &= \frac{1}{k\pi} \int_0^{2\pi k} \cos t dt - \frac{1}{2\pi^2 k^2} \int_0^{2\pi k} t \cos t dt \\ &= \frac{1}{k\pi} \sin t \Big|_0^{2\pi k} - \frac{1}{2\pi^2 k^2} \left[ (t \sin t) \Big|_0^{2\pi k} - \int_0^{2\pi k} \sin t dt \right] \\ &= (0 - 0) - \frac{1}{2\pi^2 k^2} \left[ 0 - (-\cos t) \Big|_0^{2\pi k} \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi^2 k^2} [0 - (-1 - (-1))] \\ &= 0, \end{aligned}$$



**Abbildung 5.9:** (a) die Funktion  $f$  („Sägezahnkurve“, fallend), (b)  $s_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin x}{\pi}$ , (c)  $s_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin x}{\pi} + \frac{\sin 2x}{2\pi}$ , (d)  $s_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin x}{\pi} + \frac{\sin 2x}{2\pi} + \frac{\sin 3x}{3\pi}$ , (e)  $s_4(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin x}{\pi} + \frac{\sin 2x}{2\pi} + \frac{\sin 3x}{3\pi} + \frac{\sin 4x}{4\pi}$ .

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{t}{2\pi}\right) \sin kt \, dt, & k = 1, 2, \dots \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin kt \, dt - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} t \sin t \, dt \\
 &= \frac{1}{k\pi} (-\cos t) \Big|_0^{2\pi k} - \frac{1}{2\pi^2 k^2} \left[ (t(-\cos t)) \Big|_0^{2\pi k} - \int_0^{2\pi k} (-\cos t) \, dt \right] \\
 &= 0 - \frac{1}{2\pi^2 k^2} \left[ (-2\pi k) + (-\sin t) \Big|_0^{2\pi k} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi k}.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt schließlich

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{\sin x}{\pi} + \frac{\sin 2x}{2\pi} + \frac{\sin 3x}{3\pi} + \dots = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k\pi}.$$

### 5.6.3 Komplexe Darstellung

Wenn man  $2c_k = a_k - ib_k$  und  $c_{-k} = \bar{c}_k$  setzt, erhält man wegen  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  die Darstellung

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Dann ist die Reihe  $\mathfrak{S}(f)$  durch die *komplexe Form*  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$  repräsentiert,

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

wobei  $\{e^{ikx}\}_{k=0, \pm 1, \dots}$  ein Orthogonalsystem auf  $(-\pi, \pi]$  ist.

Offensichtlich ist

$$a_k = c_k + \bar{c}_k, \quad b_k = i(c_k - \bar{c}_k).$$

Diese Formeln können zur Umrechnung der exponentiellen in die trigonometrische Form verwendet werden.

#### Bemerkungen:

- (i) Der Koeffizient  $c_0$  entspricht dem Mittelwert von  $f$ ,  $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ .
- (ii) Umgekehrt entspricht  $f(0)$  der Summe der  $c_k$ ,  $f(0) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k$ .
- (iii) Ist  $f(x)$  gerade, dann sind alle Koeffizienten  $c_k$  reellwertig, d. h.  $\text{Im}(c_k) = 0$ , und folglich gilt die Symmetrieeigenschaft  $c_k = c_{-k}$ .
- (iv) Ist  $f(x)$  ungerade, dann ist  $\text{Re}(c_k) = 0$ , und es gilt die Symmetrieeigenschaft  $c_k = -c_{-k}$ .
- (v) Ist die Funktion  $f(x)$  eine komplexwertige Funktion (wie z. B.  $f(x) = \sqrt{x}$ ), dann ist in der Regel  $c_k \neq \bar{c}_k$ . Für alle reellwertigen Funktionen  $f(x)$  gilt aber stets  $c_k = \bar{c}_k$ .

In einigen Fällen ist es naheliegend, die Fourier-Koeffizienten in ihrer komplexen Darstellung zu berechnen; der Rechenaufwand kann wesentlich geringer sein als bei Verwendung der trigonometrischen Form. Dazu noch ein Beispiel:

*Beispiel:* Gegeben sei die Funktion  $f$  durch

$$f(x) = \exp \left\{ \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor - \frac{x}{2\pi} \right\},$$

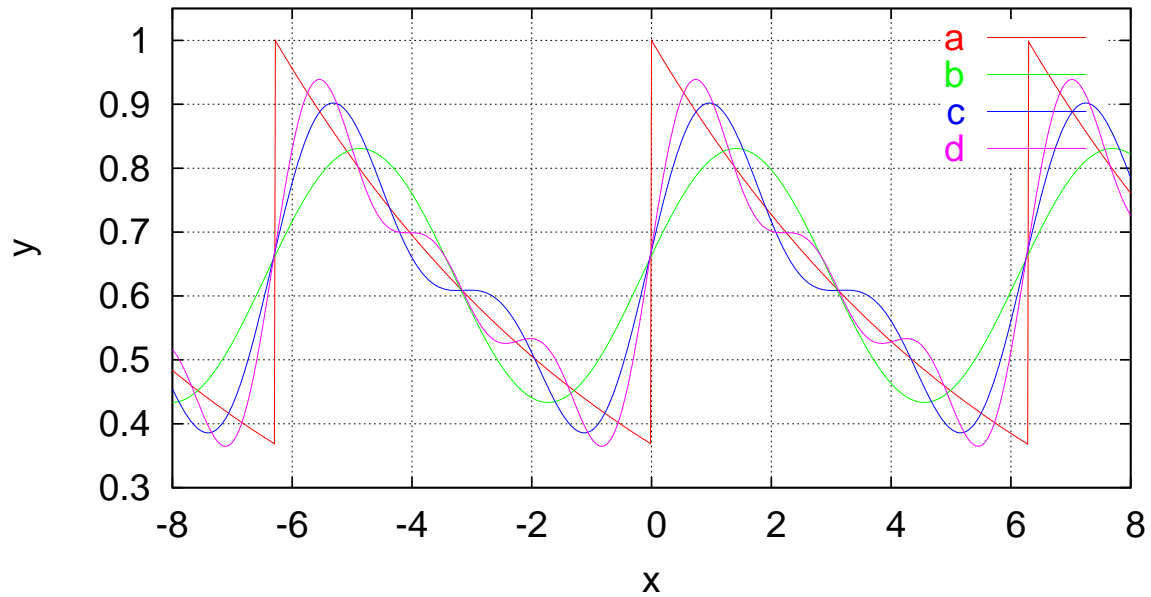


Abbildung 5.10: (a)  $f(x)$ , (b)  $s_1(x)$ , (c)  $s_2(x)$ , (d)  $s_3(x)$ , (e)  $s_4(x)$ .

