Analysis für Informatiker, 1. Semester

Übungsaufgaben, Serie 5

1. Berechnen Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = (2x^2 + 4x)(3x^3 - 2x^2 + 3)$, b) $f(x) = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$, c) $f(x) = \ln(\ln x)$,

d) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot e^{\sqrt{x}}$, e) $f(x) = \dfrac{2\sin x + \cos x}{x^2}$, f) $f(x) = \sin \ln x$,

g) $f(x) = \ln \sin(4x + 3)$, h) $f(x) = \sqrt{(x^2 + 4x)^3}$, i) $f(x) = \arctan x^2$,

j) $f(x) = \ln \dfrac{(2x-1)(x+3)(x-4)}{(x+1)(4-3x)}$ (im Kopf!), k) $f(x) = x^{2x}$,

l) $f(x) = (2x)^{\sin x}$, m) $f(x) = \dfrac{e^x + \ln x}{\sin x}$, n) $f(x) = (x+1)^{(x-1)}$,

o) $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^{\sqrt{x}}$, p) $f(x) = x^2 e^{-x}$, q) $f(x) = 4e^{-x^2+3x-1}$.

2. Berechnen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktion

$$y = f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (x - x_0)^k \,, \quad \text{wobei } x_0, a_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ und } k = 1, 2, ..., n\,.$$

3. Welchen Anstieg hat der Graph der Funktion $f(x) = \dfrac{x \cdot \sin x}{x^2 - 1}$ an den Stellen $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ und $x_1 = \pi$?

4. Geben Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = 2x^2 - 6x + 7$ im Punkt $(1, 3)$ an!

5. Aus der Beziehung $1 + x + x^2 + ... + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ leite man eine Formel her zur Berechnung der Summe $1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$.

6. Für welche reelle Zahl a besitzt das Polynom $P_3(x) = ax^3 - 5x^2 + 4x + 1$ an der Stelle $x_0 = 1$ einen Extremwert ?
Geben Sie den Typ (Minimum, Maximum) und den Funktionswert an der Stelle $x_0 = 1$ an.
Besitzt $P_3(x)$ für den berechneten Parameter a weitere Extremwerte ?
Wenn ja, dann sind Stellen, Typ und Funktionswert anzugeben.

7. Untersuchen Sie die Funktion $y = e^{-2x} + 2x$ auf Extremwerte und Wendepunkte. Bestimmen Sie die Bereiche, in denen die Funktion streng monoton fallend ist und untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion.

8. Führen Sie Kurvendiskussionen durch für die folgenden Funktionen (Definitions- und Wertebereich, Nullstellen, Polstellen, Extremwerte und Wendepunkte, Verhalten im Unendlichen und Asymptoten, Monotonie- und Krümmungsverhalten, Skizze):

a) $f(x) = x^2 e^{\frac{-x}{2}}$, b) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$, c) $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2}$.

9. Beim radioaktiven Zerfall gilt für den Zusammenhang von Mutter- und Tochtersubstanz die Beziehung
$$B(t) = \frac{a}{b-a} \cdot A_0 \cdot (\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}) \ ,$$
a und b Zerfallskonstanten, A_0 die Menge der Muttersubstanz zum Zeitpunkt $t = 0$ und $B(t)$ die zeitabhängige Menge der Tochtersubstanz sind. Zu welchem Zeitpunkt t_{max} hat B seinen maximalen Wert?

10. Von einem Dreieck seien die Summe der Länge von zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben. Wie lang müssen die beiden Seiten sein, damit der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird?

11. Einer Kugel mit Radius $R > 0$ soll ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben werden. Bestimmen Sie dessen Radius r und Höhe h in Abhängigkeit vom Kugelradius R so, daß das Volumen des Zylinders maximal wird.
Ermitteln Sie Radius und Höhe eines in die Kugel einbeschriebenen Kreiskegels mit maximalem Volumen.

12. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von l'Hospital:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}\,, \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,, \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^3}\,, \qquad \text{d)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2}{1 - \cos x}\,,$$

$$\text{e)}\ \lim_{x\to 1} \frac{\ln x^3}{2(x^2-1)}\,, \qquad \text{f)}\ \lim_{x\to 0} x \cdot \ln x\,, \qquad \text{g)}\ \lim_{x\to 0} x \cdot \cot x\,,$$

$$\text{h)}\ \lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right), \qquad \text{i)}\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right), \qquad \text{j)}\ \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \ .$$

13. Ermitteln Sie ohne Formelsammlung die Taylorreihe für die Funktion $f(x) = \sin(2x)$ im Punkt $x_0 = 0$!

14. Entwickeln Sie - ggfs. unter Zuhilfenahme bekannter Reihenentwicklungen - die nachstehenden Funktionen in eine Taylorreihe von Grad n an der angegebenen Entwicklungsstelle x_0:

a) $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \cos\dfrac{x}{2}\,,\ x_0 = 0\,,\ n = 6\,,$

b) $f(x) = 4\cos\sqrt{x} + \sin 2x + \dfrac{3}{1+3x^2}\,,\ x_0 = 0\,,\ n = 4\ .$

15. Berechnen Sie mit einer Taylorreihe für $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ näherungsweise $(n = 8)$ den Wert für $\ln 5$!

16. Schätzen Sie die notwendige Verlängerung einer Würfelseite ab, wenn das Volumen des Würfels von $27\mathrm{m}^3$ auf $27.2\mathrm{m}^3$ vergrößert werden soll!

17. Für eine Wechselspannung $u(t) = u_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ sei $u_0 = 220\mathrm{V}$, $\omega = 0.1\pi\mathrm{ms}^{-1}$ und $\varphi = \pi/3$. Gemessen wurde $t_1 = (5.0 \pm 0.1)\mathrm{ms}$. Berechnen Sie den absoluten und relativen Fehler der Spannung.

18. Lösen Sie die Gleichung $x^2 + 2 = \mathrm{e}^x$ mit Hilfe des Newtonverfahrens mit einer Genauigkeit von 4 Dezimalstellen. Machen Sie sich zunächst klar, daß es genau eine Lösung gibt und daß $x_0 = 1,5$ ein geeigneter Startwert ist.