Analysis und Lineare Algebra I für Informatiker
– Übungsaufgaben und Lösungshinweise –

Joachim Ohser

1. November 2004

Inhaltsverzeichnis

Anhang A

Übungsaufgaben für die Vorlesung Analysis

A.1 Übungsaufgaben Analysis, Serie 1

1. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke so weit wie möglich:

   a) $100 - [(b + 20) - (40 - b)]$ b) $[3a - 2(4b + 2x)] - 2[3b - (4x - 2a + b)]$

   c) $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$ d) $x^3 - y^3 - (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

   e) $[a(a^2 + a - 1) - a^2(a + 1)] \cdot 5$.

2. Kürzen Sie die Terme so weit wie möglich:

   a) $\dfrac{3a^2b^3c}{4ab^2c^3}$ b) $\dfrac{5(x - 2)}{5x - 2}$ c) $\dfrac{2a + a^2 + 1}{2a^2 - 2}$.

3. Fassen Sie folgende Ausdrücke jeweils zu einem Bruch zusammen:

   a) $\dfrac{3}{4a} - \dfrac{2}{5b}$ b) $\dfrac{2x - 3}{x^2(x + 1)} - \dfrac{3 - 4x}{x(x + 1)^2}$ c) $\dfrac{m}{m + n} + \dfrac{2mn}{m^2 - n^2} - \dfrac{n}{m - n}$.

4. Schreiben Sie folgende Terme in Potenzschreibweise (ohne Verwendung von Wurzelzeichen):

   a) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ b) $\dfrac{a^3\sqrt[3]{a^5}b}{\sqrt{ab}}$ c) $\sqrt[4]{xy^3} \cdot \sqrt[6]{x^3y}$.

5. Ermitteln Sie durch Überlegen (d.h. ohne Taschenrechner!) die folgenden Logarithmen:

   a) $\log_3 27$ b) $\log_{0,5} 0,125$ c) $\log_{22} 1$ d) $\ln \mathrm{e}^2$ e) $\lg 0,001$.

6. Bestimmen Sie x in folgenden Gleichungen:

   a) $\log_7 49 = x$ b) $\log_x 1024 = 10$ c) $\log_3 x = 4$ d) $\log_x 0,1 = -1$

   e) $2\ln x = \ln 4$ f) $\lg 5^x + \lg 2^x - 1 = 0$ g) $\lg x^6 = \lg x^3 + 6$ h) $2^{\lg x} = 2 \cdot 3^{\lg x}$.

7. Berechnen Sie die folgenden Summen bzw. Produkte:

a) $\sum\limits_{k=-3}^{2}(2k+1)$ b) $\sum\limits_{i=2}^{6}3$ c) $\sum\limits_{m=N}^{N+3}(2N-m)$ d) $\sum\limits_{m=0}^{2}\sum\limits_{k=1}^{3}(k-2m)$

e) $\prod\limits_{j=2}^{5}(j+1)$ f) $\prod\limits_{k=-8}^{1}k^7$.

8. Bestimmen Sie der Wert der folgenden Binomialkoeffizienten: $\binom{7}{4}$, $\binom{100}{96}$, $\binom{n}{n-1}$.

9. Für welche natürlichen Zahlen k und l gilt $\binom{k+1}{2} = 78$ und $\binom{l+2}{l} = 66$?

10. Wenden Sie die binomischen Formeln an und vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

    a) $(-a-b)(a-b)$ b) $(3b+2)^2-(5b-3)^2$ c) $2u(u+v)-(u-v)(u+v)$.

11. Zerlegen Sie folgende Summen in Faktoren:

    a) $49x^2-81y^2$ b) $(2m-n)^2-(n+2m)^2$ c) $-25x^2-100y^4+100xy^2$.

12. Stellen Sie die Formeln nach den angegebenen Größen um:

    a) $E_{\text{pot}} = mg(h_2-h_1)$ nach h_1 b) $C = 4\pi K \cdot \frac{R_1 R}{R_1 - R}$ nach R

    c) $I = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}$ nach t d) $E = \dfrac{U}{r\ln(\frac{r_2}{r_1})}$ nach r_2 .

13. Lösen Sie folgende Gleichungen:

    a) $18x^2-3x = 10$

    b) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+8} = 9$

    c) $\lg(25x+20)-\lg(3x+1) = 1$

    d) $\left(a^{x-2}\right)^{x+2} = \left(a^{x+3}\right)^{x-4}$

    e) $\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{x+4}{x-2} = 2\dfrac{x-38}{x^2-4}$.

14. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen:

    a) $\dfrac{7x-2}{10-5x} \leq 1$

    b) $(x-1)(x+2) < 0$

    c) $x^2+x-4 \geq 2$

    d) $x+2 \leq \dfrac{5}{x-2}$

    e) $x^3-7x^2+12x \geq 0$

    f) $|x-2| < 1$

    g) $|x| < |2x-2|$.

15. Durch einen Rohrbruch wurde ein Keller überflutet. Er wird durch die Feuerwehr mit drei gleichmäßig und gleichzeitig arbeitenden Pumpen leergepumpt. Wieviel Minuten werden dafür benötigt, wenn die erste Pumpe allein 6 Stunden, die zweite 4 Stunden und die dritte 2 Stunden brauchen würde?

16. Durch Verbesserungen im Betrieb kann ein Eisenbahnzug eine um 9 km/h höhere Durchschnittsgeschwindigkeit erreichen und erzielt dadurch auf einer Strecke von 180 km eine Zeiteinsparung von 40 Minuten. Welche Zeit benötigt der Zug nach dieser Einsparung für die Strecke?

17. Für welche Werte des reellen Parameters λ besitzt die quadratische Gleichung $(\lambda-1)x^2-2(\lambda+1)x+\lambda-2=0$ zusammenfallende Lösungen?

A.2 Übungsaufgaben Analysis, Serie 2

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

a)	$\left(a^{x-2}\right)^{x+2}=\left(a^{x+3}\right)^{x-4}\ ,\ a>0\,,$	b)	$3^{(2^x)}=2^{(3^x)}\,,$
c)	$\lg(x-1)+\lg 3=\lg(x^2-1)\,,$	d)	$\dfrac{10}{\lg x-2}-\dfrac{5}{\lg x+1}=4\,,$
e)	$x^4-6x^3-2x^2+50x-75=0\,,$	f)	$2\sqrt{3+x}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x-2}\,,$
g)	$x^2+(5-2\mathrm{i})x+5(1-\mathrm{i})=0\,,$	h)	$x^2+(1-2\mathrm{i})x-2\mathrm{i}=0\,.$

2. a) Bestimmen Sie $\lambda\in\mathbb{R}$ so, daß die Gleichung $\lambda x^2-(1-2\lambda)x+\lambda-2=0$ zwei verschiedene reellwertige Lösungen hat.
b) Für welche $a>0$ existieren reellwertige Lösungen der Gleichung $x^2-4x-\log_2 a=0$?

3. Fassen Sie folgende Ausdrücke so weit wie möglich zusammen und vereinfachen Sie sie:
a) $\dfrac{(n+1)!}{n\cdot(n-1)!}$, b) $\dfrac{1}{(n-1)!}+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{(n+1)!}$.

4. Weisen Sie nach, daß folgende Zusammenhänge für Binomialkoeffizienten gelten:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}&=\binom{n+1}{k+1}\\ \binom{n}{k+1}&=\binom{n}{k}\cdot\frac{n-k}{k+1}\\ \binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}&=\binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

5. Zeigen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion, dass folgende Zusammenhänge für Binomialkoeffizienten für alle $n\in\mathbb{N}$ gelten:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}&=2^n\\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}&=0\end{aligned}$$

6. Vereinfachen Sie mit Hilfe binomischer Formeln den folgenden Ausdruck:

$$\frac{a^4b^2-a^2b^2}{ab+b}\ .$$

7. Für die positiven Zahlen a und b gelten Schranken $0 < m \leq a, b \leq M$. Geben Sie Schranken für $a \pm b$, $a \cdot b$ und a/b an!

8. Zwei Widerstände von 75Ω und 120Ω sind parallelgeschaltet; der erste hat eine Toleranz von 2Ω und der zweite von 4%. Ermitteln Sie den Gesamtwiderstand und Schranken für seinen absoluten und relativen Fehler.

9. Für zwei Größen a und b wurden folgende Werte gemessen:
$$a = 32,6 \pm 0,1\text{mm und } b = 18,4 \pm 0,1\text{mm} \quad .$$
Berechnen Sie den Wert für $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ und $\frac{a}{b}$ und geben Sie jeweils Abschätzungen für den absoluten und relativen Fehler an.

10. Geben Sie die Zahl 365 im Dual- und Hexadezimalsystem an!

11. Die Hexadezimalzahlen 8DF1 und C39A sind im Dezimal– und Dualsystem anzugeben!

A.3 Übungsaufgaben Analysis, Serie 3

1. Bestimmen Sie die Grenzwerte der nachstehenden Folgen $\{a_n\}$:

a) $a_n = \dfrac{3n+3}{3-4n}$, b) $a_n = \dfrac{(3n+3)^2}{3-4n^2}$,

c) $a_n = \dfrac{6n^3+n-1}{8n^2+4}$, d) $a_n = \dfrac{6n^3+n-1}{8n^4+4}$,

e) $a_n = \sqrt{4n^2+5n+2} - 2n$, f) $a_n = n\sqrt{1+\frac{1}{n}} - n$,

g) $a_n = \left(\dfrac{n+2}{n-3}\right)^n$, h) $a_n = \left(\dfrac{5n+1}{5n}\right)^n$,

i) $a_n = \dfrac{2^n+2^{-n}}{3^n}$, j) $a_n = \dfrac{4^n+4^{-n}}{3^n}$,

k) $a_n = \left(1 - \frac{2}{n-3}\right)^{n+7}$, l) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$,

m) $a_n = 1 + (-1)^n$, n) $a_n = \sin(n\pi)$, o) $a_n = \cos(n\pi)$.

2. Berechnen Sie a_1 und a_{100} einer arithmetischen Folge mit $a_{10} = 41$ und $a_{13} = 56$. Wie groß ist die Summe der ersten 50 Folgenglieder?

3. Von einer Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sei bekannt $a_2 = 63$, $a_5 = 1701$, $a_7 = 15309$. Entscheiden Sie nach diesen Angaben, ob es sich um eine arithmetische oder geometrische Folge handelt. Berechnen Sie auf Grundlage Ihrer Entscheidung a_{10}. Welchen Wert hat die Summe der Folgenglieder von a_1 bis a_{10}?

4. Von einer arithmetischen Folge $\{a_n\}$ sei bekannt
$$\sum_{n=1}^{4} a_n = 42 \quad \text{und} \quad \sum_{n=11}^{28} a_n = 1719\,.$$
Ermitteln Sie aus diesen Angaben a_7 und die Differenz $a_9 - a_4$!

5. Es sei a_n das n-te Glied einer arithmetischen Folge und g_n entsprechend das einer geometrischen Folge. Von beiden Folgen sind die Werte $a_3 = 4.42,\ a_{11} = 15.46$ bzw. $g_2 = 5.443,\ g_{16} = 18.189$ gegeben. Ermitteln Sie aus diesen Angaben a_{100} und g_{100} ! Für welche Werte von n sind a_n bzw. g_n jeweils erstmalig größer als 100?

6. Ein elektrisches Signal der Ausgangsstärke 24V passiert 18 Knoten eines Netzwerkes. Dabei verliert es in jedem Knoten denselben Prozentsatz der jeweils ankommenden Spannung. Am Ausgang des 18. Knotens hat es noch 6.6V. Wieviel Prozent der jeweiligen Spannung gehen in **einem** Knoten verloren?

7. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2+1}\,, \qquad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k!}\,, \qquad \text{c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(3k)!}\,, \qquad \text{d)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9k-4}{7k+1}\right)^k .$$

und

$$\text{e)}\ \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\cdots\,, \qquad \text{f)}\ \frac{1^3+1}{1^4-2}+\frac{2^3+1}{2^4-2}+\frac{3^3+1}{3^4-2}+\frac{4^3+1}{4^4-2}+\cdots\,,$$

$$\text{g)}\ 1^{-1}+2^{-2}+3^{-3}+4^{-4}+\cdots\,, \quad \text{h)}\ \frac{1}{\sqrt[3]{1}+2}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}+2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}+2}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}+2}+\cdots .$$

8. Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen:

$$\text{a)}\ \frac{1}{1\cdot 2}x+\frac{1}{2\cdot 3}x^2+\frac{1}{3\cdot 4}x^3+\cdots \qquad \text{b)}\ x+2x^2+3!\cdot x^3+4!\cdot x^4+\cdots$$

und

$$\text{c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}\,, \qquad \text{d)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{7}{k}\cdot x\right)^k, \qquad \text{e)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3x^k}{(2k)!}\,,$$

$$\text{f)} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\,3^{k-1}\,x^{k-1}\,, \qquad \text{g)} \sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{x}{3}\right)^k ?$$

9. Es ist bekannt, daß die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

für $|q| < 1$ konvergiert. Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ konvergiert dann die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^k x^{3k-1}$$

und welcher Wert ergibt sich im Konvergenzfall in Abhängigkeit von x?