siehe Abbildung 5.10. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-t/2\pi} e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-(1/2\pi + ik)t} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{-(1/2\pi + ik)t}}{-(1/2\pi + ik)} \Big|_0^{2\pi} \\
 &= -\frac{1}{1 + 2\pi ik} \left( e^{-(1+2\pi ik)} - e^0 \right) = -\frac{1}{1 + 2\pi ik} \left( e^{-1} e^{-2\pi ik} - 1 \right).
 \end{aligned}$$

Wegen  $e^{-2\pi ik} = \cos(-2\pi k) + i \sin(-2\pi k) = 1$  für  $k \in \mathbb{Z}$  folgt daraus

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1 - e^{-1}}{1 + 2\pi ik}, \\
 a_k &= \frac{1 - e^{-1}}{1 + 2\pi ik} + \frac{1 - e^{-1}}{1 - 2\pi ik} = \frac{2(1 - e^{-1})}{1 + 4\pi^2 k^2}, \\
 b_k &= i \left( \frac{1 - e^{-1}}{1 + 2\pi ik} - \frac{1 - e^{-1}}{1 - 2\pi ik} \right) = \frac{4\pi k(1 - e^{-1})}{1 + 4\pi^2 k^2}
 \end{aligned}$$

und

$$f(x) \sim \left(1 - \frac{1}{e}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1 + 2\pi ik} = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cos kx + 4\pi k \sin kx}{1 + 4\pi^2 k^2}\right].$$

# Kapitel 6

## Differentialrechnung für reelle Funktionen mit mehreren Veränderlichen

### 6.1 Definition und Darstellungsform

*Definition.* Unter einer Funktion  $f$  von  $n$  Variablen,  $n \geq 1$ , versteht man eine Vorschrift, die jedem  $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n) \in D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$  genau eine reelle Zahl  $y \in W(f) \subseteq \mathbb{R}$  zuordnet. (Dabei bezeichnen  $D(f)$  und  $W(f)$  den Definitions- bzw. Wertebereich von  $f$ .)

Schreibweise:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\mapsto \mathbb{R} \\ y &= f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Reelle Funktionen mit mehreren Veränderlichen sind häufig in impliziter Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{oder} \quad f(x_1, \dots, x_n) = c$$

gegeben, wobei  $c$  eine Konstante ist.

#### Beispiele

- (i)  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,
- (ii)  $2x - 8y + 5y + 3 = 0$ ,
- (iii)  $x^3 + 2xy^2 + y^3 = 0$ .

#### Anwendungen

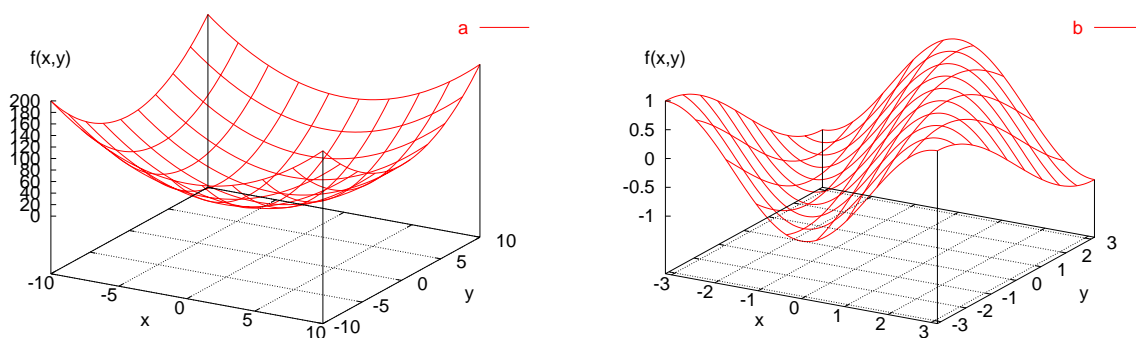
- (i) Reihenschaltung, Widerstand  $R = R_1 + \dots + R_n$ ,  $R(R_1, \dots, R_n)$ ,

(ii) Temperatur, als Funktion von Ort  $(x, y, z)$  und Zeit  $t$

$$T = T(x, y, z, t),$$

(iii) Grauwertbild, Pixelwert  $g$  als Funktion der Pixelkoordinaten  $(x, y)$ ,  $g = g(x, y)$ .

Der Graph einer reellen Funktionen mit mehreren Veränderlichen ist unter anderem für  $n = 2$  als Fläche im Raum darstellbar, d. h. als Fläche über dem Definitionsbereich von  $f$ , wobei der Funktionswert  $f(x, y)$  als „Höhe“ der Fläche über dem Punkt  $(x, y) \in D(f)$  interpretiert wird. So ist der Graph der Funktion  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  die Mantelfläche eines (geraden) Kreiskegels, und der Graph von  $f(x, y) = x^2 + y^2$  ist die Mantelfläche eines Rotationsparaboloids, siehe z. B. Abbildung 6.1a.



**Abbildung 6.1:** Die Funktion (a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  und (b)  $f(x, y) = \sin(x + y/2)$ .

Die implizit gegebenen Funktionen

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

beschreiben die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius  $r > 0$  bzw. die Oberfläche eines Ellipsoids mit den Halbachsenlängen  $a, b, c > 0$ .

## Grenzwert und Stetigkeit

*Definition.* Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  heißt stetig im Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , wenn für beliebige Folgen  $\{x_k\}$  mit  $x_k \in \mathbb{R}^n$  aus den Definitionsbereich von  $f$ ,  $\{x_k\} \subset D(f)$ , und  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$  ein gemeinsamer Grenzwert  $g$  existiert, der mit dem Funktionswert  $f(x_0)$  übereinstimmt,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = g = f(x_0),$$

(d. h.,  $g$  ist unabhängig von der Richtung, aus der wir uns dem Punkt  $x_0$  nähern).

Schreibweise  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ .

*Bemerkung.* Diese Definition ist vor allem für „Negativaussagen“ nützlich, also zum Nachweis, dass  $f$  an der Stelle  $x_0$  nicht stetig ist.

*Beispiel.* Gegeben sei eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  durch

$$f(x, y) = \frac{x}{y}.$$

Diese Funktion ist für alle auf der x-Achse liegenden Punkte  $(x, 0)$  nicht stetig, somit also auch für den Koordinatenursprung  $(0, 0)$ . So konvergieren die Folgen

$$\begin{aligned} \{(x_k, y_k)\} &:= \left\{ \left( 0, \frac{1}{k} \right) \right\}, & \text{(Annäherung auf der y-Achse)} \\ \{(x_k, y_k)\} &:= \left\{ \left( \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \right\}, & \text{(Annäherung auf der Geraden } y = x \text{)} \end{aligned}$$

beide gegen den Koordinatenursprung  $(0, 0)$ , die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f \left( 0, \frac{1}{k} \right) &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} f \left( \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) &= 1 \end{aligned}$$

sind voneinander verschieden. Es existiert also kein gemeinsamer Grenzwert an der Stelle  $(x, y) = (0, 0)$ . Analog kann man zeigen, dass auch die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$  für  $x \neq 0$  nicht existieren.

