Analysis für Informatiker, 1. Semester

Lösungswege Übungsaufgaben, Serie 5

1. Berechnung der ersten Ableitungen.

   a)

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2+4x)(3x^3-2x^2+3) \\ f'(x) &= (4x+4)(3x^3-2x^2+3)+(2x^2+4x)(9x^2-4x) \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sqrt{a}-\sqrt{x})^2 \\ f'(x) &= 2(\sqrt{a}-\sqrt{x})\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1-\sqrt{\frac{a}{x}} \end{aligned}$$

   c)

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(\ln x) \\ f'(x) &= \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\,\ln x} \end{aligned}$$

   d)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x}\cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \\ f'(x) &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}\cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}}\right) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right) \end{aligned}$$

   e)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2\sin x+\cos x}{x^2} \\ f'(x) &= \frac{(2\cos x-\sin x)\cdot x^2-(2\sin x+\cos x)\cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{(2\cos x-\sin x)x-4\sin x-2\cos x}{x^3} = \frac{2\cos x\,(x-1)-\sin x\,(x+4)}{x^3} \end{aligned}$$

   f)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin\ln x \\ f'(x) &= \cos\ln x\cdot\frac{1}{x} = \frac{\cos\ln x}{x} \end{aligned}$$

   g)

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\sin(4x+3) \\ f'(x) &= \frac{1}{\sin(4x+3)}\cdot\cos(4x+3)\cdot 4 = 4\cdot\frac{\cos(4x+3)}{\sin(4x+3)} \\ &= 4\,\cot(4x+3) \end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{(x^2+4x)^3} \\ f'(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x^2+4x)^3}}\cdot 3\cdot(x^2+4x)^2\cdot(2x+4) \\ &= 3\sqrt{x^2+4x} \end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan x^2 \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x^4}\cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4} \end{aligned}$$

j) Natürlich führt hier eine direkte und konsequente Anwendung der Differentationsregeln zum Ziel. Bei dieser Aufgabe lohnt sich jedoch ein strukturiertes Vorgehen. Die Funktion

$$f(x) = \ln\frac{(2x-1)(x+3)(x-4)}{(x+1)(4-3x)}$$

ist vom Typ

$$\begin{aligned} && f(x) &= \ln\frac{u}{v}; \\ \text{daraus folgt} && f'(x) &= \frac{v}{u}\cdot\frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{u'v-uv'}{uv} = \frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}. \end{aligned}$$

Ausserdem sind die Funktionen u und v vom Typ $u = u_1\cdot u_2\cdot u_3$ bzw. $v = v_1\cdot v_2$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} u' &= u_1'u_2u_3 + u_1u_2'u_3 + u_1u_2u_3' \\ \frac{u'}{u} &= \frac{u_1'}{u_1}+\frac{u_2'}{u_2}+\frac{u_3'}{u_3} \\ v' &= v_1'v_2 + v_1v_2' \\ \frac{v'}{v} &= \frac{v_1'}{v_1}+\frac{v_2'}{v_2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{u_1'(x)}{u_1(x)}+\frac{u_2'(x)}{u_2(x)}+\frac{u_3'(x)}{u_3(x)}\right) - \left(\frac{v_1'(x)}{v_1(x)}+\frac{v_2'(x)}{v_2(x)}\right) \\ &= \frac{2}{2x-1}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+1}+\frac{3}{4-3x}. \end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{2x} = \mathrm{e}^{\ln x\cdot 2x} \\ f'(x) &= \mathrm{e}^{\ln x\cdot 2x}\left(2\ \ln x + \frac{2x}{x}\right) = 2x^{2x}(\ln x + 1) \end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x)^{\sin x} = \mathrm{e}^{\ln(2x)\ \sin x} \\ f'(x) &= \mathrm{e}^{\ln(2x)\ \sin x}\left(2\cdot\frac{\sin x}{2x} + \ln(2x)\cdot\cos x\right) \\ &= (2x)^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \ln(2x)\cdot\cos x\right) \end{aligned}$$