10. Geben Sie den Konvergenzbereich der folgenden Potenzreihen an:

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot(2-x)^k \qquad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(k+1)^{k^2}} .$$

A.4 Übungsaufgaben Analysis, Serie 4

1. Wählen Sie die Parameter a und b so, daß die Funktion $y = ax + b$ durch das Wertepaar $(5, 3)$ geht und a) gerade oder b) ungerade sei.

2. Bestimmen Sie Definitionsbereich, Wertebereich und Umkehrfunktion für:

   a) $y = \frac{1}{1-x}$, b) $y = \sqrt{x^2+4} + 2$,

   c) $y = \frac{2^x}{1+2^x}$, d) $y = \frac{x-2}{x+4}$.

3. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf ihre Symmetrieeigenschaften:

   a) $y = -|x|$, b) $y = -x^3$, c) $y = -\frac{2}{1+x^2}$, d) $y = x^4 - 2x^2$,

   e) $y = x\cos x$, f) $y = x^2 \sin x$, g) $y = \sin x - \cos x$.

4. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen beschränkt sind:

   a) $y = \frac{3}{2}x - 2$, b) $y = -x^2 + 1$, c) $y = -\cos x + 1$.

5. Welche der folgenden Funktionen sind periodisch:

   a) $y = \sin^2 x$, b) $y = \sin x^2$, c) $y = 1 + \tan x$,
   d) $y = 5$, e) $y = x\cos x$.

6. Skizzieren Sie die folgenden Funktionen:

   a) $y = x + \frac{1}{x}$, b) $y = x^2 + \frac{1}{x}$, c) $y = x + \frac{1}{x^2}$,

   d) $y = \frac{1}{1+x^2}$, e) $y = \frac{1}{1-x^2}$,

   f) $y = \sin x$, g) $y = 4\sin x$, h) $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$, i) $y = \sin(4x)$,

   k) $$y = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & : \quad x \le 0 \\ 1 & : \quad 0 < x \le 2 \\ x - 1 & : \quad 2 < x \end{cases}.$$

7. Wie sieht der Graph folgender Funktionen aus, wenn der Graph von $f(x)$ bekannt ist:

   a) $g(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$, b) $h(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$?

8. Es seinen $P_n(x)$ und $P_m(x)$ Polynome in x mit $m > n$. Welchen Grad haben die folgenden Polynome:

   a) $P_n(x) + P_m(x)$, b) $P_n(x) - P_m(x)$, c) $P_n(x) \cdot P_m(x)$, d) $3 \cdot P_n(x)$, e) $x^3 \cdot P_n(x)$?

9. Bestimmen Sie a und b in $f(x) = ax^2 + bx + c$ unter der Bedingung
   $f(x+1) - f(x) = 8x + 3$.

10. Es sei $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt

    a) $f(x) = f(0)$, b) $f(x) = f(-1)$!

11. Die Gleichung für einen Trägerbogen einer Eisenbahnbrücke sei eine Parabel 2. Ordnung. Die Länge der Brücke betrage 49m, die höchste Höhe des Bogens in der Mitte der Brücke sei 7m. Bei Brückenanfang und -ende berührt der Träger den Erdboden (Höhe 0m).
    a) Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel!
    b) In welchem Abstand von der Brückenmitte hat der Bogen eine Höhe von 3.50?

12. Skizzieren Sie nach Ermittlung von Nullstellen, Scheitelpunkt und Schnittpunkt mit der y-Achse
$$f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{10}{3} \; !$$

13. Der durchhängende Draht einer Hochspannungsleitung hat die Form einer quadratischen Parabel; die Masten haben eine Höhe von 12m und stehen im ebenen Gelände in einem Abstand von 160m. Die Leitung hänge zwischen beiden Masten an der tiefsten Stelle 5m durch. In welcher Höhe über dem Erdboden verläuft die Leitung in einer Entfernung von 20m vom Mast?

14. Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c der quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ mit den Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 6$ und dem Scheitelwert $y_S = 20$.

15. Ermitteln Sie Nullstellen, Polstellen, Lücken und Asymptoten der folgenden Funktionen:
$$\text{a) } f(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x - 2}\,, \quad \text{b) } f(x) = x - 4 + \frac{6x + 6}{x^2 - 1}\,, \quad \text{c) } f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^2 - 4}\,.$$

16. Bestimmen Sie sämtliche Nullstellen der folgenden Polynome:
$$\begin{array}{lrcl} \text{a)} & P_3(x) & = & x^3 + 10x^2 + 31x + 30\,, \\ \text{b)} & P_4(x) & = & x^4 + 15x^3 + 79x^2 + 145x \;\; ! \end{array}$$
    Geben Sie die Polynome in Produktdarstellung an!

17. Ermitteln Sie für das Polynom $P_5(x) = x^5 - x^4 - 19x^3 - 11x^2 + ax + 200$ den Koeffizienten a so, daß das resultierende Polynom die Nullstelle $x = 2$ besitzt.

A.5 Übungsaufgaben Analysis, Serie 5

1. Berechnen Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\begin{array}{llllll}
\text{a)} & f(x) = (2x^2 + 4x)(3x^3 - 2x^2 + 3)\,, & \text{b)} & f(x) = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2\,, & \text{c)} & f(x) = \ln(\ln x)\,, \\
\text{d)} & f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,, & \text{e)} & f(x) = \dfrac{2\sin x + \cos x}{x^2}\,, & \text{f)} & f(x) = \sin \ln x\,, \\
\text{g)} & f(x) = \ln \sin(4x + 3)\,, & \text{h)} & f(x) = \sqrt{(x^2 + 4x)^3}\,, & \text{i)} & f(x) = \arctan x^2\,, \\
\text{j)} & f(x) = \ln \dfrac{(2x - 1)(x + 3)(x - 4)}{(x + 1)(4 - 3x)} & & \text{(im Kopf!)}\,, & \text{k)} & f(x) = x^{2x}\,, \\
\text{l)} & f(x) = (2x)^{\sin x}\,, & \text{m)} & f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \ln x}{\sin x}\,, & \text{n)} & f(x) = (x + 1)^{(x-1)}\,, \\
\text{o)} & f(x) = (x^2 + 2x - 1)^{\sqrt{x}}\,, & \text{p)} & f(x) = x^2 e^{-x}\,, & \text{q)} & f(x) = 4e^{-x^2+3x-1}\,.
\end{array}$$

2. Berechnen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktion

$$y = f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (x - x_0)^k \ , \quad \text{wobei} \ \ x_0, a_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ und } k = 1, 2, ..., n \ .$$

3. Welchen Anstieg hat der Graph der Funktion $f(x) = \dfrac{x \cdot \sin x}{x^2 - 1}$ an den Stellen $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ und $x_1 = \pi$?

4. Geben Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = 2x^2 - 6x + 7$ im Punkt $(1, 3)$ an!

5. Aus der Beziehung $1 + x + x^2 + ... + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ leite man eine Formel her zur Berechnung der Summe $1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$.

6. Für welche reelle Zahl a besitzt das Polynom $P_3(x) = ax^3 - 5x^2 + 4x + 1$ an der Stelle $x_0 = 1$ einen Extremwert ?
   Geben Sie den Typ (Minimum, Maximum) und den Funktionswert an der Stelle $x_0 = 1$ an.
   Besitzt $P_3(x)$ für den berechneten Parameter a weitere Extremwerte ?
   Wenn ja, dann sind Stellen, Typ und Funktionswert anzugeben.

7. Untersuchen Sie die Funktion $y = e^{-2x} + 2x$ auf Extremwerte und Wendepunkte.
   Bestimmen Sie die Bereiche, in denen die Funktion streng monoton fallend ist und untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion.

8. Führen Sie Kurvendiskussionen durch für die folgenden Funktionen (Definitions- und Wertebereich, Nullstellen, Polstellen, Extremwerte und Wendepunkte, Verhalten im Unendlichen und Asymptoten, Monotonie- und Krümmungsverhalten, Skizze):

$$\text{a)} \quad f(x) = x^2 \mathrm{e}^{\frac{-x}{2}} \ , \qquad \text{b)} \quad f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} \ , \qquad \text{c)} \quad f(x) = x + \sqrt[3]{x^2} \ .$$

9. Beim radioaktiven Zerfall gilt für den Zusammenhang von Mutter- und Tochtersubstanz die Beziehung

$$B(t) = \frac{a}{b - a} \cdot A_0 \cdot (\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}) \ ,$$

   a und b Zerfallskonstanten, A_0 die Menge der Muttersubstanz zum Zeitpunkt $t = 0$ und $B(t)$ die zeitabhängige Menge der Tochtersubstanz sind. Zu welchem Zeitpunkt t_{max} hat B seinen maximalen Wert?

10. Von einem Dreieck seien die Summe der Länge von zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben. Wie lang müssen die beiden Seiten sein, damit der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird?

11. Einer Kugel mit Radius $R > 0$ soll ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben werden. Bestimmen Sie dessen Radius r und Höhe h in Abhängigkeit vom Kugelradius R so, daß das Volumen des Zylinders maximal wird.
    Ermitteln Sie Radius und Höhe eines in die Kugel einbeschriebenen Kreiskegels mit maximalem Volumen.

12. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von l'Hospital:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\,,\qquad \text{b)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}\,,\qquad \text{c)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^3}\,,\qquad \text{d)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2}{1-\cos x}\,,$$

$$\text{e)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln x^3}{2(x^2-1)}\,,\qquad \text{f)}\ \lim_{x\to 0} x\cdot\ln x\,,\qquad \text{g)}\ \lim_{x\to 0} x\cdot\cot x\,,$$

$$\text{h)}\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)\,,\qquad \text{i)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)\,,\qquad \text{j)}\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\,.$$

13. Ermitteln Sie ohne Formelsammlung die Taylorreihe für die Funktion $f(x)=\sin(2x)$ im Punkt $x_0=0$!

14. Entwickeln Sie - ggfs. unter Zuhilfenahme bekannter Reihenentwicklungen - die nachstehenden Funktionen in eine Taylorreihe von Grad n an der angegebenen Entwicklungsstelle x_0:

    a) $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-\cos\frac{x}{2}\,,\ x_0=0\,,\ n=6\,,$

    b) $f(x)=4\cos\sqrt{x}+\sin 2x+\frac{3}{1+3x^2}\,,\ x_0=0\,,\ n=4\,.$

15. Berechnen Sie mit einer Taylorreihe für $\ln\frac{1+x}{1-x}$ näherungsweise $(n=8)$ den Wert für $\ln 5$!

16. Schätzen Sie die notwendige Verlängerung einer Würfelseite ab, wenn das Volumen des Würfels von $27\mathrm{m}^3$ auf $27.2\mathrm{m}^3$ vergrößert werden soll!

17. Für eine Wechselspannung $u(t)=u_0\cdot\sin(\omega t+\varphi)$ sei $u_0=220\mathrm{V}$, $\omega=0.1\pi\mathrm{ms}^{-1}$ und $\varphi=\pi/3$. Gemessen wurde $t_1=(5.0\pm 0.1)\mathrm{ms}$. Berechnen Sie den absoluten und relativen Fehler der Spannung.

18. Lösen Sie die Gleichung $x^2+2=\mathrm{e}^x$ mit Hilfe des Newtonverfahrens mit einer Genauigkeit von 4 Dezimalstellen. Machen Sie sich zunächst klar, daß es genau eine Lösung gibt und daß $x_0=1,5$ ein geeigneter Startwert ist.

A.6 Übungsaufgaben Analysis, Serie 6

1. Berechnen Sie folgende Integrale

    a) $\int(3x^2-4x+1)\,\mathrm{d}x$, b) $\int\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$, c) $\int 2(\mathrm{e}^x+5)\,\mathrm{d}x$,

    d) $\int\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, e) $\int\frac{6-x^2\sqrt[3]{x}}{3x}\,\mathrm{d}x$, f) $\int(2\sin x+3\cos x)\,\mathrm{d}x$.

2. Berechnen Sie durch geeignete Substitution

a) $\int \cos(\frac{x}{3})\,\mathrm{d}x$, b) $\int \frac{1}{(2-x)^3}\,\mathrm{d}x$, c) $\int \sqrt[3]{5x-1}\,\mathrm{d}x$,

d) $\int x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$, e) $\int \frac{3x^2}{2+x^3}\,\mathrm{d}x$, f) $\int x\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$,

g) $\int \sqrt{1+\cos^2 x}\cdot\sin(2x)\,\mathrm{d}x$, h) $\int \cos^5 x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$, i) $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$,

j) $\int \frac{1}{x^2+5}\,\mathrm{d}x$, k) $\int \frac{x}{x^2+7}\,\mathrm{d}x$, l) $\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$,

m) $\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$.

3. Berechnen Sie durch partielle Integration die Gesamtheit aller Stammfunktionen zu

a) $f(x) = x\sin x$, b) $f(x) = x^2\sin x$, c) $f(x) = \mathrm{e}^x\sin x$,

d) $f(x) = \ln x$, e) $f(x) = x\cdot\ln x$, f) $f(x) = \arctan x$.

