

# Analysis für Informatiker, 1. Semester

## Übungsaufgaben, Serie 7, Aufgaben zur Wiederholung

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

a)  $(a^{x-2})^{x+2} = (a^{x+3})^{x-4}$ ,  $a > 0$ ,      b)  $3^{(2^x)} = 2^{(3^x)}$ ,  
c)  $\lg(x-1) + \lg 3 = \lg(x^2-1)$ ,      d)  $\frac{10}{\lg x - 2} - \frac{5}{\lg x + 1} = 4$ ,  
e)  $2\sqrt{3+x} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{x-2}$ ,

2. a) Bestimmen Sie  $\lambda \in \mathbb{R}$  so, daß die Gleichung  $\lambda x^2 - (1 - 2\lambda)x + \lambda - 2 = 0$  zwei verschiedenen reellwertige Lösungen hat.

b) Für welche  $a > 0$  existieren reellwertige Lösungen der Gleichung  $x^2 - 4x - \log_2 a = 0$ ?

3. Skizzieren Sie die Menge aller Punkte der  $x$ - $y$ -Ebene, die folgende Ungleichungen erfüllen:

a)  $y + x^2 - 2 \leq 0$  und  $4y + 2x + 4 \geq 0$ ,

b)  $x^2 \cdot y \geq 1$  und  $x - y - 1 < 0$ .

4. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:

a)  $x^2 + 2x - 8 < x - 2$ ,      b)  $\frac{3x+2}{|x+5|} \geq 1$ ,      c)  $\frac{|x+1|}{x+2} < 4$ ,

d)  $\left| \frac{3x-2}{4} - \frac{5x-4}{3} \right| \geq 2$ .

5. Fassen Sie folgende Ausdrücke so weit wie möglich zusammen und vereinfachen Sie sie:

a)  $\frac{(n+1)!}{n \cdot (n-1)!}$ ,      b)  $\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$ .

6. a) Gegeben seien  $a_3 = 4, 2$  und  $a_7 = 11$  einer arithmetischen Folge. Berechnen Sie  $a_1$  und die Summe  $a_1 + \dots + a_{99}$ !

b) Gegeben seien  $a_2 = \frac{1}{2}$  und  $a_5 = \frac{4}{27}$  einer geometrischen Folge. Berechnen Sie  $a_1$  und die Summe  $a_1 + \dots + a_5$ !

7. Berechnen Sie die Grenzwerte der Zahlenfolgen  $a_n$  mit

a)  $a_n = \frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)}$ ,      b)  $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2+1}$ ,

c)  $a_n = (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ,      d)  $a_n = \frac{3}{n} - \frac{10}{\sqrt{n}}$ .

8. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a)  $\left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \dots$ ,      b)  $\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2+1} + \frac{3}{3^2+1} - \frac{4}{4^2+1} + \dots$ ,

c)  $\frac{|\sin \alpha|}{1} + \frac{|\sin 2\alpha|}{2^2} + \frac{|\sin 3\alpha|}{3^2} + \frac{|\sin 4\alpha|}{4^2} + \dots$ ,      d)  $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$ .

9. Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergieren die folgenden Potenzreihen:

a)  $x + \frac{2!}{2^3}x^2 + \frac{3!}{3^3}x^3 + \frac{4!}{4^3}x^4 + \dots$ ,      b)  $x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{5}x^3 + \frac{8}{7}x^4 + \frac{16}{9}x^5 + \dots$ ?

10. Für die Funktion

$$y = f(x) = \frac{1}{4} \ln(3 - 2x) + 1$$

ist die Umkehrfunktion  $f^{-1}(x)$  zu berechnen. Außerdem sind für  $y = f(x)$  und  $y = f^{-1}(x)$  die Definitionsbereiche anzugeben.

11. Ermitteln Sie den Definitionsbereich der folgenden Funktionen:

a)  $f(x) = \sqrt{\ln(4x - x^2)}$  ,      b)  $f(x) = \sqrt{\ln \frac{1}{|\cos x|}}$  .