## 6.2 Partielle Differentiation

Es seien  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  eine reellwertige Funktion mit zwei Veränderlichen und  $x_0, y_0$  reelle Zahlen. Der Schnitt

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = y_0\}$$

des Graphen der Funktion  $f(x, y)$  mit der durch die lineare Gleichung  $y = y_0$  beschriebenen Ebene kann als Graph einer Funktion  $g(x) := f(x, y_0)$  aufgefasst werden. Für die erste Ableitung  $g'$  von  $g$  an der Stelle  $x = x_0$  gilt

$$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Analog erhält man für die erste Ableitung  $h'$  der Funktion  $h(y) := f(x_0, y)$  an der Stelle  $y = y_0$

$$h'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{h(y) - h(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Schreibweisen

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0), \\ \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta) - f(x_0, y_0)}{\Delta} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0).\end{aligned}$$

*Definition.* Gegeben sei eine reellwertige Funktion  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ . Der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n) := \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\Delta}$$

heisst *partielle Ableitung 1. Ordnung* der Funktion  $f$  nach  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

### Bemerkungen

- (i) Bei Bezeichnungen von Ableitungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher muss stets die Variable kenntlich gemacht werden, nach der abgeleitet wird, z. B.  $f_z(x, y, z)$ ,  $f'(x, t)$ ,  $\dot{f}(x, t)$ , ...
- (ii) Alle partiellen Ableitungen von  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  können als Funktionen aufgefasst werden,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, n.$$

- (iii) Formal erhält man die partielle Ableitung einer Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  nach  $x_k$ , indem man alle Variablen  $x_1, \dots, x_{k-1}$  und  $x_{k+1}, \dots, x_n$  als Konstanten auffasst. Die Funktion  $f$  kann dann als eine Funktion mit einer Veränderlichen (der Veränderlichen  $x_k$ ) interpretiert werden, und es können die bekannten Ableitungsregeln angewandt werden.

### Beispiele

- (i)

$$\begin{aligned}f(x, y) &= 3x^3 + 2x^2y + \sin x \cdot e^y + \ln y + 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 9x^2 + 4xy + \cos x \cdot e^y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2x^2 + \sin x \cdot e^y + \frac{1}{y}\end{aligned}$$

(ii)

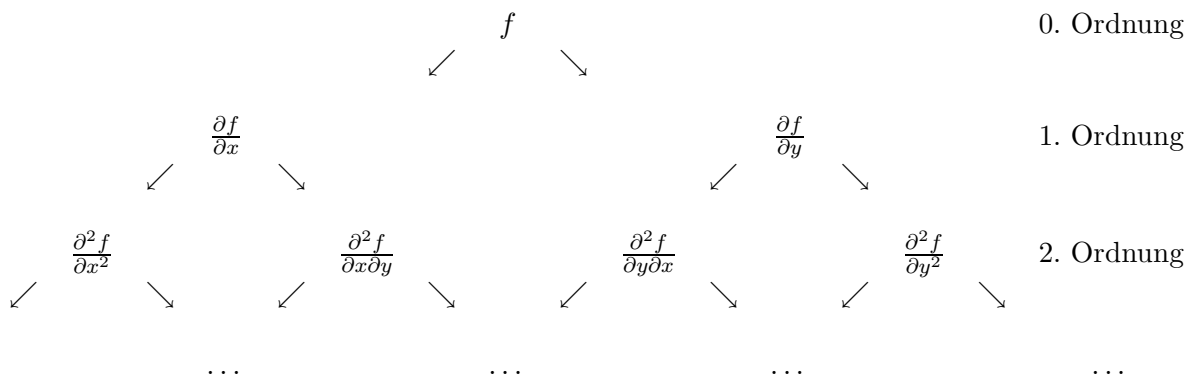
$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{yz\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - xyz \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} \\
 &= \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x^2yz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{xy^2z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \\
 \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{xyz^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}
 \end{aligned}$$

(iii) Die Zustandsgleichung des idealen Gases beschreibt den Zusammenhang zwischen Druck  $p$ , Temperatur  $T$  und Volumen  $V$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
 p(V, T) &= \frac{RT}{V}, & R\text{- Gaskonstante,} \\
 \frac{\partial p}{\partial V}(V, T) &= -\frac{RT}{V^2}, \\
 \frac{\partial p}{\partial T}(V, T) &= \frac{R}{V}.
 \end{aligned}$$

**Partielle Ableitungen h"oherer Ordnung**

*Beispiel.* Sei  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  eine rellwertige Funktion. Dann k"onnen die folgenden partiellen Ableitungen h"oherer Ordnung gebildet werden:



**Schreibweisen**

$$f_{xx}(x, y), \quad f_{xy}(x, y), \quad f_{yy}(x, y), \quad \ddot{f}(x, t), \quad \dot{f}'(x, t), \quad f''(x, t), \dots$$

**Beispiel**

$$f(x, y) = 3x^3 + 2x^2y + \sin x \cdot e^y + \ln y + 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 9x^2 + 4xy + \cos x \cdot e^y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2 + \sin x \cdot e^y + \frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 18x + 4y - \sin x \cdot e^y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4x + \cos x \cdot e^y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 4x + \cos x \cdot e^y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \sin x \cdot e^y - \frac{1}{y^2},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) = 18 - \cos x \cdot e^y, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) = 4 - \sin x \cdot e^y,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y) = 4 - \sin x \cdot e^y, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) = \cos x \cdot e^y,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x, y) = 4 - \sin x \cdot e^y, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x, y) = \cos x \cdot e^y,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x, y) = \cos x \cdot e^y, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) = \sin x \cdot e^y + \frac{2}{y^3}.$$

Dieses Beispiel zeigt, dass die Reihenfolge der Differentiation offenbar vertauschbar ist.

*Satz von Schwarz.* Bei einer partiellen Ableitung  $k$ -ter Ordnung kann die Reihenfolge der Differentiation vertauscht werden, wenn die partiellen Ableitungen stetige Funktionen sind. Speziell für Ableitungen 2. und 3. Ordnung gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

bzw.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}.$$

**Beispiel**

$$f(x, y) = \ln(x + y^2),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{x + y^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= -\frac{1}{(x+y^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{2}{x+y^2} - \frac{4y^2}{(x+y^2)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) &= \frac{2}{(x+y^2)^3}, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x, y) = \frac{2y}{(x+y^2)^3}, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x, y) = -\frac{2}{(x+y^2)^2} + \frac{8y^2}{(x+y^2)^3}, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) &= -\frac{12y}{(x+y^2)^2} + \frac{16y^3}{(x+y^2)^3}.\end{aligned}$$

## 6.3 Tangentialebenen und das totale Differential

### 6.3.1 Geometrische Betrachtungen

Wir beschränken uns in diesem Abschnitt zunächst auf den 2D-Fall, d. h.  $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ .

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion  $f(x, y)$  können geometrisch als Anstiege von Flächentangenten interpretiert werden,

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  – Anstieg der Flächentangente in x-Richtung im Punkt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  – Anstieg der Flächentangente in y-Richtung im Punkt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ,

Die Tangentialebene in  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  enthält alle Tangenten (in allen Richtungen); sie ist die Ebene, die von den Tangenten in x- und y-Richtung aufgespannt wird.

Sei  $g(x, y) = ax + by + c$  die Tangentialebene an die Funktion im Punkt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ . Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Wegen  $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = a$  und  $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = b$  folgt daraus  $c = f(x_0, y_0) - ax_0 - by_0$  und

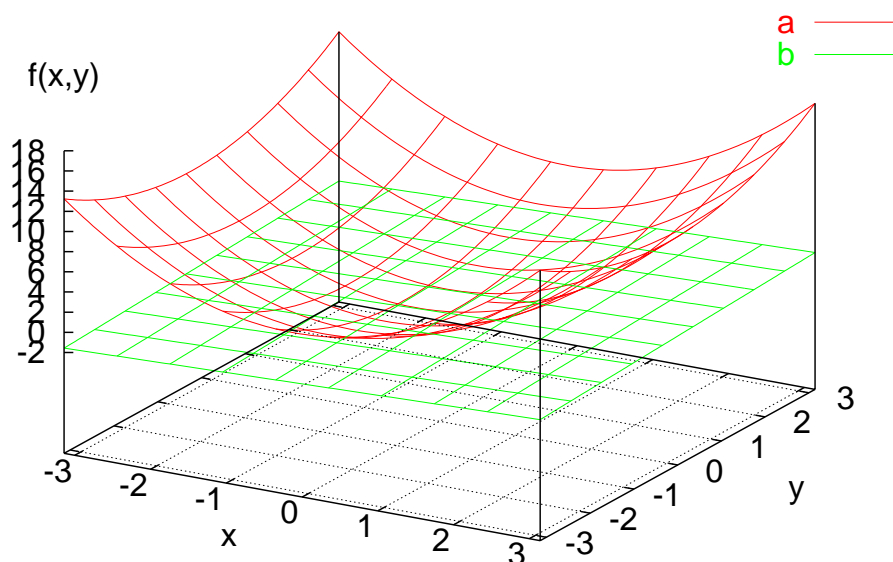
$$g(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y + f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y_0,$$

d. h.

Gleichung der Tangentialebene an die Funktion  $f(x, y)$  im Punkt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

$$g(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + f(x_0, y_0) \quad (6.1)$$

Abbildung 6.2 zeigt eine Funktion  $f$  mit ihrer Tangentialebene  $g$  im Punkt  $(0, 0, 0)$ .



**Abbildung 6.2:** Die Funktion (a)  $f(x, y) = \frac{x+y}{4} + x^2 + \frac{y^2}{2}$  und (b) ihre Tangentialebene  $g(x, y) = \frac{x+y}{4}$  im Punkt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (0, 0, 0)$ .

*Beispiel.* Zu berechnen ist die Gleichung der Tangentialebene  $g(x)$  der Funktion  $f(x) = x^2 + y^2$  im Punkt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (1, 1, 2)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x, & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= 2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y, & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= 2, \\ g(x, y) &= 2(x - 1) + 2(y - 1) + 2 \\ &= 2x + 2y - 2. \end{aligned}$$

### 6.3.2 Das totale Differential

Wir betrachten eine Verschiebung  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  des Punktes  $(x_0, y_0)$  um den Vektor  $(\Delta x, \Delta y)$ . Diese Verschiebung bewirkt eine Änderung

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

des Funktionswertes von  $f$ . In einer Umgebung von  $(x_0, y_0)$  wird die Funktion  $f$  durch die entsprechende Tangentialfläche  $g(x, y)$  angenähert. Die Änderung der Tangentialfläche beträgt

$$g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - g(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0),$$

wobei  $\Delta x = x - x_0$  und  $\Delta y = y - y_0$  ist. Für kleine Verschiebungen gilt

$$g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - g(x_0, y_0) \approx f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Ersetzen wir außerdem die Differenzen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  und  $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$  durch die Differentiale  $dx$ ,  $dy$  bzw.  $df$ , dann erhalten wir

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy.$$

Wegen der Stetigkeit von  $f$  gilt diese Gleichung nicht nur an der Stelle  $(x_0, y_0)$ , sondern im gesamten Definitionsbereich von  $f$ . Wir können also schreiben

$$df(x, y) := \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot dy.$$

*Definition.* Sei  $f(x_1, \dots, x_n)$  eine stetige reellwertige Funktion,  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ . Die Funktion

$$df(x_1, \dots, x_n) := \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \cdot dx_n$$

heisst *totales Differential* von  $f$ .

### Beispiele

(i) Wir betrachten noch einmal die Zustandsgleichung des idealen Gases,

$$p(V, T) = \frac{RT}{V},$$

siehe Seite 123. Das totale Differential

$$\begin{aligned} dp(V, T) &= \frac{\partial p}{\partial V} \cdot dV + \frac{\partial p}{\partial T} \cdot dT \\ &= -\frac{RT}{V^2} dV + \frac{R}{V} dT \end{aligned}$$

beschreibt die Änderung des Gasdrucks bei geringfügigen Volumen- und Temperaturänderungen  $dV$  bzw.  $dT$ .

- (ii) Wie ändert sich der Abstand  $r$  des Punktes  $P = (1; 2; 0)$  vom Koordinatenursprung, wenn er geringfügig verschoben wird,  $P' = (0, 9; 2, 2; -0, 1)$ . Der exakte Wert für die Abstandsdifferenz  $\Delta r$  beträgt

$$\Delta r = \sqrt{0,9^2 + 2,2^2 + (-0,1)^2} - \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = 0,144.$$

Mit Hilfe des totalen Differentials erhält man für  $x = 1$ ,  $y = 2$  und  $z = 0$

$$\begin{aligned} dr(x, y, z) &= \frac{\partial r}{\partial x}(x, y, z) \cdot dx + \frac{\partial r}{\partial y}(x, y, z) \cdot dy + \frac{\partial r}{\partial z}(x, y, z) \cdot dz \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot dy + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-0,1) + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 0,2 + \frac{0}{\sqrt{5}} \cdot (-0,1) \\ &= \frac{0,3}{\sqrt{5}} = 0,134, \end{aligned}$$

d. h., das totale Differential ist in diesem Fall eine gute Näherung für die Abstandsänderung.