4. Gesucht sind mit Hilfe von Partialbruchzerlegung alle Funktionen $F(x)$, deren erste Ableitungen gegeben sind durch

a) $F'(x) = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}$, b) $F'(x) = \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}$,

c) $F'(x) = \frac{3x+2}{x(x+1)^3}$, d) $F'(x) = \frac{1}{x^3+3x^2-4}$,

e) $F'(x) = \frac{1}{x^4+5x^2+4}$, f) $F'(x) = \frac{x^2-5}{(x-1)(x^2-2x+2)}$.

5. Berechnen Sie den Wert der folgenden bestimmten Integrale:

a) $\int_0^1 (x-2\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$, b) $\int_1^{\mathrm{e}} \sqrt[3]{x}\ln x\,\mathrm{d}x$, c) $\int_1^4 (2x-\frac{9}{2}\sqrt{x}-\frac{8}{x^2})\,\mathrm{d}x$,

d) $\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1-2x\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$, e) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 5x\cdot\cos 7x\,\mathrm{d}x$, f) $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$,

g) $\int_0^2 \frac{x^2}{x^6+4}\,\mathrm{d}x$, h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$, i) $\int_{-0.5}^{0.5} \frac{3^x}{1+9^x}\,\mathrm{d}x$,

j) $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sin(\ln x)}{5x}\,\mathrm{d}x$, k) $\int_0^{0.5} \mathrm{e}^{\sin\pi x}\cos\pi x\,\mathrm{d}x$, l) $\int_0^{\pi} x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$.

6. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Kurve $y = 4x(x^2-4)$ und der x-Achse im Intervall $-4 \le x \le 4$ eingeschlossen wird.

7. Berechnen Sie den Inhalt des Sektors, der durch die folgenden drei Kurven $y_1(x) = \frac{x}{2}$, $y_2(x) = \frac{x}{3}$, $y_3(x) = \sqrt{x}$ begrenzt wird.

8. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn die Fläche zwischen der Funktion f und der x-Achse in dem Intervall $[a, b]$ um die x-Achse rotiert:

   a) $f(x) = x^2$, $\quad a = 1$, $\quad b = 2$,

   b) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $\quad a = -1$, $\quad b = 3$.

9. Berechnen Sie die Mantelfläche des Rotationskörpers, der entsteht durch Rotation der Funktion $y = x^3$ um die x-Achse im Bereich $1 \le x \le 2$.
   Ermitteln Sie seine gesamte Oberfläche.

10. Berechnen Sie die Bogenlängen der folgenden Kurvenstücke:

    a) $y = x^{\frac{3}{2}}$, $\quad 0 < x < 4$,

    b) $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $\quad 0 < t < 2\pi$, $\quad a \in \mathbb{R}$,

    c) $r(\varphi) = a(1 + \cos\varphi)$, $\quad 0 < \varphi < \pi$, $\quad a \in \mathbb{R}$.

11. Wo liegt der Schwerpunkt eines Viertelkreises mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius R?

12. Die Stirnflächen eines Rohres der Länge l besitzen die konstanten Temperaturen T_1 und T_2, $T_1 < T_2$. Wie sieht die Temperaturverteilung $T(x)$ längs des Rohres aus, wenn bekannt ist, daß die 2. Ableitung $T''(x)$ dieser Funktion verschwindet?

13. Ein Stößel bewegt sich $40mm$ nach vorn und preßt dabei eine ursprünglich entspannte Feder zusammen; diese hat eine Konstante von $k_1 = 5000N/m$. Nach $25mm$ stößt er noch auf eine zweite Feder und drückt auch diese über die restliche Strecke zusammen; sie hat $k_2 = 20000N/m$. Welche Arbeit verrichtet der Stößel bei seiner Vorwärtsbewegung?

14. Warum sind folgende Integrale uneigentliche Integrale? Berechnen Sie ihren Wert:

    a) $\displaystyle\int_1^2 \ln(x-1)\,\mathrm{d}x$, $\qquad$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \sin x\,\mathrm{d}x$, $\qquad$ c) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, $\qquad$ d) $\displaystyle\int_0^\infty 2x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

15. Berechnen Sie mit Hilfe von Potenzreihenzerlegung die folgenden Integrale mit einer Genauigkeit von 0,001 :

    a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, $\qquad$ b) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$, $\qquad$ c) $\displaystyle\int_0^{0.5} \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

16. Berechnen Sie näherungsweise das bestimmte Integral

    $$\int_0^1 \sqrt{2 + \mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

    mit Hilfe der SIMPSON-Formel, indem Sie den Integrationsbereich in 8 Abschnitte unterteilen.

A.7 Übungsaufgaben Analysis, Serie 7

1. Bestimmen Sie durch geeignete Umformung der entsprechenden trigonometrischen Terme (d. h. ohne Integration) die Fourier-Koeffizienten folgender Funktionen:

   a) $f(x) = \cos x + \frac{1}{4}$,
   b) $f(x) = \cos^2 x$,
   c) $f(x) = \sin^3 x$,
   d) $f(x) = \cos^4 x$,
   e) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$
   f) $f(x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$,
   g) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$,
   h) $\frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$,
   i) $f(x) = (\cos x + 1)^2$.

   Setzen Sie jeweils eine Periodenlänge von 2π voraus und berechnen Sie die entsprechenden Phasenverschiebungen und Amplituden.

2. Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten der folgenden auf dem Intervall $[-\pi, \pi)$ definierten und mit $f(x + 2k\pi) = f(x)$, $k \in \mathbb{Z}$, periodisch fortgesetzten Funktionen:

   a) $f(x) = \left|\frac{x}{2\pi}\right|$,
   b) $f(x) = x\cos x$,
   c) $f(x) = x^2 \cos x$,
   d) $f(x) = \frac{x^2}{\pi^2}$,
   e) $f(x) = |\sin x|$, (Zweiweggleichrichtung) ,
   f) $f(x) = |\cos x|$, (Zweiweggleichrichtung),

   g)
   $$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ \sin x, & 0 \le x < \pi \end{cases} \qquad \text{(Einweggleichrichtung, Sinusimpuls)},$$

   h)
   $$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ \cos x, & -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases} \qquad \text{(Einweggleichrichtung, Kosinusimpuls)},$$

   i)
   $$f(x) = \max\left\{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \cos(x + \pi), \cos\left(x + \frac{5\pi}{3}\right)\right\} \qquad \text{(gleichgerichteter Drehstrom)}.$$

   Verwenden Sie die trigonometrische Form der Fourier-Reihen.

3. Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten der folgenden auf dem Intervall $[-\pi, \pi)$ definierten und mit $f(x + 2k\pi) = f(x)$, $k \in \mathbb{Z}$, periodisch fortgesetzten Funktionen:

   a) $f(x) = \mathrm{e}^x$, b) $f(x) = \mathrm{e}^{|x|}$, c) $f(x) = x\mathrm{e}^x$.

   Verwenden Sie beim Rechnen die exponentielle Darstellung der Fourier-Reihen. Wandeln Sie anschließend Ihre Ergebnisse in die trigonometrische Form um.

4. Gegeben sei eine auf dem Intervall $[-\pi, \pi)$ periodische Funktion mit den Fourier-Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots$ Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots$ und $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots$ der Funktion $g(x)$,

   a) $g(x) = cf(x) + d$, b) $g(x) = f(-x)$, c) $g(x) = f(x + \pi)$, d) $g(x) = f(x + c)$,

   e) $g(x) = -f(-x)$, f) $g(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x))$, g) $g(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x))$,

   wobei c und d beliebige reellwertige Konstanten sind, $c, d \in \mathbb{R}$.

5. Gegeben sei eine auf dem Intervall $[-\pi, \pi)$ periodische Funktion mit den Fourier-Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots$ Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots$ und $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots$ der Funktion

   $$g(x) = f(\ell x), \qquad \ell \in \mathbb{N}.$$

6. Weisen Sie nach, dass die beiden auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ periodischen Funktionen $f(x) = \sin 2x$ und $g(x) = \sin 3x$ orthogonal sind.

7. Berechnen Sie Fourier-Koeffizienten der auf dem Intervall $[0, 1)$ periodischen Funktionen
   a)

   $$f(x) = x - \lfloor x \rfloor, \qquad \text{mit} \quad \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \ : \ n \leq x\},$$

   b)

   $$f(x) = \lceil x \rceil - x, \qquad \text{mit} \quad \lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \ : \ n \geq x\}.$$

8. Berechnen Sie die Norm $\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx}$ der auf dem Intervall $[-\pi, \pi)$ periodischen Funktion $f(x)$ mit

   a) $f(x) = 2\sin 2x$, b) $f(x) = (2\sin x - \cos x)^2$, c) $f(x) = (-1)^{\lfloor x/\pi \rfloor}$

   mit $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$, wobei die Fourier-Koeffizienten von $f(x) = (-1)^{\lfloor x/\pi \rfloor}$ durch $b_k = \frac{4}{k\pi}$, $k = 1, 3, 5, \ldots$, gegeben sind; alle anderen Fourier-Koeffizienten sind gleich Null.

9. Berechnen Sie die Faltung $f * g$ der auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ periodischen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ mit
   a)

   $$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \sin 2x + \cos x,$$

   b)

   $$f(x) = \cos x, \qquad g(x) = \left\lceil \frac{x}{2\pi} \right\rceil - \frac{x}{2\pi},$$

   wobei die Fourier-Koeffizienten der Funktion $g(x)$ in Teilaufgabe b) durch $a_0 = 1$, $a_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, und $b_k = \frac{1}{\pi k}$, $k = 1, 2, \ldots$, gegeben sind.

A.8 Übungsaufgaben Analysis, Serie 8

1. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der folgenden Funktionen:

   a) $z(x,y) = 3x^2y - 4x\cos y$,

   b) $z(x,y) = y\mathrm{e}^{2x} - 3xy^2 + 4x - 1$,

   c) $u(x,y,z) = 2x^2\sqrt{y}\sin z - xy^{-1}z^{-2} + y\tan\frac{x}{2}$, (nur 1. Ordnung!)

   d) $f(x,y) = x^2\ln y + y^2\ln x + xy + 7$,

   e) $f(x,y) = (1 + x^2 - 2y^2)^2$,

   f) $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n)$,

   g) $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$, (nur 1. Ordnung!) .

2. Berechnen Sie die jeweils angegebenen partiellen Ableitungen:

   a) $U = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$, $(U_A,\ U_\omega,\ U_t,\ U_\alpha)$,

   b) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, (R_{R_1}) ,

   c) $F = \frac{mv^2}{r}$, $(F_m,\ F_v,\ F_r)$,

   d) $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, $(Z_R,\ Z_{X_C})$,

   e) $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_1}{n_2}$, (α_β) ,

   f) $p \cdot V = \text{const.}$, (V_p) .

3. Berechnen Sie $f_x(1,0)$, $f_y(0,1)$, $f_{xy}(-1,0)$ und $f_{xyx}(-1,0)$ für die Funktion

$$f(x,y) = 5x \cdot \mathrm{e}^{-xy} + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + \cos(\pi x + y) .$$

4. Zeigen Sie, daß die gemischten partiellen Ableitungen 2. Ordnung übereinstimmen für die Funktion $f(x,y) = \ln(x^2 + y)$.

5. Eine mechanische Transversalwelle, die sich im Laufe der Zeit in x-Richtung ausbreitet, läßt sich durch folgende Gleichung beschreiben

$$y = y(x,t) = A \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(ct - x)\right]$$

   mit A - Amplitude (maximale Auslenkung), c - Ausbreitungsgeschwindigkeit und λ - Wellenlänge.
   Welcher Zusammenhang besteht zwischen den reinen Ableitungen 2. Ordnung?

6. Bestimmen Sie den Anstieg und den Steigungswinkel der Tangenten in x- und y-Richtung an die Funktion $f(x,y) = -4x^3y^2 + 3xy^4 - 3x + 2y + 5$ im Flächenpunkt $P = (1, 2, 38)$.

7. Für die Funktion $z = f(x,y) = (x-3)^2 + (y+2)^2 + 4$ ist im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ die Gleichung der Tangentialebene an die Bildfläche in parameterfreier Darstellung anzugeben.

8. Bestimmen Sie das totale Differential der Funktionen

   a) $f(x,y) = \sqrt{x-y} + \ln\sqrt{xy}$,

   b) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$.

9. Bestimmen Sie das totale Differential der Funktion

$$z(x,y) = 4x^2 - 3xy^2 + x\mathrm{e}^y .$$

   Vergleichen Sie den Zuwachs der Höhenkoordinate z auf der Funktionsfläche mit dem auf der Tangentialebene an der Stelle $x = 1,\ y = 0$ für $\triangle x = \mathrm{d}x = -0.1$ und $\triangle y = \mathrm{d}y = 0.2$.

10. Ermitteln Sie die lokalen Extremwerte der folgenden Funktionen:

    a) $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$,

    b) $f(x,y) = 3x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 12y^2 + 1$.

11. Bilden Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $z = f(x,y)$ mit $x = x(u,v)$ und $y = y(u,v)$ nach den Parametern u und v unter Verwendung der Kettenregel:

    a) $z = \mathrm{e}^x \cdot \cos(x-y)$ mit $x = u + v^2,\ y = u - v^2$,

    b) $z = \tan(x+y)$ mit $x = u^2 + v,\ y = u^2 - v$.

