Analysis für Informatiker, 1. Semester

Übungsaufgaben, Serie 6

1. Berechnen Sie folgende Integrale

a) $\int (3x^2 - 4x + 1)\,\mathrm{d}x$, b) $\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$, c) $\int 2(\mathrm{e}^x + 5)\,\mathrm{d}x$,

d) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, e) $\int \frac{6 - x^2\sqrt[3]{x}}{3x}\,\mathrm{d}x$, f) $\int (2\sin x + 3\cos x)\,\mathrm{d}x$.

2. Berechnen Sie durch geeignete Substitution

a) $\int \cos(\frac{x}{3})\,\mathrm{d}x$, b) $\int \frac{1}{(2-x)^3}\,\mathrm{d}x$, c) $\int \sqrt[3]{5x-1}\,\mathrm{d}x$,

d) $\int x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$, e) $\int \frac{3x^2}{2+x^3}\,\mathrm{d}x$, f) $\int x\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$,

g) $\int \sqrt{1+\cos^2 x}\cdot\sin(2x)\,\mathrm{d}x$, h) $\int \cos^5 x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$, i) $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$,

j) $\int \frac{1}{x^2+5}\,\mathrm{d}x$, k) $\int \frac{x}{x^2+7}\,\mathrm{d}x$, l) $\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$,

m) $\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$.

3. Berechnen Sie durch partielle Integration die Gesamtheit aller Stammfunktionen zu

a) $f(x) = x\sin x$, b) $f(x) = x^2\sin x$, c) $f(x) = \mathrm{e}^x\sin x$,

d) $f(x) = \ln x$, e) $f(x) = x\cdot\ln x$, f) $f(x) = \arctan x$.

4. Gesucht sind mit Hilfe von Partialbruchzerlegung alle Funktionen $F(x)$, deren erste Ableitungen gegeben sind durch

a) $F'(x) = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}$, b) $F'(x) = \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}$,

c) $F'(x) = \frac{3x+2}{x(x+1)^3}$, d) $F'(x) = \frac{1}{x^3+3x^2-4}$,

e) $F'(x) = \frac{1}{x^4+5x^2+4}$, f) $F'(x) = \frac{x^2-5}{(x-1)(x^2-2x+2)}$.

5. Berechnen Sie den Wert der folgenden bestimmten Integrale:

a) $\int_0^1 (x - 2\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$, b) $\int_1^{\mathrm{e}} \sqrt[3]{x}\ln x\,\mathrm{d}x$, c) $\int_1^4 (2x - \frac{9}{2}\sqrt{x} - \frac{8}{x^2})\,\mathrm{d}x$,

d) $\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1-2x\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$, e) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 5x\cdot\cos 7x\,\mathrm{d}x$, f) $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$,

g) $\int_0^2 \frac{x^2}{x^6+4}\,\mathrm{d}x$, h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$, i) $\int_{-0.5}^{0.5} \frac{3^x}{1+9^x}\,\mathrm{d}x$,

j) $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sin(\ln x)}{5x}\,\mathrm{d}x$, k) $\int_0^{0.5} \mathrm{e}^{\sin\pi x}\cos\pi x\,\mathrm{d}x$, l) $\int_0^{\pi} x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$.

6. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Kurve $y = 4x(x^2-4)$ und der x-Achse im Intervall $-4 \le x \le 4$ eingeschlossen wird.

7. Berechnen Sie den Inhalt des Sektors, der durch die folgenden drei Kurven $y_1(x) = \frac{x}{2}$, $y_2(x) = \frac{x}{3}$, $y_3(x) = \sqrt{x}$ begrenzt wird.

8. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn die Fläche zwischen der Funktion f und der x-Achse in dem Intervall $[a, b]$ um die x-Achse rotiert:

   a) $f(x) = x^2\ , \quad a = 1\ , \quad b = 2\ ,$

   b) $f(x) = \sqrt{x+1}\ , \quad a = -1\ , \quad b = 3\ .$

9. Berechnen Sie die Mantelfläche des Rotationskörpers, der entsteht durch Rotation der Funktion $y = x^3$ um die x-Achse im Bereich $1 \leq x \leq 2$.
   Ermitteln Sie seine gesamte Oberfläche.

10. Berechnen Sie die Bogenlängen der folgenden Kurvenstücke:

    a) $y = x^{\frac{3}{2}}\ , \qquad 0 < x < 4\ ,$

    b) $x(t) = a(t - \sin t)\ ,\ y(t) = a(1 - \cos t)\ , \qquad 0 < t < 2\pi\ , \quad a \in \mathbb{R}\ ,$

    c) $r(\varphi) = a(1 + \cos\varphi)\ , \qquad 0 < \varphi < \pi\ , \quad a \in \mathbb{R}\ .$

11. Wo liegt der Schwerpunkt eines Viertelkreises mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius R?

12. Die Stirnflächen eines Rohres der Länge l besitzen die konstanten Temperaturen T_1 und T_2, $T_1 < T_2$. Wie sieht die Temperaturverteilung $T(x)$ längs des Rohres aus, wenn bekannt ist, daß die 2. Ableitung $T''(x)$ dieser Funktion verschwindet?

13. Ein Stößel bewegt sich $40mm$ nach vorn und preßt dabei eine ursprünglich entspannte Feder zusammen; diese hat eine Konstante von $k_1 = 5000N/m$. Nach $25mm$ stößt er noch auf eine zweite Feder und drückt auch diese über die restliche Strecke zusammen; sie hat $k_2 = 20000N/m$. Welche Arbeit verrichtet der Stößel bei seiner Vorwärtsbewegung?

14. Warum sind folgende Integrale uneigentliche Integrale? Berechnen Sie ihren Wert:

    $$\text{a)} \int\limits_1^2 \ln(x-1)\,\mathrm{d}x\ , \qquad \text{b)} \int\limits_0^\infty \sin x\,\mathrm{d}x\ , \qquad \text{c)} \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\ , \qquad \text{d)} \int\limits_0^\infty 2x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\ .$$

15. Berechnen Sie mit Hilfe von Potenzreihenzerlegung die folgenden Integrale mit einer Genauigkeit von 0,001 :

    $$\text{a)} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\ , \qquad \text{b)} \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\ , \qquad \text{c)} \int\limits_0^{0.5} \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\ .$$

16. Berechnen Sie näherungsweise das bestimmte Integral

    $$\int\limits_0^1 \sqrt{2 + \mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

    mit Hilfe der SIMPSON-Formel, indem Sie den Integrationsbereich in 8 Abschnitte unterteilen.