## 6.4 Spezielle Ableitungstechniken

### 6.4.1 Differentiation nach einem Parameter (Kettenregel)

Sei  $f(x, y)$  eine Funktion, deren Variablen  $x$  und  $y$  von einem Parameter abhängig sind,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  mit  $t \in \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f$  entspricht also einer Funktion  $g$ , die von nur einer Variablen abhängig ist – dem Parameter  $t$ ,

$$g(t) := f(x(t), y(t)).$$

Es gilt

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(t)$$

oder in der Kurzschreibweise

$$\dot{g} = f_x \cdot \dot{x} + f_y \cdot \dot{y} \quad (\text{Kettenregel}).$$

*Beispiel.* Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = x^2 y + y^3 \quad \text{mit} \quad x(t) = t^2, \quad y(t) = e^t.$$

Auf direktem Wege erhält man

$$\begin{aligned} g(t) &:= f(x(t), y(t)) \\ &= t^4 \cdot e^t + (e^t)^3 \\ &= t^4 e^t + e^{3t}, \\ \frac{\partial g}{\partial t}(t) &= 4t^3 e^t + t^4 e^t + 3e^{3t}. \end{aligned}$$

Die Kettenregel liefert das gleiche Resultat,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2xy, & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^2 + 3y^2 \\ \frac{\partial x}{\partial t}(t) &= 2t, & \frac{\partial y}{\partial t}(t) &= e^t \\ \frac{\partial g}{\partial t}(t) &= 2xy \cdot 2t + (x^2 - 3y^2) \cdot e^t \\ &= 2t^2 \cdot e^t \cdot 2t + (t^4 + 3e^{2t}) \cdot e^t \\ &= (4t^3 + t^4 + 3e^{2t}) e^t.\end{aligned}$$

*Bemerkung.* Die Kettenregel ist auf Funktionen mit mehr als zwei Argumenten übertragbar.

### 6.4.2 Implizite Differentiation

Gegeben sei eine Funktion  $f(x, y)$  in impliziter Form,

$$f(x, y) = 0.$$

Der Graph dieser Funktion ist eine Kurve im  $\mathbb{R}^2$ . Der Anstieg  $y'$  dieser Kurve in einem Kurvenpunkt  $(x_0, y_0)$  ist gegeben durch

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

oder in der Kurzschreibweise

$$y' = -\frac{f_x}{f_y} \quad (\text{implizite Differentiation}).$$

*Beispiel.* Der Graph der impliziten Funktion

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

entspricht dem Rand einer Ellipse mit den Halbachsenlängen  $a$  und  $b$ . Der Punkt

$$(x_0, y_0) = \left( \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}} \right)$$

ist Randpunkt,  $f(x_0, y_0) = 1$ . Der Anstieg  $y'$  in  $(x_0, y_0)$  errechnet sich aus

$$\begin{aligned}y'(x, y) &= -\frac{\frac{2}{a^2}x}{\frac{2}{b^2}y} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \\ y'(x_0, y_0) &= -\frac{b^2 \frac{a}{\sqrt{2}}}{a^2 \frac{b}{\sqrt{2}}} = -\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

*Bemerkung.* Der Anstieg  $y'$  im Punkt  $(x_0, y_0)$  ist scheinbar abhängig von zwei Variablen – von  $x_0$  und  $y_0$ . Man beachte jedoch, dass  $x_0$  und  $y_0$  nicht unabhängig voneinander gewählt werden können, denn  $(x_0, y_0)$  muss Kurvenpunkt von  $f$  sein.

## 6.5 Anwendungen

### 6.5.1 Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

Gegeben seien zwei Funktionen  $f_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  und  $f_2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ; gesucht ist eine Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0 \\ f_2(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Für eine gegebene Näherungslösung  $(x_0, y_0)$  dieses Gleichungssystem werden die Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  mit Hilfe von Gleichung (6.1) durch ihre Tangentialebenen approximiert. Es gilt also

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &\approx \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x, y) &\approx \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + f_2(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Setzt man die linke Seite gleich Null und ersetzt man  $(x_0, y_0)$  durch  $(x_i, y_i)$  sowie  $(x, y)$  durch  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ , erhält man unter Verwendung der Matrixnotation

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_i, y_i) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_i, y_i) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_i, y_i) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_i, y_i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{i+1} - x_i \\ y_{i+1} - y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x_i, y_i) \\ f_2(x_i, y_i) \end{pmatrix}.$$

Die Auflösung der Gleichung nach  $x_{i+1}$  und  $y_{i+1}$  liefert die Iterationsvorschrift

*Gauß-Newton-Verfahren*

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - J^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x_i, y_i) \\ f_2(x_i, y_i) \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots$$

mit der so genannten *Jacobi-Matrix*

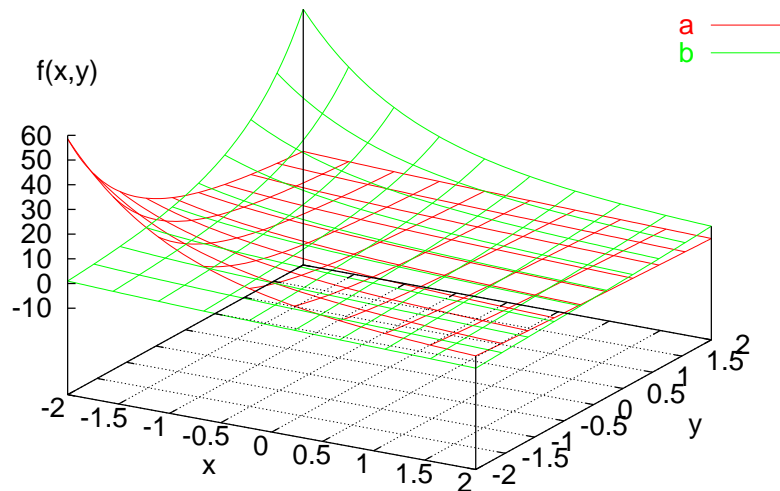
$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_i, y_i) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_i, y_i) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_i, y_i) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_i, y_i) \end{pmatrix}$$

sowie einer geeigneten Anfangslösung  $(x_0, y_0)$ .

Das Gauß-Newton-Verfahren ist die Grundlage für die numerische Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen. Die hier dargestellte Variante für den 2D-Fall lässt sich auf nichtlineare Gleichungssysteme mit  $n$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten übertragen.

*Beispiel.* Gesucht ist eine Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} e^{-(x+y)} &= x + y \\ e^{-(x-y)} &= x - y, \end{aligned}$$



**Abbildung 6.3:** Die Funktionen (a)  $f_1(x, y) = e^{-(x+y)} - (x+y)$  und (b)  $f_2(x, y) = e^{-(x-y)} - (x-y)$ .

das in der Form

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0 \\ f_2(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

mit  $f_1(x, y) = e^{-(x+y)} - (x+y)$  und  $f_2(x, y) = e^{-(x-y)} - (x-y)$  geschrieben werden kann, siehe Abbildung 6.3. Die dazugehörige Jacobi-Matrix erhält man aus den partiellen Ableitungen 1. Ordnung,

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_i, y_i) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_i, y_i) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_i, y_i) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_i, y_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-(x+y)} - 1 & -e^{-(x+y)} - 1 \\ -e^{-(x-y)} - 1 & e^{-(x-y)} + 1 \end{pmatrix}.$$