12. Für die Masse m eines Rohres der Länge l mit Innenradius r, Wanddicke d und Dichte ϱ gilt:

$$m = \pi\varrho l(2rd + d^2) .$$

    Es sei $\varrho = (5.4 \pm 0.2)\mathrm{g/cm}^3,\ r = (11.4 \pm 0.2)\mathrm{cm}$ und $d = (0.30 \pm 0.04)\mathrm{cm}$. Weiterhin ist $l = 155\mathrm{cm}$ gegeben. Ermitteln Sie mit Hilfe der Differentialrechnung den absoluten und relativen Fehler für m unter Verwendung der Formeln für lineare und quadratische Fehlerfortpflanzung!

A.9 Übungsaufgaben Analysis, Serie 9 (Wiederholung)

1. Skizzieren Sie die Menge aller Punkte der x-y-Ebene, die folgende Ungleichungen erfüllen:
   a) $y + x^2 - 2 \leq 0$ und $4y + 2x + 4 \geq 0$,
   b) $x^2 \cdot y \geq 1$ und $x - y - 1 < 0$.

2. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:

   a) $x^2 + 2x - 8 < x - 2$, b) $\dfrac{3x+2}{|x+5|} \geq 1$, c) $\dfrac{|x+1|}{x+2} < 4$,

   d) $\left|\dfrac{3x-2}{4} - \dfrac{5x-4}{3}\right| \geq 2$.

3. Berechnen Sie die Grenzwerte der Zahlenfolgen a_n mit

   a) $a_n = \dfrac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)}$, b) $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n^2+1}$,

   c) $a_n = (-1)^n \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$, d) $a_n = \dfrac{3}{n} - \dfrac{10}{\sqrt{n}}$.

4. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

   a) $\left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\cdots,$ b) $\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+\cdots,$

   c) $\frac{|\sin\alpha|}{1}+\frac{|\sin 2\alpha|}{2^2}+\frac{|\sin 3\alpha|}{3^2}+\frac{|\sin 4\alpha|}{4^2}+\cdots,$ d) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\cdots.$

5. Für welche $x\in\mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen:

   a) $x+\frac{2!}{2^3}x^2+\frac{3!}{3^3}x^3+\frac{4!}{4^3}x^4+\cdots$, b) $x+\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{5}x^3+\frac{8}{7}x^4+\frac{16}{9}x^5+\cdots$?

6. Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Polynome:
   a) $P_4(x)=x^4+3x^3+4x^2+2x$,
   b) $P_4(x)=x^4-6x^3+12x^2+6x-13$!
   Geben Sie die Polynome in Produktdarstellung der Linearfaktoren an!

7. Für die Funktion
$$y=f(x)=\frac{1}{4}\ln(3-2x)+1$$
   ist die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ zu berechnen. Außerdem sind für $y=f(x)$ und $y=f^{-1}(x)$ die Definitionsbereiche anzugeben.

8. Ermitteln Sie den Definitionsbereich der folgenden Funktionen:

   a) $f(x)=\sqrt{\ln(4x-x^2)}$, b) $f(x)=\sqrt{\ln\frac{1}{|\cos x|}}$.

Anhang B

Übungsaufgaben für die Vorlesung Lineare Algebra I

B.1 Übungsaufgaben Lineare Algebra I, Serie 1

1. Bestimmen Sie den Wahrheitswert folgender Aussage:

$$\big[(A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)\big] \wedge \overline{(\overline{A} \vee B)}\ .$$

2. Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitswerttabellen, daß die folgenden Aussagen immer wahr sind:

   a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$

   b) $(A \vee B) \Leftrightarrow \overline{(\overline{A} \wedge \overline{B})}$

   c) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$.

3. Zeigen Sie durch einen direkten Beweis, daß die Aussage $a^2 + b^2 \geq 2ab$ für alle reellen Zahlen a, b wahr ist.

4. Man bestimme den Wahrheitswert folgender Aussagen und negiere sie :

   $a)$ $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1$
   $b)$ $\exists n \in \mathbb{N} : 2^n > 100$.

5. Es sei $K = (1, 5]$, $L = [3, 6)$ und $M = [1, 5)$.
   Bestimmen Sie
   a) $K \cup L$, $K \cup M$,
   b) $K \cap L$, $K \cap M$,
   c) $K \setminus L$, $L \setminus K$, $K \setminus M$, $M \setminus K$!

6. Es seien $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{2, 4, 6\}$ und $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$.
   Bestimmen Sie A, B und $B \setminus A$!

7. Es sei A eine Teilmenge von B ($A \subseteq B$). Was bedeuten in diesem Fall die Ausdrücke

$$\text{a) } A \cup B\,, \quad \text{b) } A \cap B\,, \quad \text{c) } A \setminus B\,, \quad \text{d) } B \setminus A\ ?$$

8. Es seien A und B zwei nichtdisjunkte Mengen. Wie kann man die Menge aller der Elemente angeben, die nur in genau einer der beiden Mengen liegen?

9. Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{2, 4, 6\}$. Wieviele Elemente enthält $A \times B$? Geben Sie drei dieser Elemente an! Ist $(6, 3) \in A \times B$?

10. Schreiben Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ von $A = \{3, 7, 8\}$ auf!

11. Gegeben sind die abgeschlossenen Intervalle $A = [2, 5]$ und $B = [-1, 4]$.
Skizzieren Sie $A \times B$ und $B \times A$ in geeigneten Koordinatensystemen!

12. Es sei $V_n := \{k \in \mathbb{N} : n \text{ ist Teiler von } k\}$, $n \in \mathbb{N}$.
Bestimmen Sie $V_5 \cap V_7$, $V_2 \cap V_{10}$ und $V_6 \cap V_{15}$!

13. Es seien A, B, C und D beliebige Teilmengen einer Grundmenge G. Sind dann die folgenden Beziehungen richtig oder falsch

    a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cap C)$ b) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$?

    Begründen Sie Ihre Antwort.

14. Ein Unternehmen produziert mit den Maschinen A, B und C die Produkte $p_1, p_2, ..., p_8$. Dabei werden die folgenden Mengen von Produkten auf den einzelnen Maschinen bearbeitet:
$A = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$
$B = \{p_1, p_3, p_4, p_6, p_7\}$
$C = \{p_1, p_4, p_6, p_7, p_8\}$.
Beschreiben Sie die Mengen von Produkten mit folgenden Eigenschaften sowohl durch Aufzählung ihrer Elemente als auch durch mengentheoretische Operationen der Mengen A, B, C:
a) Menge aller Produkte, die auf allen drei Maschinen bearbeitet werden müssen,
b) Menge aller Produkte, die auf Maschine A oder Maschine B bearbeitet werden,
c) Menge aller Produkte, die auf Maschine A und auf Maschine B bearbeitet werden,
d) Menge aller Produkte, die auf Maschine B und nicht auf Maschine C bearbeitet werden,
e) Menge aller Produkte, die nur auf Maschine C bearbeitet werden.

15. Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$ und $C = \{b, c\}$.
Bestimmen Sie damit

    a) $A \times (B \cup C)$ b) $(A \times B) \cup (A \times C)$

    c) $A \times (B \cap C)$ d) $(A \times B) \cap (A \times C)$.

B.2 Übungsaufgaben Lineare Algebra I, Serie 2

1. Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$ und $z_1 : z_2$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit

    a) $z_1 = 2 + 3\mathrm{i} \quad z_2 = 3 - 5\mathrm{i}$, b) $z_1 = 4 \quad z_2 = 1 + 2\mathrm{i}$.

2. Ermitteln Sie $z + \overline{z}$ und $z \cdot \overline{z}$ für $z \in \mathbb{C}$.

3. Bestimmen Sie die kartesische Darstellung für $z \in \mathbb{C}$ mit

    a) $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, b) $z = \mathrm{e}^{2+\mathrm{i}3\pi}$.

4. Bestimmen Sie die exponentielle Darstellung für $z \in \mathbb{C}$ mit

$$\text{a)} \quad z = \sqrt{3} + \mathrm{i}\,, \qquad \text{b)} \quad z = \sqrt{3} - \mathrm{i}\,, \qquad \text{c)} \quad z = -1 + \mathrm{i}\,.$$

5. Geben Sie $z \in \mathbb{C}$ in kartesischer und exponentieller Darstellung an:

$$\text{a)} \quad z = (1 + \mathrm{i})^2 \qquad \text{b)} \quad z = \frac{\sqrt{3} + \mathrm{i}}{1 - \sqrt{3}\mathrm{i}}\,.$$

6. Für welche Punkte der Gaußschen Zahlenebene gilt

$$\text{a)} \quad |z| > 2\,, \qquad \text{b)} \quad z \cdot \overline{z} = 9 \qquad \text{c)} \quad |\arg(z)| < \frac{\pi}{2} \qquad \text{d)} \quad |z + 2 - i| \geq 2\ ?$$

7. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

$$\text{a)} \quad x^2 + (5 - 2\mathrm{i})x + 5(1 - \mathrm{i}) = 0\,, \quad \text{b)} \quad x^2 + (2 + 3\mathrm{i})x + 1 + 3\mathrm{i} = 0\,.$$

8. Es seien $z_1 = -4\mathrm{i}$, $z_2 = 3 - 2\mathrm{i}$ und $z_3 = -1 + \mathrm{i}$. Berechnen Sie

$$\text{a)} \quad z_1 - 2z_2 + 3z_3\,, \quad \text{b)} \quad z_1(2\overline{z_2} - z_1) + \overline{z_3}\,, \quad \text{c)} \quad \frac{\overline{z_1} \cdot z_2}{z_3}\,.$$

   Geben Sie die Ergebnisse jeweils in trigonometrischer Form an.

9. Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 2 - 4\mathrm{i}$ und $z_2 = -1 - 3\mathrm{i}$.
   a) Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$ und z_1/z_2 in kartesischer Form.
   b) Wandeln Sie z_1 und z_2 um in die trigonometrische Darstellungsform und führen Sie dann Multiplikation und Division der beiden Zahlen durch. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus a)!

10. Berechnen Sie direkt und über die trigonometrische Form der komplexen Zahl $(-2+3\mathrm{i})^5$ und vergleichen Sie die Resultate!

11. Von den folgenden komplexen Zahlen gebe man alle n–ten Wurzeln in kartesischer Form an und stelle diese jeweils in der Gaußschen Zahlenebene dar:
   a) $z = -6 \quad (n = 4)$ b) $z = 8\mathrm{i} \quad (n = 3)$ c) $z = -2 + 2\mathrm{i} \quad (n = 3)$ d) $z = 5 + 8\mathrm{i} \quad (n = 5)$.

12. Beweisen Sie folgende Rechenregeln für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:
   a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

13. Wir betrachten das Polynom $P(z) = z^3 - z^2 + z - 1$.

    (a) Zeigen Sie unter Verwendung der Rechenregeln für konjugiert komplexe Zahlen, daß folgende Beziehung gilt : $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$

    (b) Sei z_0 eine Nullstelle, d.h. $P(z_0) = 0$. Was kann man dann über $\overline{z_0}$ aussagen ?

B.3 Übungsaufgaben Lineare Algebra I, Serie 3

1. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (1,0,1)^T$ und $\vec{b} = (2,1,1)^T$. Berechnen Sie den Winkel zwischen diesen beiden Vektoren.

2. Berechnen Sie die Winkel zwischen dem Vektor $\vec{a} = (3,-6,2)^T$ und den Achsen des kartesischen Koordinatensystems.

3. Berechnen Sie einen Vektor der Länge $2\sqrt{6}$, der senkrecht auf $\vec{a} = (1,2,0)^T$ und $\vec{b} = (0,1,1)^T$ steht.

4. Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\vec{a} + \lambda\vec{b} \perp \vec{c}$ mit $\vec{a} = (2,3,-1)^T$, $\vec{b} = (0,-1,2)^T$ und $\vec{c} = (2,-2,5)^T$?

5. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das durch seine Eckpunkte $P_1 = (1,0,1)$, $P_2 = (2,2,0)$ und $P_3 = (0,0,3)$ gegeben ist.

6. Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds, das durch die Vektoren $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ und $\overrightarrow{P_1P_4}$ aufgespannt wird mit $P_1 = (1,2,1)$, $P_2 = (4,2,3)$, $P_3 = (2,1,0)$ und $P_4 = (3,8,4)$.

7. Berechnen Sie die orthogonale Projektion $\pi_{\vec{b}}(\vec{a})$ des Vektors $\vec{a} = (-1,2,3)^T$ auf die Richtung des Vektors $\vec{b} = (2,4,4)^T$.

8. Für welches $y \in \mathbb{R}$ hat das Dreieck mit den Eckpunkten $P_1 = (1,y,5)$, $P_2 = (2,1,0)$ und $P_3 = (3,2,1)$ den Flächeninhalt $\sqrt{26}$?

9. Zeigen Sie, daß die Vektoren $(2,-14,5)^T$, $(11,-2,-10)^T$, $(-10,-5,-10)^T$ Kanten eines Würfels sind!

10. Wo liegen die anderen drei Eckpunkte eines Quadrates mit dem Eckpunkt $A = (1,0,-1)$, der Seite $\overrightarrow{AB} = (12,5,0)^T$, und einer Seite, die zur dritten Koordinatenachse parallel verläuft?

11. In welchen Punkt gelangt man, wenn man aus $P_1 = (-5,1)$ eine Strecke der Länge 4 in Richtung des Punktes $P_2 = (8,7)$ zurücklegt?