m)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\mathrm{e}^x + \ln x}{\sin x} \\
f'(x) &= \frac{\left(\mathrm{e}^x + \frac{1}{x}\right) \cdot \sin x - (\mathrm{e}^x + \ln x) \cdot \cos x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{\mathrm{e}^x + \frac{1}{x}}{\sin x} - \frac{\mathrm{e}^x + \ln x}{\sin x} \cdot \cot x
\end{aligned}
$$

n)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)^{x-1} = \mathrm{e}^{\ln(x+1)\cdot(x-1)} \\
f'(x) &= \mathrm{e}^{\ln(x+1)\cdot(x-1)} \left(\frac{x-1}{x+1} + \ln(x+1) \right) \\
&= (x+1)^{(x-1)} \left(\frac{x-1}{x+1} + \ln(x+1) \right)
\end{aligned}
$$

o)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x^2+2x-1)^{\sqrt{x}} = \mathrm{e}^{\ln(x^2+2x-1)\cdot\sqrt{x}} \\
f'(x) &= \mathrm{e}^{\ln(x^2+2x-1)\cdot\sqrt{x}} \left(\frac{\sqrt{x}}{x^2+2x-1} + \frac{\ln(x^2+2x-1)}{2\cdot\sqrt{x}} \right) \\
&= (x^2+2x-1)^{\sqrt{x}} \left(\frac{\sqrt{x}}{x^2+2x-1} + \frac{\ln(x^2+2x-1)}{2\sqrt{x}} \right)
\end{aligned}
$$

p)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2\,\mathrm{e}^{-x} \\
f'(x) &= 2x\,\mathrm{e}^{-x} + x^2 \cdot (-1) \cdot \mathrm{e}^{-x} = 2x\,\mathrm{e}^{-x} - x^2\,\mathrm{e}^{-x} \\
&= x\,\mathrm{e}^{-x}(2-x)
\end{aligned}
$$

q)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 4\,\mathrm{e}^{-x^2+3x-1} \\
f'(x) &= 4\,\mathrm{e}^{-x^2+3x-1}(-2x+3) \\
&= (12-8x)\,\mathrm{e}^{-x^2+3x-1}
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (x-x_0)^k \\
f'(x) &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \cdot (x-x_0)^{k-1} = a_1 + \sum_{k=2}^{n} k \cdot a_k \cdot (x-x_0)^{k-1} \\
f''(x) &= \sum_{k=2}^{n} k \cdot (k-1) \cdot a_k \cdot (x-x_0)^{k-2} = 2a_2 + \sum_{k=3}^{n} k \cdot (k-1) \cdot a_k \cdot (x-x_0)^{k-2}
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x \cdot \sin x}{x^2-1} \\
f'(x) &= \frac{(\sin x + x\,\cos x)\cdot(x^2-1) - x\,\sin x\cdot(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{\sin x + x\,\cos x}{x^2-1} - \frac{2x^2\,\sin x}{(x^2-1)^2} \\
f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1} - \frac{2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1}\left[1-\frac{2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1}\right] \\
&= -\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+1}{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1\right)^2} \approx -1,61 \\
f'(\pi) &= \frac{-\pi}{\pi^2-1} \approx -0,354
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2-6x+7 \\
f'(x) &= 4x-6 \\
f'(1) &= -2 \\
f_T(x) &= -2x+b \\
f_T(1) &= -2+b=3 \qquad \text{(Daraus folgt } b=5.\text{)} \\
f_T(x) &= -2x+5
\end{aligned}
$$