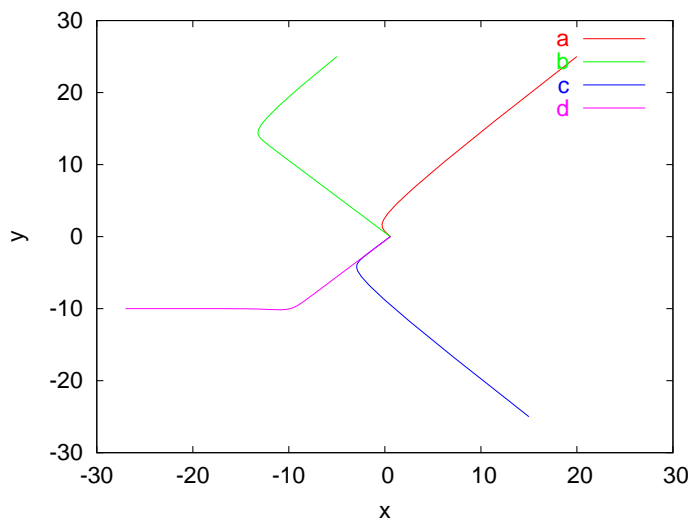
Ihre Determinante ist  $\det J = -2(e^{-(x+y)} + 1)(e^{-(x-y)} + 1)$ , und damit erhält man die Inverse

$$\begin{aligned} J^{-1} &= \frac{1}{\det J} \begin{pmatrix} e^{-(x-y)} + 1 & e^{-(x+y)} + 1 \\ e^{-(x-y)} + 1 & -e^{-(x+y)} - 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{e^{-(x+y)}+1} & \frac{1}{e^{-(x-y)}+1} \\ \frac{1}{e^{-(x+y)}+1} & \frac{-1}{e^{-(x-y)}-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das Gauß-Newton-Verfahren kann in der Form

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{e^{-(x_i+y_i)}+1} & \frac{1}{e^{-(x_i-y_i)}+1} \\ \frac{1}{e^{-(x_i+y_i)}+1} & \frac{-1}{e^{-(x_i-y_i)}+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-(x_i+y_i)} - (x_i + y_i) \\ e^{-(x_i-y_i)} - (x_i - y_i) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{x_i+y_i+1}{2e^{-(x_i+y_i)}+1} + \frac{x_i-y_i+1}{2e^{-(x_i-y_i)}+1} - 1 \\ \frac{x_i+y_i+1}{2e^{-(x_i+y_i)}+1} - \frac{x_i-y_i+1}{2e^{-(x_i-y_i)}+1} \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

geschrieben werden kann. Für eine geeignete Anfangslösung  $(x_0, y_0)$  konvergiert dieses Iterationsverfahren gegen eine Lösung des Gleichungssystems. In Abbildung 6.4 ist die Konvergenz gegen die Lösung  $x = 0,567143$  und  $y = 0$  für verschiedene Anfangslösungen dargestellt.



**Abbildung 6.4:** Die iterative Lösung des Gleichungssystems  $e^{-(x+y)} - (x+y) = 0$ ,  $e^{-(x-y)} - (x-y) = 0$  für verschiedene Anfangslösungen: (a)  $(x_0, y_0) = (20, 25)$ , (b)  $(x_0, y_0) = (-5, 25)$ , (c)  $(x_0, y_0) = (15, -25)$ , (d)  $(x_0, y_0) = (-27, 10)$ .

### 6.5.2 Extremwertaufgaben

Wir betrachten wieder den einfachsten Fall,  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f$  besitzt im Punkt  $(x_0, y_0)$  ein *relatives Minimum* bzw. ein *relatives Maximum*, wenn für alle Punkte  $(x, y)$  einer Umgebung von  $(x_0, y_0)$  gilt

$$f(x, y) > f(x_0, y_0), \quad \text{bzw.} \quad f(x, y) < f(x_0, y_0).$$

Lokale Minima und lokale Maxima sind *lokale Extrema*.

Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz eines lokalen Minimums bzw. Maximums im Punkt  $(x_0, y_0)$  basieren auf Aussagen über partielle Ableitungen 1. bzw. 2. Ordnung.

*Notwendige Bedingung.* Seien  $f_x$  und  $f_y$  die partiellen Ableitungen 1. Ordnung einer Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ . Dann ist

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_0, y_0) = 0, \quad (6.3)$$

falls in  $(x_0, y_0)$  ein lokales Extremum ist.

*Hinreichende Bedingung.* Seien  $f_x$  und  $f_y$  die partiellen Ableitungen 1. Ordnung und  $f_{xx}$ ,  $f_{xy}$ ,  $f_{yx}$  und  $f_{yy}$  die Partiellen Ableitungen 2. Ordnung einer Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ . Sei  $f_x(x_0, y_0) = 0$  und  $f_y(x_0, y_0) = 0$  und

$$\det J > 0 \quad \text{mit} \quad J = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

dann hat die Funktion  $f$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  ein lokales Extremum.

### Bemerkungen

- (i) Die Matrix  $J$  ist die Jacobi-Matrix an der Stelle  $(x_0, y_0)$  für das nichtlineare Gleichungssystem (6.3).
- (ii) Wegen  $f_{xy} = f_{yx}$  ist Bedingung (6.4) identisch mit
 
$$f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) > f_{xy}^2(x_0, y_0).$$
- (iii) Wir nehmen an, dass die Funktion  $f$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  ein lokales Extremum hat, d. h. es gelten die Beziehungen (6.3) und (6.4). Dann  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$  genau dann, wenn  $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$ , und in  $(x_0, y_0)$  ist ein lokales Minimum von  $f$ .
- (iv) Es sei in  $(x_0, y_0)$  ein lokales Extremum von  $f$ . Die Bedingung  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$  ist genau dann erfüllt, wenn  $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$ . In diesem Fall ist in  $(x_0, y_0)$  ein lokales Maximum von  $f$ .
- (v) Sei  $f_x(x_0, y_0) = 0$  und  $f_y(x_0, y_0) = 0$  und  $\det J < 0$ , dann hat die Funktion  $f$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  einen Sattelpunkt.
- (vi) Falls  $\det J = 0$ , ist keine Aussage zur Existenz eines Extremums oder Sattelpunkts möglich.