12. Im Punkt $D = (1,3,-1)$ ist ein Haken befestigt, von dem aus drei Stahlseile nach den Punkten $A = (2,1,1)$, $B = (-7,4,3)$ und $C = (-1,9,2)$ gespannt sind. Die entsprechenden Zugkräfte in den Seilen haben folgende Beträge:

$$F_A = 21000\,\mathrm{N}, \quad F_B = 9000\,\mathrm{N}, \quad F_C = 14000\,\mathrm{N}\ .$$

Berechnen Sie Komponenten und Betrag der in D angreifenden Gesamtkraft.

13. Im Punkt $Q = (5,7,10)$ befindet sich eine Lichtquelle. Wie groß ist der Flächeninhalt des Schattens, der vom Dreieck mit den Eckpunkten $P_1 = (7,8,13)$, $P_2 = (6,10,14)$ und $P_3 = (4,10,13)$ auf der Ebene $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 14$ erzeugt wird?

14. Die Gerade g_1 geht durch die Punkte $(22,8)$ und $(13,22)$ und die Gerade g_2 durch $(-10,16)$ und steht senkrecht auf g_1. Geben Sie eine Parametergleichung für g_2 an! Wie weit ist der Punkt $(-22,9)$ vom Schnittpunkt der beiden Geraden entfernt?

15. Welcher Punkt auf der Gerade $g:\ 3x - 8y = 4$ bildet mit dem Punkt $P = (-4,12)$ eine Strecke, die senkrecht auf der Strecke von P nach $Q = (10,-2)$ steht? Welchen Winkel bildet die Strecke von P nach Q mit g?

16. Der Ort $\mathcal{B}$ befindet sich 23km nördlich und 11km östlich von $\mathcal{A}$. Beide Orte sind durch eine geradlinige Energieleitung verbunden; das Gelände sei eben. Das Werk $\mathcal{W}$ wird 9km nördlich und 1km westlich von $\mathcal{A}$ gebaut. Es soll durch ein möglichst kurzes Verbindungsstück an diese Leitung angeschlossen werden. Wo ist die Anschlußstelle zu wählen, und wie lang wird dieses Verbindungsstück?

17. Berechnen Sie jeweils den Durchstoßpunkt der Geraden durch die Ebene:

a) $E: \quad \vec{r}(s,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$g: \quad \vec{r}(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

b) $E: \quad x - y + 2z = 4$

$g: \quad \vec{r}(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

18. Vom Punkt $P_0 = (1,2,1)$ wird auf die Ebene $E:\ x - 2y + z - 7 = 0$ das Lot gefällt. Wo liegt der Fußpunkt des Lotes?

19. Finden Sie einen Vektor der Länge 6, der senkrecht auf der Ebene durch die Punkte $A = (1,5,1)$, $B = (-4,2,1)$ und $C = (2,0,-2)$ steht!

20. Wie lautet die Gleichung der Ebene, die senkrecht auf der Geraden g durch $A = (2,0,2)$ und $B = (4,2,-2)$ steht und durch den Mittelpunkt von $\overline{AB}$ geht?

21. a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g_1 durch die Punkte $A = (1,1,1)$ und $B = (-1,3,2)$ an !
    b) Welche Gleichung hat eine Gerade g_2, die senkrecht auf g_1 steht und durch den Punkt $C = (-2,5,8)$ geht?
    c) Welchen Abstand hat der Punkt C von der Geraden g_1?

22. Ermitteln Sie die Spiegelung P' des Punktes $P = (-7,9,1)$ bezüglich der Ebene $5x - 4y - z = 12$!

B.4 Übungsaufgaben Lineare Algebra I, Serie 4

1. Prüfen Sie, ob die folgenden Vektorsysteme linear abhängig oder linear unabhängig sind:
   a) $\vec{a} = (3,-1,2)^T,\ \vec{b} = (2,0,1)^T$,
   b) $\vec{a} = (3,-1,2)^T,\ \vec{b} = (2,0,1)^T,\quad \vec{c} = (-3,1,-1)^T$,
   c) $\vec{a} = (3,-1,2)^T,\ \vec{b} = (2,0,1)^T,\quad \vec{c} = (0,0,0)^T$,
   d) $\vec{a} = (3,-1,2)^T,\ \vec{b} = (2,0,1)^T,\quad \vec{c} = (5,-3,4)^T$,
   e) $\vec{a} = (1,0,3)^T,\quad \vec{b} = (2,-3,1)^T,\ \vec{c} = (4,1,3)^T,\qquad \vec{d} = (1,1,1)^T$.

2. a) Für welches $k \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\vec{a} = (1,1,k)^T$, $\vec{b} = (k,1,1)^T$ und $\vec{c} = (1,k,1)^T$ linear unabhängig?

b) Bestimmen Sie den Wert $a \in \mathbb{R}$ so, daß die Vektoren $\vec{x} = (2,1,4)^T$, $\vec{y} = (-1,0,2)^T$ und $\vec{z} = (5,2,a)^T$ linear abhängig werden!

3. Gegeben seien Matrizen der folgenden Größe: $A_{(2,3)}$, $B_{(2,4)}$, $C_{(4,3)}$ und $D_{(3,2)}$. Welche der folgenden Ausdrücke sind dann erklärt, und von welchem Typ sind die jeweiligen Ergebnismatrizen

   a) $A+B$, b) $A+3D^T$, c) ABC , d) BAD , e) $C(A+D^T)$,

   f) $(D+A^T)B$, g) $A+BC$, h) B^T+CD , i) BCD ?

4. Mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   ist zu berechnen:

   a) $2A+3B$, b) $B-2A$, c) AB^T , d) BA^T ,
   e) A^TB , f) B^TA , g) $(A+B)C$, h) B^TAC .

5. Bilden Sie - wenn möglich - die Matrizenprodukte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ -7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

6. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } B = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 3 & -9 \\ -1 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

7. Bestimmen Sie den Wert folgender Determinanten

$$\text{a) } D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{b) } D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 7 \\ -3 & 4 & -6 & -1 \end{vmatrix} .$$

8. Untersuchen Sie die Lösbarkeit der folgenden linearen Gleichungssysteme und geben Sie alle Lösungen an, die existieren:

$$\text{a) } \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & 2x_3 & = & -2 \\ -5x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \end{array} , \qquad \text{b) } \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 6x_3 & = & 5 \\ 7x_1 & - & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 15 \end{array} ,$$

$$\text{c) } \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 7 \end{array} .$$

   Untersuchen Sie jetzt die zugehörigen homogenen Gleichungssysteme auf ihre Lösungsmengen.

9. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem aus Aufgabe 8a) mit Hilfe der Cramerschen Regel.

10. Für welche Werte von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ schneiden sich die drei gegebenen Ebenen in einer Geraden bzw. in einem Punkt? Geben Sie die Gleichung der Schnittgeraden an:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} E_1: & x & - & y & - & 2z & = & 1\,, \\ E_2: & x & + & y & - & \beta z & = & 2\,, \\ E_3: & & & 2y & + & z & = & \alpha\,. \end{array}$$

11. Für welche $p \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ keine, genau eine bzw. mehrere Lösungen? Geben Sie jeweils sämtliche Lösungen an:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & p-1 & p \\ 2 & 3-p & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2p-1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

12. Untersuchen Sie, ob der Vektor $\vec{d} = (4,1,0,1)^T$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = (2,0,-1,3)^T$, $\vec{b} = (1,1,11,1)^T$ und $\vec{c} = (0,1,-2,-2)^T$ dargestellt werden kann!

13. Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Geben Sie die Eigenvektoren in normierter Form an.

B.5 Übungsaufgaben Lineare Algebra I, Serie 5 (Wiederholung)

1. Es seien $u = -2 + 2\mathrm{i}$ und $v = -4 + 3\mathrm{i}$. Geben Sie u in trigonometrischer Darstellungsform an. Berechnen Sie $u \cdot v$, $\dfrac{u}{v}$ und u^{10} !

2. Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $z^4 = -\mathrm{i}$, b) $z^3 = 3 + 4\mathrm{i}$.

Skizzieren Sie die Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene.

3. Es seien die Vektoren $\vec{p} = (3,2,-2)^T$ und $\vec{q} = (-2,4,1)^T$ gegeben.
a) Berechnen Sie die Länge der Projektion des Vektors $\vec{p}$ auf die Richtung von $\vec{q}$.
b) Ermitteln Sie einen Vektor $\vec{n}$ mit $|\vec{n}| = 14$, der senkrecht auf $\vec{p}$ und $\vec{q}$ steht.
c) Für welche reelle Zahl λ gilt $|\vec{p} + \lambda\vec{q}| = \sqrt{38}$?

4. Bestimmen Sie den Punkt P der x-Achse, der von den Punkten $A = (2,-4,5)$ und $B = (-3,2,7)$ den gleichen Abstand besitzt.

5. Untersuchen Sie, ob die vier Punkte $A = (1,2,-1)$, $B = (-1,3,-4)$, $C = (0,5,-7)$ und $D = (2,4,-4)$ in einer Ebene liegen.

6. Die Gerade g_1 geht durch die Punkte $P_1 = (1,-2,1)$ und $P_2 = (-2,3,5)$, die Gerade g_2 durch die Punkte $Q_1 = (1,-5,-2)$ und $Q_2 = (10,-11,-5)$. In welchem Punkt und mit welchem spitzen Winkel schneiden sich g_1 und g_2 ?

7. Die Punkte $P_1 = (0,0,1)$, $P_2 = (1,-1,0)$ und $P_3 = (-2,1,1)$ spannen eine Ebene auf. Geben Sie die Gleichung dieser Ebene in der Form $ax + by + cz = d$ an. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $Q = (4,5,3)$ von dieser Ebene.

8. Sind die Vektoren $\vec{a} = (2,-1,-3)^T$, $\vec{b} = (-2,1,1)^T$, $\vec{c} = (-2,1,-3)^T$ linear abhängig oder nicht?
   Geben Sie im Fall linearer Abhängigkeit wenigstens eine nicht-triviale Linearkombination dieser Vektoren an, die den Nullvektor ergibt.

9. a) Für welches reelle a ist die Determinante von A negativ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & a & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

   b) Bestimmen Sie Det$A$ und RgA für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} !$$

10. Ermitteln Sie die Werte $a, b \in \mathbb{R}$, für die das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 3x & + & y & - & 5z & = & 5 \\ 2x & - & ay & + & 4z & = & b \end{array}$$

   keine Lösung, eine eindeutige Lösung oder eine Parameterlösung hat. Geben Sie die Parameterlösung an!

11. Es sei A eine $(3,3)$-Matrix mit Det $A = -3$. Welchen Wert hat die Determinante von $4A$?

12. Gegeben seien die folgenden Vektoren und Matrizen :

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -6 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} .$$

   Berechnen Sie, falls möglich, die folgenden Ausdrücke :
   $B + a \cdot b^T$, $\quad A \cdot B \cdot b + A \cdot a \quad$ und $\quad A \cdot a - B \cdot b \cdot a^T$.

13. Berechnen Sie alle reellen symmetrischen $(2,2)$-Matrizen A, die Lösung der Gleichung $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ sind.

14. Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren mit Betrag 1 für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Anhang C

Lösungshinweise Analysis

C.1 Lösungshinweise Analysis, Serie 1

1. a) $120 - 2b$ b) $-a - 12b + 4x$ c) $a - 6$ d) 0 e) $-5a$
2. a) $\frac{3}{4}\,\frac{ab}{c^2}$ b) $\frac{5(x-2)}{5x-2}$ c) $\frac{1}{2}\,\frac{a+1}{a-1}$
3. a) $\frac{15b - 8a}{20ab}$ b) $\frac{6x^2 - 4x - 3}{x^2(x+1)^2}$ c) 1
4. a) $x^{\frac{7}{8}}$ b) $a^{\frac{25}{6}} b^{\frac{1}{2}}$ c) $x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{11}{12}}$
5. a) 3 b) 3 c) 0 d) 2 e) -3
6. a) 2 b) 2 c) 81 d) 10 e) 2 f) 1 g) 100 h) $0{,}0195$
7. a) 0 b) 15 c) $4N - 6$ d) 0 e) 360 f) 0
8. $\binom{7}{4} = 35$ $\binom{100}{96} = 3\,921\,225$ $\binom{n}{n-1} = n$
9. $k = 12$ $l = 10$
10. a) $-a^2 + b^2$ b) $-16b^2 + 42b - 5$ c) $u^2 + 2uv + v^2$
11. a) $(7x + 9y)(7x - 9y)$ b) $-8mn$ c) $-(5x - 10y^2)^2$
12. a) $h_1 = h_2 - \frac{E_{\text{pot}}}{mg}$ b) $R = \frac{R_1 C}{C + 4\pi K R_1}$ c) $t = -T \ln \frac{I}{I_0}$
    d) $r_2 = r_1 \cdot \mathrm{e}^{\frac{U}{r \cdot E}}$
13. a) $x_1 = \frac{5}{6}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$ b) $x = 17$ c) $x = 2$ d) $x = -8$
    e) $x = 6$

14. a) $L = (-\infty, 1] \cup (2, \infty)$ b) $L = (-2, 1)$ c) $L = (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$
    d) $L = (-\infty, -3] \cup (2, 3]$ e) $L = [0, 3] \cup [4, \infty)$ f) $L = (1, 3)$
    g) $L = (-\infty, \frac{2}{3}) \cup (2, \infty)$

15. 65,45 Minuten

16. 3 Stunden 20 Minuten

17. $\lambda_1 = \dfrac{1}{5}$ und $\lambda_2 = 1$

C.2 Lösungshinweise Analysis, Serie 2

1. a) für $a = 1$: $x \in \mathbb{R}$, für $a \neq 1$: $x = -8$,
   b) $x = 1,136$, c) $x = 2$, d) $x_1 = 10^4$, $x_2 = 10^{-\frac{7}{4}}$,
   e) $x = 6$

2. a) $\lambda > -\frac{1}{4}$ und $\lambda \neq 0$,
   b) $a \geq \frac{1}{16}$.

