Analysis für Informatiker, 1. Semester

Lösungshinweise Übungsaufgaben, Serie 5

1. **a)** $f'(x) = (4x+4)(3x^3 - 2x^2 + 3) + (2x^2 + 4x)(9x^2 - 4x)$,

   b) $f'(x) = 1 - \sqrt{\dfrac{a}{x}}$, **c)** $f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln x}$, **d)** $f'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \left(\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right)$,

   e) $f'(x) = \dfrac{(2\cos x - \sin x)x - 4\sin x - 2\cos x}{x^3}$, **f)** $f'(x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$,

   g) $f'(x) = 4\cot(4x+3)$, **h)** $f'(x) = 3\sqrt{x^2+4x}\,(x+2)$, **i)** $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^4}$,

   j) $f'(x) = \dfrac{2}{2x-1} + \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{3}{4-3x}$,

   k) $f'(x) = x^{2x} \cdot 2(\ln x + 1)$, **l)** $f'(x) = (2x)^{\sin x}(\cos x \cdot \ln(2x) + \frac{\sin x}{x})$,

   m) $f'(x) = \dfrac{(e^x + \frac{1}{x})\sin x - (e^x + \ln x)\cos x}{\sin^2 x}$,

   n) $f'(x) = (x+1)^{(x-1)}\left(\ln(x+1) + \dfrac{x-1}{x+1}\right)$,

   o) $f'(x) = (x^2+2x-1)^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\ln(x^2+2x-1)}{2\sqrt{x}} + \dfrac{(2x+2)\sqrt{x}}{x^2+2x-1}\right)$,

   p) $f'(x) = xe^{-x}(2-x)$, **q)** $f'(x) = (12-8x)e^{-x^2+3x-1}$.

2. $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k (x-x_0)^{k-1}$, $f''(x) = \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)a_k(x-x_0)^{k-2}$.

3. -1,61 bei $x_0 = \frac{\pi}{2}$ und -0,354 bei $x_1 = \pi$

4. $f_T(x) = -2x + 5$

5. $1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$

6. $a = 2$: Minimum bei $x_{E_1} = 1$ mit $P_3(1) = 2$
   Maximum bei $x_{E_2} = \frac{2}{3}$ mit $P_3(\frac{2}{3}) = \frac{55}{27}$.

7. Extremwerte: $x_E = 0$ Minimum, Wendepunkte: keine
   streng monoton fallend in $(-\infty, 0)$, konvex in $\mathbb{R}$

8. (a) $D(f) = \mathbb{R}$, $W(f) = [0, \infty)$, Nullstellen: $x_N = 0$,
   Extremstellen: $x_{E_1} = 0$ (Minimum), $x_{E_2} = 4$ (Maximum)
   Wendepunkte: $x_{W_1} = 4 + \sqrt{8}$, $x_{W_2} = 4 - \sqrt{8}$
   $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

   (b) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $W(f) = \mathbb{R}$, Nullstellen: $x_N = 0$, Polstellen: $x_P = 1$,
   Extremstellen: $x_E = 3$ (Minimum), Wendepunkte: $x_W = 0$,
   Asymptote: $y_{AS} = x + 2$

   (c) $D(f) = \mathbb{R}$, $W(f) = \mathbb{R}$, Nullstellen: $x_{N_1} = 0$, $x_{N_2} = -1$,
   Extremstellen: $x_E = -\frac{8}{27}$ (Maximum), Wendepunkte: keine,
   $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ stetig, aber nicht differenzierbar in $x = 0$

9. $t_{max} = \dfrac{\ln a - \ln b}{a - b}$

10. $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$

11. Kreiszylinder: $h = \frac{2}{\sqrt{3}}\,R$ und $r = \sqrt{\frac{2}{3}}\,R$

    Kreiskegel: $h = \frac{4}{3}\,R$ und $r = \frac{\sqrt{8}}{3}\,R$

12. a) 1 b) ∞ c) ∞ d) 2 e) $\frac{3}{4}$ f) 0 g) 1 h) $\frac{1}{2}$ i) $\frac{1}{2}$ j) e^a

13. $\sin(2x) = \dfrac{2}{1!}\,x - \dfrac{2^3}{3!}\,x^3 + \dfrac{2^5}{5!}\,x^5 - ... = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!}\,x^{2k+1}$

14. a) $\dfrac{2}{1!}\,x + \left(\dfrac{2^2}{2!} + \dfrac{1}{2^2 \cdot 2!}\right) x^2 + \dfrac{2^3}{3!}\,x^3 + \left(\dfrac{2^4}{4!} - \dfrac{1}{2^4 \cdot 4!}\right) x^4 + \dfrac{2^5}{5!}\,x^5 + \left(\dfrac{2^6}{6!} + \dfrac{1}{2^6 \cdot 6!}\right) x^6$

    b) $7 + \left(-\dfrac{4}{2!} + 2\right) x + \left(\dfrac{4}{4!} - 9\right) x^2 + \left(-\dfrac{4}{6!} - \dfrac{2^3}{3!}\right) x^3 + \left(\dfrac{4}{8!} + 27\right) x^4$

15. 1,60026

16. 7,41 mm

17. $\Delta u = 5,9855\,\mathrm{V}$ $\delta u = 5,44\%$

18. $x_N = 1,3191$