5.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 1+x+x^2+...+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \\
f'(x) &= 1+2x+3x^2+...+nx^{n-1} = \frac{(n+1)x^n\cdot(x-1)-x^{n+1}+1}{(x-1)^2} \\
&= \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}
\end{aligned}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
f(x)=P_3(x) &= ax^3-5x^2+4x+1 \\
f'(x) &= 3ax^2-10x+4 \\
f'(1) &= 3a-6, \qquad \text{aus } f'(1)=0 \text{ folgt } a=2 \\
f'(x) &= 6x^2-10x+4, \qquad \text{aus } f'(x)=0 \text{ folgt } \begin{cases} x_{E_{1/2}} = \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36}-\frac{2}{3}}, \\ x_{E_1}=1,\ x_{E_2}=\frac{2}{3} \end{cases} \\
f''(x) &= 12x-10 \\
f''(x_{E_1}) &= 2, \qquad \text{d. h. } x_{E_1} \text{ ist ein lokales Minimum} \\
f''(x_{E_2}) &= -2, \qquad \text{d. h. } x_{E_2} \text{ ist ein lokales Maximum}
\end{aligned}
$$

7.

$$\begin{array}{rrcl}
& y = f(x) & = & \mathrm{e}^{-2x} + 2x \\
& f'(x) & = & -2\mathrm{e}^{-2x} + 2, \qquad \text{aus } f'(x) = 0 \text{ folgt } x_{E_1} = 0 \\
\text{wegen} & f'(x) & < & 0 \quad \text{für alle } x \in (-\infty, 0) \\
& & & \qquad \text{ist } f(x) \text{ in } (-\infty, 0) \text{ streng monoton fallend} \\
& f''(x) & = & 4\mathrm{e}^{-2x} \\
& f''(0) & = & 4, \qquad \text{d. h. } x_{E_1} \text{ ist ein lokales Minimum} \\
\text{wegen} & f''(x) & = & 4\mathrm{e}^{-2x} > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ existiert kein Wendepunkt} \\
\text{wegen} & f'''(x) & = & -8\mathrm{e}^{-2x} < 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ ist } f(x) \text{ konvex in } \mathbb{R}
\end{array}$$

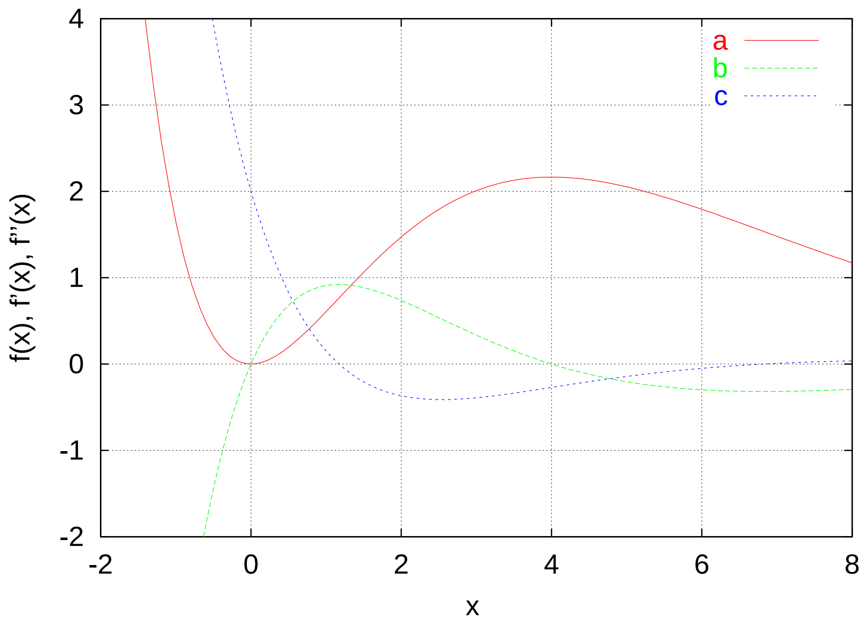

Abbildung 1: Die Funktionen (a) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ und ihre ersten beiden Ableitungen (b) $f'(x)$ und (c) $f''(x)$.