3. a) $n + 1$, b) $\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)!}$

4.

5.

6. $a^2 b(a - 1)$

7. $2m \leq a + b \leq 2M$ $m - M \leq a - b \leq M - m$

   $m^2 \leq a \cdot b \leq M^2$ $\dfrac{m}{M} \leq \dfrac{a}{b} \leq \dfrac{M}{m}$

8. $R = 46,154 \pm 4,708\ \Omega$ $\delta R \leq 0,102 \widehat{=} 10,2\,\%$

9. $a + b = 51,0 \pm 0,2$ mm $\delta(a + b) \leq 0,0039$

   $a - b = 14,2 \pm 0,2$ mm $\delta(a - b) \leq 0,014$

   $a \cdot b = 599,84 \pm 5,10$ mm^2, $\delta(a \cdot b) \leq 0,0085$

   $\dfrac{a}{b} = 1,772 \pm 0,015$, $\delta(\dfrac{a}{b}) \leq 0,0085$

10. $365 = (101101101)_2 = (16D)_{16}$

11. $(8DF1)_{16} = 36337 = (1000110111110001)_2$
    $(C39A)_{16} = 50074 = (1100001110011010)_2$

C.3 Lösungshinweise Analysis, Serie 3

1. a) $-\frac{3}{4}$, b) $-\frac{9}{4}$, c) ∞ , d) 0 , e) $\frac{5}{4}$,
   f) $\frac{1}{2}$, g) e^5 , h) $\sqrt[5]{e}$, i) 0 , j) ∞ ,
   k) $\frac{1}{e^2}$, l) $\frac{1}{2}$, m) divergent , n) 0 , o) divergent .

2. $s_{50} = 5925$

3. geometrische Folge mit $a_{10} = 413\,343$ und $s_{10} = 620\,004$

4. $a_7 = 33$ und $a_9 - a_4 = 25$

5. $a_{100} = 138,28$ und $g_{100} = 25\,329,799$
   $a_n > 100$ ab $n = 73$ und $g_n > 100$ ab $n = 36$

6. Verlust je Knoten beträgt 6,9%

7. a) konvergent b) konvergent c) konvergent
   d) divergent e) divergent f) divergent
   g) konvergent h) konvergent

8. a) konvergent für alle $x \in [-1, 1]$, b) konvergent für $x = 0$,
   c) konvergent für alle $x \in [-1, 1)$, d) konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$,
   e) konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$, f) konvergent für alle $x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$,
   g) konvergent für alle $x \in (-3, 3)$

9. konvergent für alle $x \in (-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}})$

   Im Konvergenzfall ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 3^k x^{3k-1} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-3x^3} - 1\right)$.

10. a) konvergent für alle $x \in (1, 3)$
    b) konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$

C.4 Lösungshinweise Analysis, Serie 4

1. a) $a = 0$, $b = 3$,
   b) $a = \frac{3}{5}$, $b = 0$.

2. a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $W(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x}$,
   b) $D(f) = \mathbb{R}$, $W(f) = [4, \infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt{(x-2)^2 - 4}$,
   c) $D(f) = \mathbb{R}$, $W(f) = (0, 1)$, $f^{-1}(x) = \log_2 \frac{x}{1-x}$,
   d) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$, $W(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f^{-1}(x) = \frac{4x+2}{1-x}$.

3. gerade Funktionen: a) , c) , d)
   ungerade Funktionen: b) , e) , f)
   weder gerade noch ungerade: g)

4. a) $W(f) = \mathbb{R} \Longrightarrow f$ ist unbeschränkt ,
   b) $W(f) = (-\infty, 1] \Longrightarrow f$ ist beschränkt von oben ,
   c) $W(f) = [0, 2] \Longrightarrow f$ ist beschränkt von oben und von unten .

5. a) Periode π , b) nicht periodisch , c) Periode π ,
   d) konstante Funktion $\Rightarrow$ periodisch , e) nicht periodisch .

6.

7. a) $g(x) = \begin{cases} 0 & : \ f(x) < 0 \\ f(x) & : \ f(x) \geq 0 \end{cases}$, b) $h(x) = \begin{cases} 0 & : \ f(x) \geq 0 \\ -f(x) & : \ f(x) < 0 \end{cases}$.

8. a) Grad m , b) Grad m , c) Grad $n + m$, d) Grad n , e) Grad $n + 3$.

9. $a = 4$ und $b = -1$.

10. a) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, b) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

11. a) $f(x) = -0,01166x^2 + 7$, b) $x_1 = 17,324$ und $x_2 = -17,324$.

12. Nullstellen: $x_1 = 5$, $x_2 = -1$, Scheitelpunkt: $S = (2, 6)$,
    Schnitt mit y-Achse: $y = \frac{10}{3}$.

13. $9,8125\text{m}$.

14. $a = -\frac{5}{4}$, $b = 5$, $c = 15$.

15. a) Nullstellen: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, Polstellen: $x_3 = 2$, $x_4 = -1$, keine Lücken, Asymptote: $y_{\text{As}}(x) = 3$,
    b) Nullstellen: keine reellen , Polstellen: $x_1 = 1$, Lücken: $x_2 = -1$,
       Asymptote: $y_{\text{As}}(x) = x - 4$,
    c) Nullstellen: keine reelen , Polstellen: keine , Lücken: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$,
       Asymptote: $y_{\text{As}}(x) = x^2 + 1$.

16. a) $x_1 = -2$, $x_2 = -3$, $x_3 = -5$, $P_3(x) = (x + 2)(x + 3)(x + 5)$,
    b) $x_1 = 0$, $x_2 = -5$, $x_3 = -5 + 2\text{i}$, $x_4 = -5 - 2\text{i}$,
       $P_4(x) = x(x + 5)(x + 5 - 2\text{i})(x + 5 + 2\text{i})$.

17. $a = -10$.

C.5 Lösungshinweise und Lösungswege Analysis, Serie 5

C.5.1 Lösungshinweise

1. **a)** $f'(x) = (4x + 4)(3x^3 - 2x^2 + 3) + (2x^2 + 4x)(9x^2 - 4x)$,

   b) $f'(x) = 1 - \sqrt{\frac{a}{x}}$, **c)** $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$, **d)** $f'(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{2\sqrt[6]{x}} \right)$,

   e) $f'(x) = \frac{(2\cos x - \sin x)x - 4\sin x - 2\cos x}{x^3}$, **f)** $f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$,

g) $f'(x) = 4\cot(4x+3)$, **h)** $f'(x) = 3\sqrt{x^2+4x}\,(x+2)$, **i)** $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^4}$,

j) $f'(x) = \dfrac{2}{2x-1} + \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{3}{4-3x}$,

k) $f'(x) = x^{2x} \cdot 2(\ln x + 1)$, **l)** $f'(x) = (2x)^{\sin x}(\cos x \cdot \ln(2x) + \frac{\sin x}{x})$,

m) $f'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x + \frac{1}{x})\sin x - (\mathrm{e}^x + \ln x)\cos x}{\sin^2 x}$,

n) $f'(x) = (x+1)^{(x-1)}\left(\ln(x+1) + \dfrac{x-1}{x+1}\right)$,

o) $f'(x) = (x^2+2x-1)^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\ln(x^2+2x-1)}{2\sqrt{x}} + \dfrac{(2x+2)\sqrt{x}}{x^2+2x-1}\right)$,

p) $f'(x) = x\mathrm{e}^{-x}(2-x)$, **q)** $f'(x) = (12-8x)\mathrm{e}^{-x^2+3x-1}$.

2. $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k (x-x_0)^{k-1}$, $f''(x) = \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)a_k(x-x_0)^{k-2}$.

3. -1,61 bei $x_0 = \frac{\pi}{2}$ und -0,354 bei $x_1 = \pi$

4. $f_T(x) = -2x+5$

5. $1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$

6. $a = 2$: Minimum bei $x_{E_1} = 1$ mit $P_3(1) = 2$
   Maximum bei $x_{E_2} = \frac{2}{3}$ mit $P_3(\frac{2}{3}) = \frac{55}{27}$.

7. Extremwerte: $x_E = 0$ Minimum, Wendepunkte: keine
   streng monoton fallend in $(-\infty, 0)$, konvex in $\mathbb{R}$

8. (a) $D(f) = \mathbb{R}$, $W(f) = [0,\infty)$, Nullstellen: $x_N = 0$,
   Extremstellen: $x_{E_1} = 0$ (Minimum), $x_{E_2} = 4$ (Maximum)
   Wendepunkte: $x_{W_1} = 4 + \sqrt{8}$, $x_{W_2} = 4 - \sqrt{8}$
   $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
   (b) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $W(f) = \mathbb{R}$, Nullstellen: $x_N = 0$, Polstellen: $x_P = 1$,
   Extremstellen: $x_E = 3$ (Minimum), Wendepunkte: $x_W = 0$,
   Asymptote: $y_{AS} = x + 2$
   (c) $D(f) = \mathbb{R}$, $W(f) = \mathbb{R}$, Nullstellen: $x_{N_1} = 0$, $x_{N_2} = -1$,
   Extremstellen: $x_E = -\frac{8}{27}$ (Maximum), Wendepunkte: keine,
   $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ stetig, aber nicht differenzierbar in $x = 0$

9. $t_{max} = \dfrac{\ln a - \ln b}{a - b}$

10. $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$

11. Kreiszylinder: $h = \frac{2}{\sqrt{3}}\,R$ und $r = \sqrt{\frac{2}{3}}\,R$
    Kreiskegel: $h = \frac{4}{3}\,R$ und $r = \frac{\sqrt{8}}{3}\,R$

12. a) 1 b) ∞ c) ∞ d) 2 e) $\frac{3}{4}$ f) 0 g) 1 h) $\frac{1}{2}$ i) $\frac{1}{2}$ j) e^a

13. $\sin(2x) = \dfrac{2}{1!}\,x - \dfrac{2^3}{3!}\,x^3 + \dfrac{2^5}{5!}\,x^5 - ... = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{2^{2k+1}}{(2k+1)!}\,x^{2k+1}$

14. a) $\dfrac{2}{1!}\,x + \left(\dfrac{2^2}{2!} + \dfrac{1}{2^2\cdot 2!}\right)x^2 + \dfrac{2^3}{3!}\,x^3 + \left(\dfrac{2^4}{4!} - \dfrac{1}{2^4\cdot 4!}\right)x^4 + \dfrac{2^5}{5!}\,x^5 + \left(\dfrac{2^6}{6!} + \dfrac{1}{2^6\cdot 6!}\right)x^6$

    b) $7 + \left(-\dfrac{4}{2!} + 2\right)x + \left(\dfrac{4}{4!} - 9\right)x^2 + \left(-\dfrac{4}{6!} - \dfrac{2^3}{3!}\right)x^3 + \left(\dfrac{4}{8!} + 27\right)x^4$

15. 1,60026

16. 7,41 mm

17. $\Delta u = 5,9855\,\mathrm{V}$ $\qquad \delta u = 5,44\%$

18. $x_N = 1,3191$

C.5.2 Lösungswege

1. Berechnung der ersten Ableitungen.

   a)

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2+4x)(3x^3-2x^2+3) \\ f'(x) &= (4x+4)(3x^3-2x^2+3) + (2x^2+4x)(9x^2-4x) \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sqrt{a}-\sqrt{x})^2 \\ f'(x) &= 2(\sqrt{a}-\sqrt{x})\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1-\sqrt{\frac{a}{x}} \end{aligned}$$

   c)

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(\ln x) \\ f'(x) &= \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\,\ln x} \end{aligned}$$

   d)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{x}} \\ f'(x) &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}}\right) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right) \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2\sin x + \cos x}{x^2} \\
f'(x) &= \frac{(2\cos x - \sin x)\cdot x^2 - (2\sin x + \cos x)\cdot 2x}{x^4} \\
&= \frac{(2\cos x - \sin x)x - 4\sin x - 2\cos x}{x^3} = \frac{2\cos x\,(x-1) - \sin x\,(x+4)}{x^3}
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin \ln x \\
f'(x) &= \cos \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos \ln x}{x}
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln \sin(4x+3) \\
f'(x) &= \frac{1}{\sin(4x+3)} \cdot \cos(4x+3)\cdot 4 = 4 \cdot \frac{\cos(4x+3)}{\sin(4x+3)} \\
&= 4\,\cot(4x+3)
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{(x^2+4x)^3} \\
f'(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x^2+4x)^3}}\cdot 3\cdot(x^2+4x)^2\cdot(2x+4) \\
&= 3\sqrt{x^2+4x}
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \arctan x^2 \\
f'(x) &= \frac{1}{1+x^4}\cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4}
\end{aligned}$$

j) Natürlich führt hier eine direkte und konsequente Anwendung der Differentationsregeln zum Ziel. Bei dieser Aufgabe lohnt sich jedoch ein strukturiertes Vorgehen. Die Funktion

$$f(x) = \ln \frac{(2x-1)(x+3)(x-4)}{(x+1)(4-3x)}$$

ist vom Typ

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln \frac{u}{v}; \\
\text{daraus folgt}\qquad f'(x) &= \frac{v}{u}\cdot\frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{u'v-uv'}{uv} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}.
\end{aligned}$$

