

Analysis für Informatiker, 1. Semester

Übungsaufgaben, Serie 1

1. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke so weit wie möglich:

- a) $100 - [(b + 20) - (40 - b)]$ b) $[3a - 2(4b + 2x)] - 2[3b - (4x - 2a + b)]$
c) $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$ d) $x^3 - y^3 - (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
e) $[a(a^2 + a - 1) - a^2(a + 1)] \cdot 5$.

2. Kürzen Sie die Terme so weit wie möglich:

- a) $\frac{3a^2b^3c}{4ab^2c^3}$ b) $\frac{5(x - 2)}{5x - 2}$ c) $\frac{2a + a^2 + 1}{2a^2 - 2}$.

3. Fassen Sie folgende Ausdrücke jeweils zu einem Bruch zusammen:

- a) $\frac{3}{4a} - \frac{2}{5b}$ b) $\frac{2x - 3}{x^2(x + 1)} - \frac{3 - 4x}{x(x + 1)^2}$ c) $\frac{m}{m + n} + \frac{2mn}{m^2 - n^2} - \frac{n}{m - n}$.

4. Schreiben Sie folgende Terme in Potenzschreibweise (ohne Verwendung von Wurzelzeichen):

- a) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ b) $\frac{a^3\sqrt[3]{a^5b}}{\sqrt{ab}}$ c) $\sqrt[4]{xy^3} \cdot \sqrt[6]{x^3y}$.

5. Ermitteln Sie durch Überlegen (d.h. ohne Taschenrechner!) die folgenden Logarithmen:

- a) $\log_3 27$ b) $\log_{0,5} 0,125$ c) $\log_{22} 1$ d) $\ln e^2$ e) $\lg 0,001$.

6. Bestimmen Sie x in folgenden Gleichungen:

- a) $\log_7 49 = x$ b) $\log_x 1024 = 10$ c) $\log_3 x = 4$ d) $\log_x 0,1 = -1$
e) $2 \ln x = \ln 4$ f) $\lg 5^x + \lg 2^x - 1 = 0$ g) $\lg x^6 = \lg x^3 + 6$ h) $2^{\lg x} = 2 \cdot 3^{\lg x}$.

7. Berechnen Sie die folgenden Summen bzw. Produkte:

- a) $\sum_{k=-3}^2 (2k + 1)$ b) $\sum_{i=2}^6 3$ c) $\sum_{m=N}^{N+3} (2N - m)$ d) $\sum_{m=0}^2 \sum_{k=1}^3 (k - 2m)$
e) $\prod_{j=2}^5 (j + 1)$ f) $\prod_{k=-8}^1 k^7$.

8. Bestimmen Sie der Wert der folgenden Binomialkoeffizienten: $\binom{7}{4}$, $\binom{100}{96}$, $\binom{n}{n-1}$.

9. Für welche natürlichen Zahlen k und l gilt $\binom{k+1}{2} = 78$ und $\binom{l+2}{l} = 66$?

10. Wenden Sie die binomischen Formeln an und vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

- a) $(-a - b)(a - b)$ b) $(3b + 2)^2 - (5b - 3)^2$ c) $2u(u + v) - (u - v)(u + v)$.

11. Zerlegen Sie folgende Summen in Faktoren:

- a) $49x^2 - 81y^2$ b) $(2m - n)^2 - (n + 2m)^2$ c) $-25x^2 - 100y^4 + 100xy^2$.

12. Stellen Sie die Formeln nach den angegebenen Größen um:

- a) $E_{\text{pot}} = mg(h_2 - h_1)$ nach h_1 b) $C = 4\pi K \cdot \frac{R_1 R}{R_1 - R}$ nach R
c) $I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ nach t d) $E = \frac{U}{r \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$ nach r_2 .

13. Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $18x^2 - 3x = 10$

b) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} = 9$

c) $\lg(25x+20) - \lg(3x+1) = 1$

d) $(a^{x-2})^{x+2} = (a^{x+3})^{x-4}$

e) $\frac{x-2}{x+2} - \frac{x+4}{x-2} = 2\frac{x-38}{x^2-4}$.

14. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen:

a) $\frac{7x-2}{10-5x} \leq 1$

b) $(x-1)(x+2) < 0$

c) $x^2 + x - 4 \geq 2$

d) $x+2 \leq \frac{5}{x-2}$

e) $x^3 - 7x^2 + 12x \geq 0$

f) $|x-2| < 1$

g) $|x| < |2x-2|$.

15. Durch einen Rohrbruch wurde ein Keller überflutet. Er wird durch die Feuerwehr mit drei gleichmäßig und gleichzeitig arbeitenden Pumpen leergepumpt. Wieviel Minuten werden dafür benötigt, wenn die erste Pumpe allein 6 Stunden, die zweite 4 Stunden und die dritte 2 Stunden brauchen würde?

16. Durch Verbesserungen im Betrieb kann ein Eisenbahnzug eine um 9 km/h höhere Durchschnittsgeschwindigkeit erreichen und erzielt dadurch auf einer Strecke von 180 km eine Zeiteinsparung von 40 Minuten. Welche Zeit benötigt der Zug nach dieser Einsparung für die Strecke?

17. Für welche Werte des reellen Parameters λ besitzt die quadratische Gleichung $(\lambda-1)x^2 - 2(\lambda+1)x + \lambda - 2 = 0$ zusammenfallende Lösungen?