### Schritte zur Lösung von Extremwertaufgaben

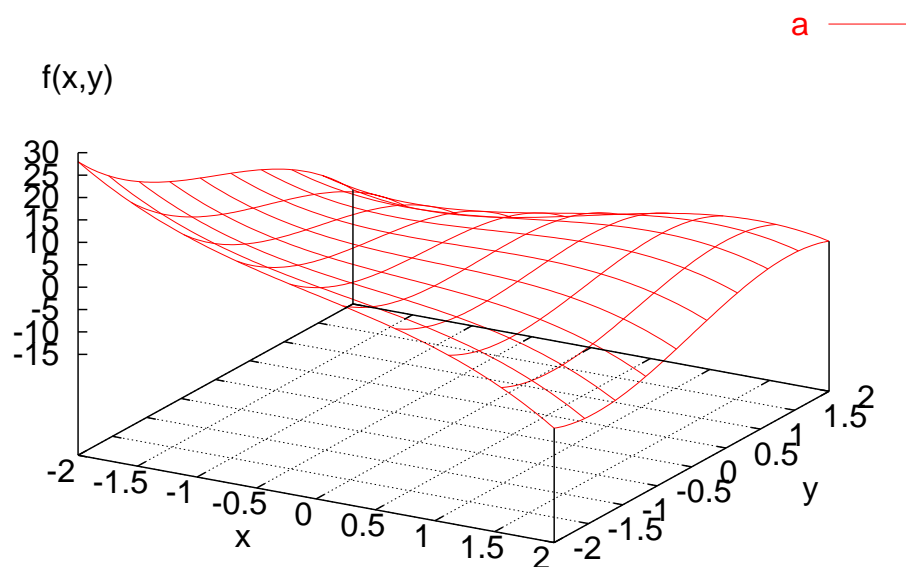
1. Bestimmung der Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems  $f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 0$ ,
2. Berechnung von  $\det J$  für alle Lösungen und Entscheidung ob eine Lösung ein Extremum oder ein Sattelpunkt ist,
3. Zuordnung eines Extremums zu Minimum oder Maximum.

*Beispiel.* Gegeben sei die Funktion  $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$ , siehe Abbildung 6.5. Ihre partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung sind

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3y - 3x^2, & f_y(x, y) &= 3x - 3y^2, \\ f_{xx}(x, y) &= -6x, & f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) &= 3, & f_{yy}(x, y) &= -6y. \end{aligned}$$

1. Aus der notwendigen Bedingung (6.3) folgt

$$\begin{aligned} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} 3y - 3x^2 = 0 \\ 3x - 3y^2 = 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} y - x^2 = 0 \\ x - y^2 = 0 \end{aligned}$$



**Abbildung 6.5:** Die Funktion  $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$  hat an der Stelle  $(0,0)$  einen Sattelpunkt und an  $(1,1)$  ein lokales Maximum.

und

$$\begin{aligned}
 x - x^4 &= 0, & (\text{nach Einsetzen der ersten in die zweite Gleichung}) \\
 x(1 - x^3) &= 0, \\
 x_1 &= 0, & x_2 = 1, \\
 y_1 &= 0, & y_2 = 1,
 \end{aligned}$$

d. h. die Punkte  $(0,0)$  und  $(1,1)$  sind Lösungen.

2. Für den Punkt  $(0,0)$  ist  $\det J = -9 < 0$ , d. h. in  $(0,0)$  ist ein Sattelpunkt; für den Punkt  $(1,1)$  ist  $\det J = 27 > 0$ , d. h.  $(1,1)$  ist lokales Extremum.
3. Ausserdem ist  $f_{xx}(1,1) = -6 < 0$ , d. h. in  $(1,1)$  ist lokales Maximum.

### 6.5.3 Fehlerrechnung

In diesem Abschnitt werden zwei Arten der Fehlerfortpflanzung behandelt – die lineare und quadratische Fehlerfortpflanzung. Gegeben sei eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ . Die Variablen  $x_1, \dots, x_n$  sollen im Zusammenhang mit der Fehlerrechnung als „Einstellgrößen“ bezeichnet werden. Zu untersuchen ist die Fragestellung, auf welche Weise sich Fehler  $|\Delta x_i|$  der Einstellgrößen  $x_i$  auf den Funktionswert von  $f$  auswirken. Mit  $|\Delta f|$  wird der Fehler des Funktionswerts bezeichnet.

Die mathematische Grundlage für die Fehlerrechnung ist das totale Differential der Funktion  $f$ .

Wenn die Fehler der Einstellgrößen überwiegend als systematische Fehler interpretiert werden können gilt

*Gesetz der linearen Fehlerfortpflanzung*

$$\Delta f \approx \sum_{k=1}^n |f_{x_k}(x_1, \dots, x_n) \cdot \Delta x_k|.$$

Sind die Fehler  $|\Delta x_i|$  der  $x_i$  dagegen überwiegend zufallsbehaftet, dann gilt

*Gesetz der quadratischen Fehlerfortpflanzung (nach Gauß)*

$$\Delta f \approx \sqrt{\sum_{k=1}^n (f_{x_k}(x_1, \dots, x_n) \cdot \Delta x_k)^2}.$$

*Beispiel (homogene Kugel).* Gegeben sei eine homogene Kugel mit dem Radius  $r \pm \Delta r = (12 \pm 0,2)$  cm und einer Dichte  $\rho \pm \Delta \rho = (2 \pm 0,1)$  g/cm<sup>3</sup>. Zu berechnen ist die Kugelmasse  $m$  sowie der Fehler  $|\Delta m|$ . Es gilt  $m = \rho \cdot V$ , wobei  $V = \frac{4\pi}{3}r^3$  das Kugelvolumen bezeichnet, d. h.  $m = \frac{4\pi}{3}\rho r^3$ . Die Masse  $m$  ist also eine Funktion des Radius  $r$  und der Dichte  $\rho$ ,  $m(r, \rho)$ . Für  $r = 12$  cm und  $\rho = 2$  g/cm<sup>3</sup> erhält man  $m = 14,476$  kg.

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion  $m(r, \rho)$  sind

$$m_r(r, \rho) = 4\pi\rho r^2, \quad m_\rho(r, \rho) = \frac{4\pi}{3}r^3.$$

Daraus ergibt sich  $m_r(12 \text{ cm}, 2 \text{ g/cm}^3) = 3619 \text{ g/cm}$  und  $m_\rho(12 \text{ cm}, 2 \text{ g/cm}^3) = 7238 \text{ cm}^3$ .

Mit Hilfe des Gesetzes der linearen Fehlerfortpflanzung erhält man

$$\begin{aligned} \Delta m &\approx |m_r \cdot \Delta r| + |m_\rho \cdot \Delta \rho| \\ &= 3619 \text{ g/cm} \cdot 0,2 \text{ cm} + 7238 \text{ cm}^3 \cdot 0,1 \text{ g/cm}^3 = 1,448 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Quadratische Fehlerfortpflanzung liefert

$$\begin{aligned} \Delta m &\approx \sqrt{(m_r \cdot \Delta r)^2 + (m_\rho \cdot \Delta \rho)^2} \\ &= \sqrt{(3619 \text{ g/cm} \cdot 0,2 \text{ cm})^2 + (7238 \text{ cm}^3 \cdot 0,1 \text{ g/cm}^3)^2} = 1,024 \text{ kg}. \end{aligned}$$