Ausserdem sind die Funktionen u und v vom Typ $u = u_1\cdot u_2\cdot u_3$ bzw. $v = v_1\cdot v_2$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
u' &= u_1'u_2u_3 + u_1u_2'u_3 + u_1u_2u_3' \\
\frac{u'}{u} &= \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \frac{u_3'}{u_3} \\
v' &= v_1'v_2 + v_1v_2' \\
\frac{v'}{v} &= \frac{v_1'}{v_1} + \frac{v_2'}{v_2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{u_1'(x)}{u_1(x)} + \frac{u_2'(x)}{u_2(x)} + \frac{u_3'(x)}{u_3(x)}\right) - \left(\frac{v_1'(x)}{v_1(x)} + \frac{v_2'(x)}{v_2(x)}\right) \\
&= \frac{2}{2x-1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1} + \frac{3}{4-3x}.
\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{2x} = \mathrm{e}^{\ln x \cdot 2x} \\
f'(x) &= \mathrm{e}^{\ln x \cdot 2x}\left(2\,\ln x + \frac{2x}{x}\right) = 2x^{2x}(\ln x + 1)
\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}
f(x) &= (2x)^{\sin x} = \mathrm{e}^{\ln(2x)\,\sin x} \\
f'(x) &= \mathrm{e}^{\ln(2x)\,\sin x}\left(2 \cdot \frac{\sin x}{2x} + \ln(2x) \cdot \cos x\right) \\
&= (2x)^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \ln(2x) \cdot \cos x\right)
\end{aligned}$$

m)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\mathrm{e}^x + \ln x}{\sin x} \\
f'(x) &= \frac{\left(\mathrm{e}^x + \frac{1}{x}\right) \cdot \sin x - (\mathrm{e}^x + \ln x) \cdot \cos x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{\mathrm{e}^x + \frac{1}{x}}{\sin x} - \frac{\mathrm{e}^x + \ln x}{\sin x} \cdot \cot x
\end{aligned}$$

n)

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)^{x-1} = \mathrm{e}^{\ln(x+1)\cdot(x-1)} \\
f'(x) &= \mathrm{e}^{\ln(x+1)\cdot(x-1)}\left(\frac{x-1}{x+1} + \ln(x+1)\right) \\
&= (x+1)^{(x-1)}\left(\frac{x-1}{x+1} + \ln(x+1)\right)
\end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x^2+2x-1)^{\sqrt{x}} = \mathrm{e}^{\ln(x^2+2x-1)\cdot\sqrt{x}} \\
f'(x) &= \mathrm{e}^{\ln(x^2+2x-1)\cdot\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2+2x-1} + \frac{\ln(x^2+2x-1)}{2 \cdot \sqrt{x}}\right) \\
&= (x^2+2x-1)^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2+2x-1} + \frac{\ln(x^2+2x-1)}{2\sqrt{x}}\right)
\end{aligned}$$

p)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2\,\mathrm{e}^{-x} \\
f'(x) &= 2x\,\mathrm{e}^{-x} + x^2 \cdot (-1) \cdot \mathrm{e}^{-x} = 2x\,\mathrm{e}^{-x} - x^2\,\mathrm{e}^{-x} \\
&= x\,\mathrm{e}^{-x}(2-x)
\end{aligned}$$

q)

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\,\mathrm{e}^{-x^2+3x-1} \\ f'(x) &= 4\,\mathrm{e}^{-x^2+3x-1}(-2x+3) \\ &= (12-8x)\,\mathrm{e}^{-x^2+3x-1} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (x-x_0)^k \\ f'(x) &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \cdot (x-x_0)^{k-1} = a_1 + \sum_{k=2}^{n} k \cdot a_k \cdot (x-x_0)^{k-1} \\ f''(x) &= \sum_{k=2}^{n} k \cdot (k-1) \cdot a_k \cdot (x-x_0)^{k-2} = 2a_2 + \sum_{k=3}^{n} k \cdot (k-1) \cdot a_k \cdot (x-x_0)^{k-2} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x \cdot \sin x}{x^2-1} \\ f'(x) &= \frac{(\sin x + x\,\cos x)\cdot(x^2-1) - x\,\sin x \cdot (2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{\sin x + x\,\cos x}{x^2-1} - \frac{2x^2\,\sin x}{(x^2-1)^2} \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1} - \frac{2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1}\left[1 - \frac{2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1}\right] \\ &= -\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+1}{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1\right)^2} \approx -1,61 \\ f'(\pi) &= \frac{-\pi}{\pi^2-1} \approx -0,354 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2-6x+7 \\ f'(x) &= 4x-6 \\ f'(1) &= -2 \\ f_T(x) &= -2x+b \\ f_T(1) &= -2+b=3 \qquad \text{(Daraus folgt } b=5.\text{)} \\ f_T(x) &= -2x+5 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \\ f'(x) &= 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} = \frac{(n+1)x^n \cdot (x-1) - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} f(x) = P_3(x) &= ax^3 - 5x^2 + 4x + 1 \\ f'(x) &= 3ax^2 - 10x + 4 \\ f'(1) &= 3a - 6, \qquad \text{aus } f'(1) = 0 \text{ folgt } a = 2 \\ f'(x) &= 6x^2 - 10x + 4, \qquad \text{aus } f'(x) = 0 \text{ folgt } \begin{cases} x_{E_{1/2}} = \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} - \frac{2}{3}}, \\ x_{E_1} = 1,\ x_{E_2} = \frac{2}{3} \end{cases} \\ f''(x) &= 12x - 10 \\ f''(x_{E_1}) &= 2, \qquad \text{d. h. in } x_{E_1} \text{ ist ein lokales Minimum} \\ f''(x_{E_2}) &= -2, \qquad \text{d. h. in } x_{E_2} \text{ ist ein lokales Maximum} \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} y = f(x) &= \mathrm{e}^{-2x} + 2x \\ f'(x) &= -2\mathrm{e}^{-2x} + 2, \qquad \text{aus } f'(x) = 0 \text{ folgt } x_{E_1} = 0 \\ \text{wegen} \quad f'(x) &< 0 \quad \text{für alle } x \in (-\infty, 0) \\ & \qquad \text{ist } f(x) \text{ in } (-\infty, 0) \text{ streng monoton fallend} \\ f''(x) &= 4\mathrm{e}^{-2x} \\ f''(0) &= 4, \qquad \text{d. h. in } x_{E_1} \text{ ist ein lokales Minimum} \\ \text{wegen} \quad f''(x) &= 4\mathrm{e}^{-2x} > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ existiert kein Wendepunkt} \\ \text{wegen} \quad f'''(x) &= -8\mathrm{e}^{-2x} < 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ ist } f(x) \text{ konvex in } \mathbb{R} \end{aligned}$$

8. a) Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, \qquad D(f) = \mathbb{R},\ W(f) = [0, \infty). \\ \text{Aus} \quad f(x) &= 0 \qquad \text{folgt } x_N = 0 \text{ (doppelte Nullstelle)}, \\ f'(x) &= \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, \\ \text{aus} \quad f'(x) &= 0 \qquad \text{folgt } x_{E_1} = 0 \text{ und } x_{E_2} = 4, \\ f''(x) &= \left(\frac{x^2}{4} - 2x + 2\right) \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

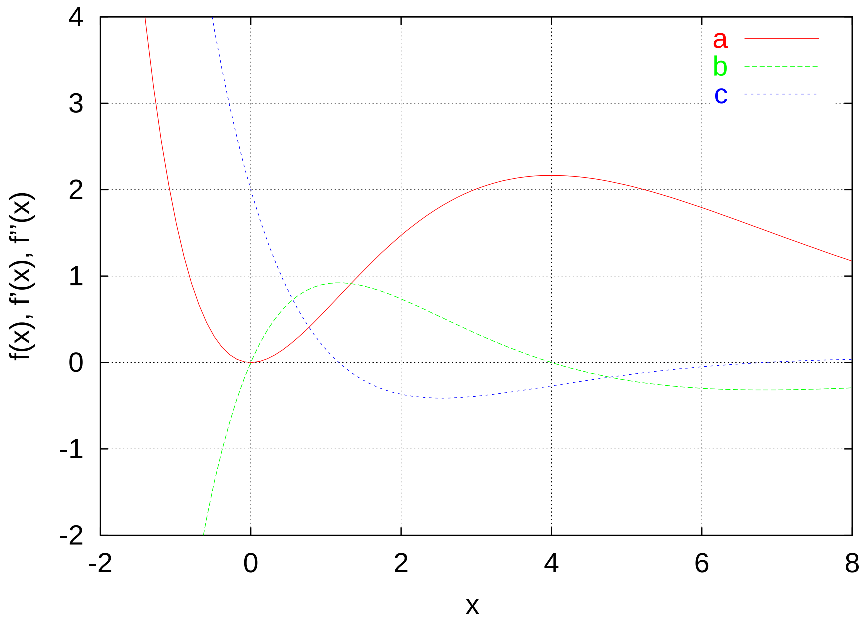

Abbildung C.1: Die Funktionen (a) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ und ihre ersten beiden Ableitungen (b) $f'(x)$ und (c) $f''(x)$.

$$
\begin{aligned}
\text{Wegen} \quad f''(x_{E_1}) &= 2\mathrm{e} > 0 \qquad \text{ist in } x_{E_1} \text{ lokales Minimum,} \\
\text{wegen} \quad f''(x_{E_2}) &= -2\mathrm{e}^{-2} < 0 \qquad \text{ist in } x_{E_2} \text{ lokales Maximum,} \\
\text{aus} \quad f''(x) &= 0 \qquad \text{folgt } x_{W_{1/2}} = \tfrac{8}{2} \pm \sqrt{\tfrac{64}{4} - 8}, \\
&\qquad\qquad \text{d. h. } x_{W_1} = 4 + 2\sqrt{2} \text{ und } x_{W_2} = 4 - 2\sqrt{2}, \\
\lim_{x \to \infty} f(x) &= \lim_{x \to \infty} x^2 \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} \overset{(\mathrm{l'H})}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} \overset{(\mathrm{l'H})}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}, \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{8}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} = 0 \\
\lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} = \infty.
\end{aligned}
$$

Die Graphen der Funktion f und ihrer ersten beiden Ableitungen sind in Abbildung C.1 dargestellt.

b)

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1},$$

d. h. $f(x)$ hat an der Stelle $x_N = 0$ eine (dreifache) Nullstelle und an der Stelle $x_P = 1$ einen Pol 2. Ordnung. Der Definitionsbereich schließt $x_P = 1$ aus, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $W(f) = \mathbb{R}$.

Die Funktion $f_{As}(x) = x + 2$ ist Asymptote. Daraus folgt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

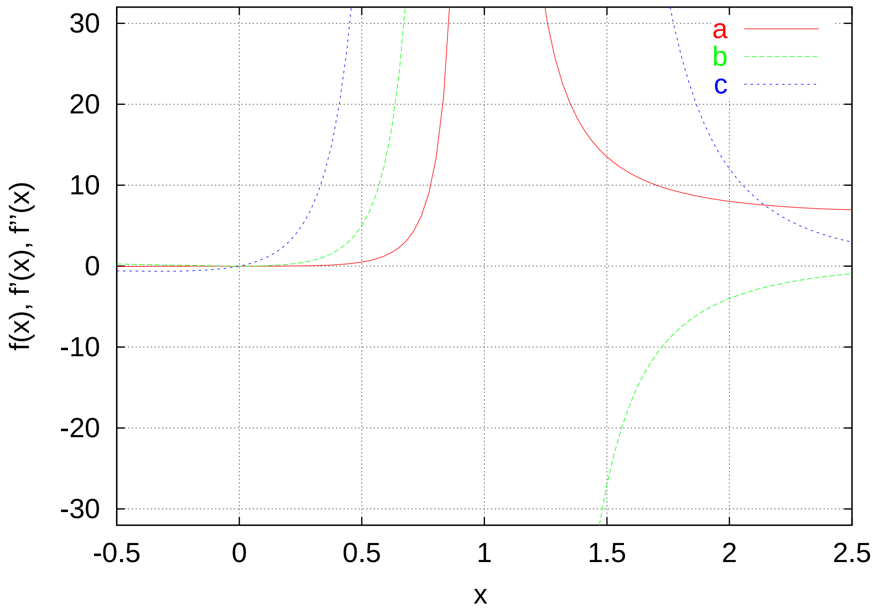

Abbildung C.2: Die Funktionen (a) $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ und ihre ersten beiden Ableitungen (b) $f'(x)$ und (c) $f''(x)$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3x^2 \cdot (x-1)^2 - x^3 \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \\
f''(x) &= \frac{(3x^2 - 6x) \cdot (x-1)^3 - (x^3 - 3x^2) \cdot 3 \cdot (x-1)^2}{(x-1)^6} \\
&= \frac{(3x^2 - 6x)(x-1) - 3x^3 + 9x^2}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4} \\
f'''(x) &= -\frac{18x + 6}{(x-1)^5}
\end{aligned}$$

Die Werte $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ sind Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$. Wegen $f''(x_1) = 0$ und $f'''(x_1) = 6 \neq 0$ ist in x_1 ein Wendepunkt, $x_W = x_1 = 0$ und wegen $f''(x_2) = \frac{9}{8} > 0$ ist in x_2 ein lokales Minimum, $x_E = x_2 = 3$.

