Analysis für Informatiker, 1. Semester

Übungsaufgaben, Serie 3

1. Bestimmen Sie die Grenzwerte der nachstehenden Folgen $\{a_n\}$:

a) $a_n = \dfrac{3n+3}{3-4n}$, b) $a_n = \dfrac{(3n+3)^2}{3-4n^2}$,

c) $a_n = \dfrac{6n^3+n-1}{8n^2+4}$, d) $a_n = \dfrac{6n^3+n-1}{8n^4+4}$,

e) $a_n = \sqrt{4n^2+5n+2} - 2n$, f) $a_n = n\sqrt{1+\frac{1}{n}} - n$,

g) $a_n = \left(\dfrac{n+2}{n-3}\right)^n$, h) $a_n = \left(\dfrac{5n+1}{5n}\right)^n$,

i) $a_n = \dfrac{2^n+2^{-n}}{3^n}$, j) $a_n = \dfrac{4^n+4^{-n}}{3^n}$,

k) $a_n = \left(1-\frac{2}{n-3}\right)^{n+7}$, l) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$,

m) $a_n = 1 + (-1)^n$, n) $a_n = \sin(n\pi)$, o) $a_n = \cos(n\pi)$.

2. Berechnen Sie a_1 und a_{100} einer arithmetischen Folge mit $a_{10} = 41$ und $a_{13} = 56$. Wie groß ist die Summe der ersten 50 Folgenglieder?

3. Von einer Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sei bekannt $a_2 = 63$, $a_5 = 1701$, $a_7 = 15309$. Entscheiden Sie nach diesen Angaben, ob es sich um eine arithmetische oder geometrische Folge handelt. Berechnen Sie auf Grundlage Ihrer Entscheidung a_{10}. Welchen Wert hat die Summe der Folgenglieder von a_1 bis a_{10}?

4. Von einer arithmetischen Folge $\{a_n\}$ sei bekannt
$$\sum_{n=1}^{4} a_n = 42 \quad \text{und} \quad \sum_{n=11}^{28} a_n = 1719\,.$$
Ermitteln Sie aus diesen Angaben a_7 und die Differenz $a_9 - a_4$!

5. Es sei a_n das n-te Glied einer arithmetischen Folge und g_n entsprechend das einer geometrischen Folge. Von beiden Folgen sind die Werte $a_3 = 4.42$, $a_{11} = 15.46$ bzw. $g_2 = 5.443$, $g_{16} = 18.189$ gegeben. Ermitteln Sie aus diesen Angaben a_{100} und g_{100} ! Für welche Werte von n sind a_n bzw. g_n jeweils erstmalig größer als 100?

6. Ein elektrisches Signal der Ausgangsstärke 24V passiert 18 Knoten eines Netzwerkes. Dabei verliert es in jedem Knoten denselben Prozentsatz der jeweils ankommenden Spannung. Am Ausgang des 18. Knotens hat es noch 6.6V. Wieviel Prozent der jeweiligen Spannung gehen in **einem** Knoten verloren?

7. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2+1}$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k!}$, c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(3k)!}$, d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9k-4}{7k+1}\right)^k$.

und

e) $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\cdots$, f) $\dfrac{1^3+1}{1^4-2}+\dfrac{2^3+1}{2^4-2}+\dfrac{3^3+1}{3^4-2}+\dfrac{4^3+1}{4^4-2}+\cdots$,

g) $1^{-1}+2^{-2}+3^{-3}+4^{-4}+\cdots$, h) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1}+2}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+2}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+2}+\cdots$.

8. Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen:

a) $\frac{1}{1 \cdot 2}x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^2 + \frac{1}{3 \cdot 4}x^3 + \cdots$ b) $x + 2x^2 + 3! \cdot x^3 + 4! \cdot x^4 + \cdots$

und

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$, d) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{7}{k} \cdot x\right)^k$, e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3x^k}{(2k)!}$,

f) $\sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\, 3^{k-1}\, x^{k-1}$, g) $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{x}{3}\right)^k$?

9. Es ist bekannt, daß die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

für $|q| < 1$ konvergiert. Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ konvergiert dann die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^k x^{3k-1}$$

und welcher Wert ergibt sich im Konvergenzfall in Abhängigkeit von x?

10. Geben Sie den Konvergenzbereich der folgenden Potenzreihen an:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (2-x)^k$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(k+1)^{k^2}}$.