# Index

- Ableitung, 63
  - $n$ -ter Ordnung, 66
  - der Umkehrfunktion, 68
  - dritte, 66
  - partielle, 122
  - zweite, 66
- Absolutbetrag, 18
- Amplitude, 108
- Anstieg
  - einer Funktion, 63
- Archimedische Spirale, 60
- Arcusfunktionen, 52
- Areafunktionen, 55
- Argument, 35
- Asymptote
  - einer Funktion, 48
- beschränkt, 37
  - von oben, 37
  - von unten, 37
- Binomialkoeffizient, 11
- Binomische Formeln, 14
- Bogenlänge, 101
- Cauchy-Formel, 79
- Definitionsbereich, 35
- Dezimalsystem, 17
- Differentiation
  - implizite, 129
  - logarithmische, 67
  - parametrische, 68
- Differential
  - totales, 127
- Differentialquotient, 63
- Differenzenquotient, 63
- differenzierbar, 64
  - $n$ -mal, 66
- Dualsystem, 17
- Euler
  - sche Gammafunktion, 56
  - sches Integral
    - zweites, 56
- Exponentialfunktion, 50
- Extremum
  - einer Funktion, 71
  - lokal, 132
- Faktorregel
  - für Differentiation, 67
- Fakultät, 10
- Fehlerfortpflanzung
  - Gaußsche, 135
  - linear, 135
  - quadratisch, 135
- Fehlerrechnung, 81
- Folge, 21
  - alternierend, 23
  - arithmetisch, 22
  - divergent, 24
  - geometrisch, 22
  - konvergent, 24
  - Null-, 24
- Fourier
  - Koeffizient, 110
  - Reihe, 110
    - komplexe Form, 116
- Funktion, 35
  - Arcus, 52
  - Area-, 55
  - Asymptote einer, 48
  - beschränkt, 37
  - eindeutig, 35
  - Eulersche Gamma-, 56
  - Exponential-, 50
  - Gamma-, 56
  - ganz rational, 41
  - gebrochen rationale, 46

- echt, 46
  - ganz rationaler Anteil, 46
  - unecht, 46
- gerade, 36
- Graph der, 36
- Grenzwert einer, 38
- hyperbolische, 54
- inverse, 35
- konkav, 71
- konstante, 42
- konvex, 71
- Kurve einer, 59
- lineare, 42
- Logarithmus-, 51
- monoton, 37
- periodisch, 37
- Polstelle einer, 47
- quadratische, 42
- Stamm-, 85
- stetig, 40
- trigonometrische, 52
- unbeschränkt, 37
- ungerade, 36
- unstetig, 40
- Funktionswert, 35
- Gammafunktion, 56
- ganze Zahlen, 7
- Gauß-Newton-Verfahren, 130
- Gleichung, 19
- Graph, 36
- Grenzwert
  - einer Funktion, 38
  - linksseitiger, 39
  - rechtsseitiger, 39
- Hexadezimalsystem, 17
- Horner-Schema, 43
- Hyperbelfunktionen, 54
- hyperbolische Funktionen, 54
- implizite Differentiation, 129
- Integral
  - bestimmtes, 95
  - unbestimmtes, 86
- Integrale
  - uneigentliche, 98
- Integrand, 86
- Integration
  - nach Partialbruchzerlegung, 87
  - nach Substitution, 87
  - partielle, 87
  - von Differenzen, 87
  - von Summen, 87
- Integrationskonstante, 86
- inverse
  - Funktion, 35
- irrationale Zahlen, 8
- Jacobi-Matrix, 130, 133
- Keplersche Fassregel, 107
- Kettenregel, 128
- Kettentregel
  - für Differentiation, 67
- Konvergenzbereich
  - einer Potenzreihe, 33
- Konvergenzradius
  - einer Potenzreihe, 33
- Krümmung
  - einer Kurve, 74
- Krümmungskreis, 74
- Kreisfrequenz, 108
- Kurve, 36, 59
  - Parameterform, 59
- l'Hospitalsche Regel, 83
- Lagrange-Formel, 79
- Leibniz
  - Formel, 68
- Leibniz-Kriterium
  - für Reihen, 29
- Linearfaktor
  - eines Polynoms, 42
- logarithmische Differentiation, 67
- Logarithmus, 15
  - Rechenregeln, 16
- Logarithmusfunktion, 51
- MacLaurinsche Reihe, 75
- Mantelfläche
  - eines Rotationskörpers, 104
- Maximum
  - lokal, 71
  - relatives, 132
- Minimum

- lokal, 71
  - relatives, 132
- monoton, 37
  - fallend, 37
  - streng, 37
  - streng fallend, 37
  - streng wachsend, 37
  - wachsend, 37
- natürliche Zahlen, 7
- Newton-Verfahren, 79
- Nullfolge, 24
- Nullstelle, 36
- numerische Integration, 106
- Oberfläche
  - eines Rotationskörpers, 104
- Parameterform
  - einer Kurve, 59
- parametrische Differentiation, 68
- Partialsomme
  - einer Folge, 21
- partielle Ableitung, 122
- Pascalsches Dreieck, 11
- Periodenlänge, 37
- periodisch, 37
- Phasenverschiebung, 108
- Pol, 47
- Polstelle
  - einer Funktion, 47
  - gerader Ordnung, 47
  - Ordnung einer, 47
  - ungerader Ordnung, 47
- Polynom, 41
  - Linearfaktor eines, 42
  - Produktdarstellung, 42
- Potenz, 15
  - Rechenregeln, 15
- Potenzreihe, 31
- Produktregel
  - für Differentiation, 67
- Quotientenkriterium
  - für Potenzreihen, 33
  - für Reihen, 29
- Quotientenregel
  - für Differentiation, 67
- rationalen Zahlen, 7
- Rechteckregel
  - zur numerischen Integration, 106
- reelle Zahlen, 8
- Reihe, 27
  - arithmetisch, 28
  - divergent, 27
  - geometrisch, 28
  - harmonisch, 28
  - konvergent, 27
  - MacLaurinsche, 75
  - Potenz-, 31
  - Taylor, 78
- Signum, 19
- Simpson-Regel, 107
- Stammfunktion, 85
- stetig, 40
- Stirlingsche Formel, 10, 17
- Summenregel
  - für Differentiation, 67
- Tangentenregel
  - zur numerischen Integration, 106
- Tangentenverfahren
  - von Newton, 79
- Tangentialebene, 126
- Taylor-Reihe, 78
- totales Differential, 127
- Trapezregel
  - zur numerischen Integration, 106
- trigonometrisch
  - Funktionen, 52
- trigonometrisches System, 110
- Umkehrfunktion, 35
  - Ableitung der, 68
- unbeschränkt, 37
- Ungleichung, 19
- unstetig, 40
- Vergleichskriterium
  - für Reihen, 28
- Vielfachheit
  - einer Nullstelle, 42
- vollständige Induktion, 8
- Volumen
  - eines Rotationskörpers, 104

- Wendepunkt, 71
- Wertebereich, 35
- Wurzel, 15
- Wurzelkriterium
  - für Potenzreihen, 33
  - für Reihen, 29
- Zahlen
  - ganze, 7
  - irrationale, 8
  - natürliche, 7
  - rationale, 7
  - reelle, 8
- Zahlenfolge, 21