8. a) Es gilt

$$\begin{array}{rrcl}
& f(x) & = & x^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, \qquad D(f) = \mathbb{R},\ W(f) = [0, \infty). \\
\text{Aus} & f(x) & = & 0 \qquad \text{folgt } x_N = 0 \text{ (doppelte Nullstelle),} \\
& f'(x) & = & \left(2x - \dfrac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, \\
\text{aus} & f'(x) & = & 0 \qquad \text{folgt } x_{E_1} = 0 \text{ und } x_{E_2} = 4, \\
& f''(x) & = & \left(\dfrac{x^2}{4} - 2x + 2\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Wegen} \quad f''(x_{E_1}) & = & 2\mathrm{e} > 0 \qquad \text{ist } x_{E_1} \text{ lokales Minimum,} \\ \text{wegen} \quad f''(x_{E_2}) & = & -2\mathrm{e}^{-2} < 0 \qquad \text{ist } x_{E_2} \text{ lokales Maximum,} \\ \text{aus} \quad f''(x) & = & 0 \qquad \text{folgt } x_{W_{1/2}} = \frac{8}{2} \pm \sqrt{\frac{64}{4} - 8}, \\ & & \qquad \text{d. h. } x_{W_1} = 4 + 2\sqrt{2} \text{ und } x_{W_2} = 4 - 2\sqrt{2}, \\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) & = & \lim\limits_{x\to\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} \overset{(\mathrm{l'H})}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} \overset{(\mathrm{l'H})}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}, \\ & = & \lim\limits_{x\to\infty} \frac{8}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) & = & \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} = \infty. \end{array}$$

Die Graphen der Funktion f und ihrer ersten beiden Ableitungen sind in Abbildung **??** dargestellt.

b)

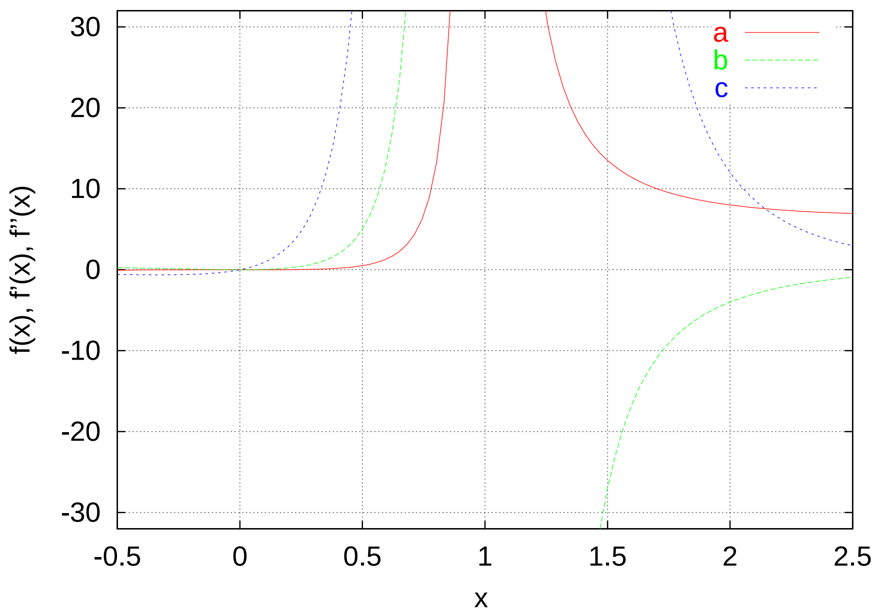

Abbildung 2: Die Funktionen (a) $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ und ihre ersten beiden Ableitungen (b) $f'(x)$ und (c) $f''(x)$.

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \frac{3x-2}{x^2-2x+1},$$

d. h. $f(x)$ hat an der Stelle $x_N = 0$ eine (dreifache) Nullstelle und an der Stelle $x_P = 1$ einen Pol 2. Ordnung. Der Definitionsbereich schließt $x_P = 1$ aus, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $W(f) = \mathbb{R}$.

Die Funktion $f_{As}(x) = x + 2$ ist Asymptote. Daraus folgt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3x^2 \cdot (x-1)^2 - x^3 \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \\
f''(x) &= \frac{(3x^2 - 6x) \cdot (x-1)^3 - (x^3 - 3x^2) \cdot 3 \cdot (x-1)^2}{(x-1)^6} \\
&= \frac{(3x^2 - 6x)(x-1) - 3x^3 + 9x^2}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4} \\
f'''(x) &= \frac{6x - 30}{(x-1)^5}
\end{aligned}
$$

Die Werte $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ sind Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$. Wegen $f''(x_1) = 0$ und $f'''(x_1) = -30$ ist x_1 ein Wendepunkt, $x_W = x_1 = 0$ und wegen $f''(x_2) = \frac{9}{8} > 0$ ist x_2 ein lokales Minimum, $x_E = x_2 = 3$.

Die Graphen der Funktion f und ihrer ersten beiden Ableitungen sind in Abbildung **??** dargestellt.

c) Für $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2}$ ist $D(f) = W(f) = \mathbb{R}$.

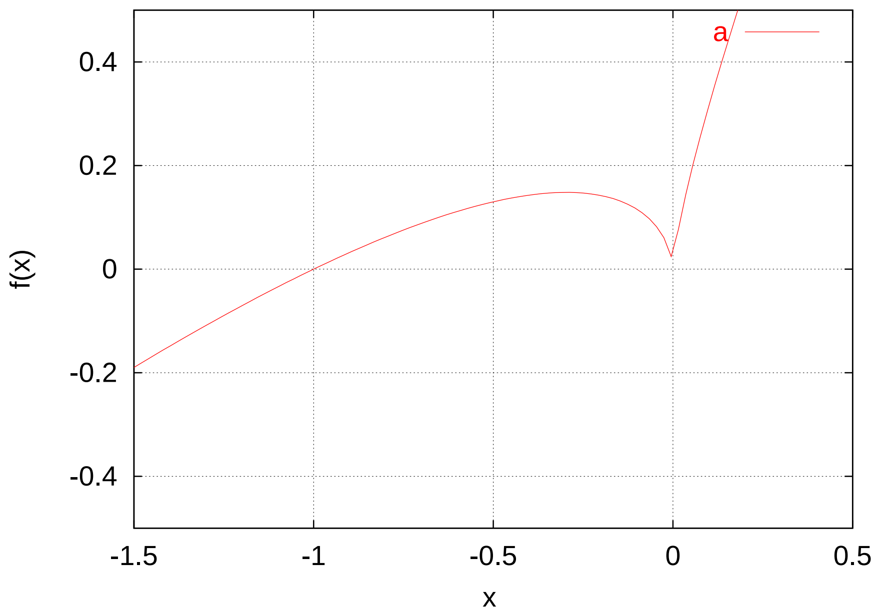

Abbildung 3: Die Funktion $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2}$. Die Funktion f hat u. a. an der Stelle $x_{N_1} = 0$ eine (doppelte) Nullstelle, was in dieser Darstellung des Graphen leider nicht zu sehen ist.

Aus $f(x) = 0$ folgt $x^3 + x^2 = 0$, d. h., die Werte $x_{N_1} = 0$ und $x_{N_2} = -1$ sind Nullstellen von f. Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Wegen $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2} = x + (x^2)^{\frac{1}{3}} = x + |x|^{\frac{2}{3}}$ ist

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \begin{cases} 1 + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} & = 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{|x|}}, \quad x > 0 \\ 1 - \frac{2}{3}(-x)^{-\frac{1}{3}} & = 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{-x}}, \quad x < 0 \end{cases}, \\
f''(x) &= \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) |x|^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}, \quad x \neq 0.
\end{aligned}
$$

Aus $f'(x) = 0$ folgt $x_E = -\frac{8}{27}$. Wegen $f''(x) < 0$ für alle $x \in D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f im gesamten Definitionsbereich $D(f'')$ von f'' konkav, und x_E ist folglich ein lokales Maximum.

Die Funktion f' existiert an der Stelle $x_{N_1} = 0$ nicht, d. h., die Funktion f ist an der Stelle x_{N_1} nicht differenzierbar. Wegen

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = f(0) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \uparrow 0} f(x) = f(0)$$

ist f jedoch an der Stelle $x_{N_1} = 0$ stetig.

Der Graph der Funktion f ist in Abbildung **??** dargestellt.