Die Graphen der Funktion f und ihrer ersten beiden Ableitungen sind in Abbildung C.2 dargestellt.

c) Für $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2}$ ist $D(f) = W(f) = \mathbb{R}$.

Aus $f(x) = 0$ folgt $x^3 + x^2 = 0$, d. h., die Werte $x_{N_1} = 0$ und $x_{N_2} = -1$ sind Nullstellen von f. Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

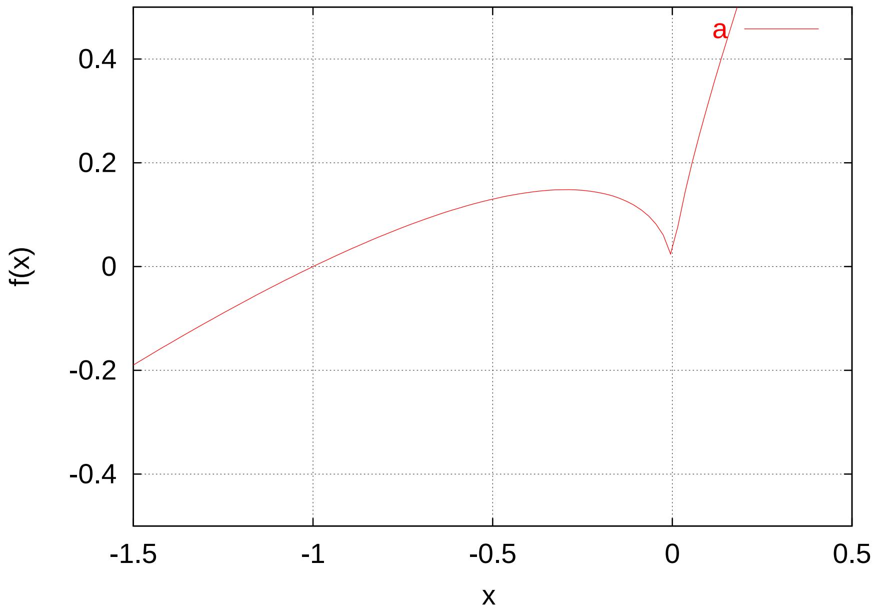

Abbildung C.3: Die Funktion $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2}$. Die Funktion f hat u. a. an der Stelle $x_{N_1} = 0$ eine (doppelte) Nullstelle, was in dieser Darstellung des Graphen leider nicht zu sehen ist.

Wegen $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2} = x + \left(x^2\right)^{\frac{1}{3}} = x + |x|^{\frac{2}{3}}$ ist

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} & = 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{|x|}}, \quad x > 0 \\ 1 - \frac{2}{3}(-x)^{-\frac{1}{3}} & = 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{-x}}, \quad x < 0 \end{cases},$$

$$f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) |x|^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}, \quad x \neq 0.$$

Aus $f'(x) = 0$ folgt $x_E = -\frac{8}{27}$. Wegen $f''(x) < 0$ für alle $x \in D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f im gesamten Definitionsbereich $D(f'')$ von f'' konkav, und in x_E ist folglich ein lokales Maximum.

Die Funktion f' existiert an der Stelle $x_{N_1} = 0$ nicht, d. h., die Funktion f ist an der Stelle x_{N_1} nicht differenzierbar. Wegen

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = f(0) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \uparrow 0} f(x) = f(0)$$

ist f jedoch an der Stelle $x_{N_1} = 0$ stetig.

Der Graph der Funktion f ist in Abbildung C.3 dargestellt.

C.6 Lösungshinweise Analysis, Serie 6

1. a) $F(x) = x^3 - 2x^2 + x + c$ b) $F(x) = 2\ln|x| + c$ c) $F(x) = 2(\mathrm{e}^x + 5x) + c$
   d) $F(x) = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + c$ e) $F(x) = 2\ln|x| - \frac{1}{7}x^{\frac{7}{3}} + c$ f) $F(x) = -2\cos x + 3\sin x + c$

2. Ergebnisse jeweils ohne Integrationskonstante:

a) $F(x) = 3\sin\frac{x}{3}$ b) $F(x) = \frac{1}{2(2-x)^2}$ c) $F(x) = \frac{3}{20}(5x-1)^{\frac{4}{3}}$

d) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(x^2)$ e) $F(x) = \ln|2+x^3|$ f) $F(x) = \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}$

g) $F(x) = -\frac{2}{3}(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}$ h) $F(x) = -\frac{\cos^6 x}{6}$ i) $F(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x$

j) $F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x}{\sqrt{5}}$ k) $F(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2+7|$ l) $F(x) = \arctan(x+1)$

m) $F(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| - \arctan(x+1)$

3. Ergebnisse jeweils ohne Integrationskonstante:

   a) $F(x) = -x\cos x + \sin x$ b) $F(x) = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x$

   c) $F(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$ d) $F(x) = x(\ln x - 1)$

   e) $F(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$ f) $F(x) = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2|$

4. a) $F(x) = 3\ln|x-2| - \ln|x-1| + c$

   b) $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \arctan x + c$

   c) $F(x) = 2\ln|x| - 2\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + c$

   d) $F(x) = -\frac{1}{9}\ln|x+2| + \frac{1}{3(x+2)} + \frac{1}{9}\ln|x-1| + c$

   e) $F(x) = -\frac{1}{6}\arctan\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\arctan x + c$

   f) $F(x) = -4\ln|x-1| + \frac{5}{2}\ln|x^2-2x+2| + 2\arctan(x-1) + c$

5. a) $\frac{5}{2} - 2e$ b) $\frac{3}{16}e^{\frac{4}{3}} + \frac{9}{16}$ c) -12 d) $-3 - \frac{1}{e^2}$ e) 0 f) $\frac{\pi}{8}$

   g) $0,221$ h) $\frac{\pi}{4}$ i) $\frac{\pi}{6\ln 3}$ j) $\frac{1}{5}(1-\cos 1)$ k) $\frac{1}{\pi}(e-1)$ l) -2

6. $A = 320$ FE

7. $A = \frac{19}{6}$ FE

8. a) $V = \frac{31}{5}\pi$ VE , b) $V = 8\pi$ VE

9. $M = 199,48$ FE , $O = 403,684$ FE

10. a) $s = 9,0734$ LE , b) $s = 8a$ LE , c) $s = 4a$ LE

11. $(x_S, y_S) = (\frac{4}{3\pi}R, \frac{4}{3\pi}R)$

12. $T(x) = \frac{T_2 - T_1}{l}x + T_1$

13. $W = 6,25$ Nm

14. a) -1 b) divergent c) 1 d) $\frac{1}{2}$

15. a) 0,758 976 b) 0,746 818 c) 0,439 219

16. 1,924 119 (exakter Wert: 1,924 118 895 4...)

C.7 Lösungshinweise Analysis, Serie 7

1.

a)	$a_0 = \frac{1}{2},\ a_1 = 1,$	$h_0 = \frac{1}{2},\ h_1 = 1,$	
b)	$a_0 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},$	$h_0 = 1,\ h_2 = \frac{1}{2},$	
c)	$b_1 = \frac{3}{4},\ b_3 = -\frac{1}{4},$	$h_1 = \frac{3}{4},\ h_3 = \frac{1}{4},$	$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \varphi_3 = \frac{3\pi}{2}$
d)	$a_0 = \frac{3}{4},\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_4 = \frac{1}{8},$	$h_0 = \frac{3}{4},\ h_2 = \frac{1}{2},\ h_4 = \frac{1}{8},$	
e)	$a_0 = 2,\ b_2 = 1,$	$h_0 = 2,\ h_2 = 1,$	$\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$
f)	$a_3 = 1,$	$h_3 = 1,$	
g)	$b_2 = \frac{1}{2},$	$b_2 = \frac{1}{2},$	$\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$
h)	$a_1 = b_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}},$	$h_1 = \frac{1}{2}$	$\varphi_1 = \frac{5\pi}{4}$
i)	$a_0 = 3,\ a_1 = 2,\ a_2 = \frac{1}{2},$	$h_0 = 3,\ h_1 = 2,\ h_2 = \frac{1}{2},$	

Die nicht angegebenen Fourier-Koeffizienten, Amplituden und Phasenverschiebungen sind gleich Null.

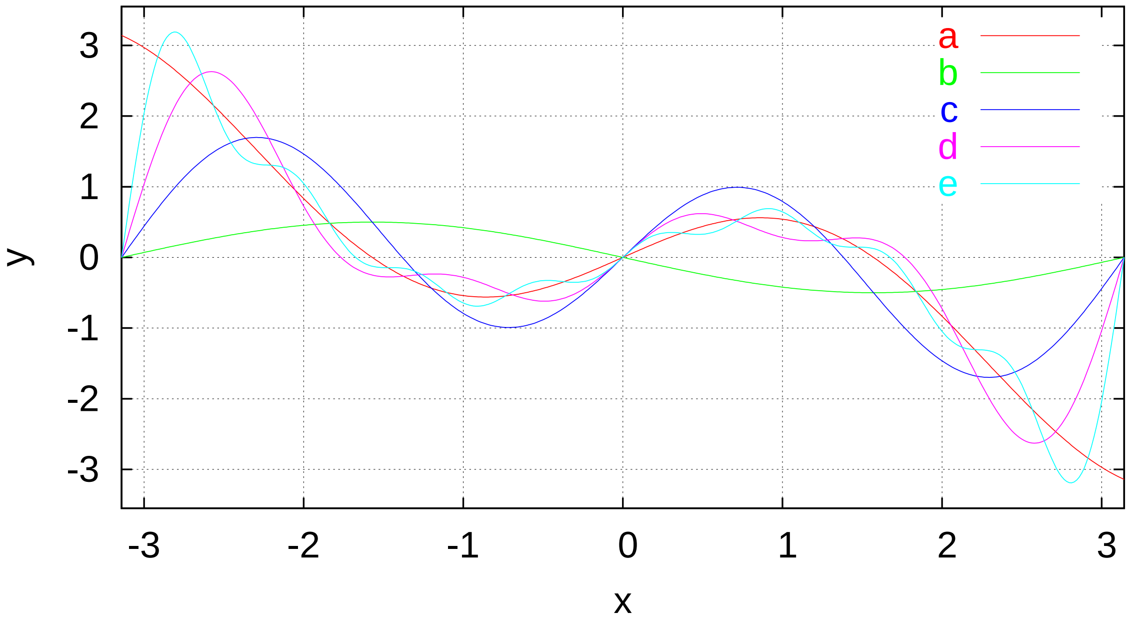

Abbildung C.4: (a) die Funktion $f(x) = x \cos x$ und die Partialsummen ihrer Fourier-Reihe: (b) $s_1(x)$, (c) $s_2(x)$, (d) $s_4(x)$, (e) $s_8(x)$.

2. a)

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \dots\right) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2},$$

b)

$$f(x) \sim -\frac{1}{2}\sin x + 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k k \sin kx}{k^2-1}, \qquad \text{siehe Abbildung C.4,}$$

c)

$$f(x) \sim -2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{3}\right)\cos x - 4\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k (k^4-1)\cos kx}{(k^2-1)^3}, \qquad \text{siehe Abbildung C.5,}$$

d)

$$f(x) \sim \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\left(-\cos x + \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 3x}{9} + \ldots\right) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos kx}{k^2},$$

e)

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \ldots\right) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)},$$

f)

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} - \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \ldots\right) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)},$$

g)

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)},$$

h)

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)},$$

i)

$$f(x) \sim \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 3kx}{(3k-1)(3k+1)}.$$

3. a)

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{(-1)^k \sinh \pi}{(k^2+1)\pi} + \mathrm{i}\frac{k(-1)^k \sinh\pi}{(k^2+1)\pi} = \frac{\mathrm{i}\sinh(\pi - \mathrm{i}k\pi)}{\mathrm{i} + k\pi},\ k \in \mathbb{Z} \\ a_k &= \frac{2(-1)^k \sinh\pi}{(k^2+1)\pi},\ k = 0, 1, \ldots, \qquad b_k = -\frac{2k(-1)^k\sinh\pi}{(k^2+1)\pi},\ k = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{\mathrm{e}^{\pi}(-1)^k - 1}{(k^2+1)\pi},\ k \in \mathbb{Z}, \\ a_k &= \frac{2\mathrm{e}^{\pi}(-1)^k - 2}{(k^2+1)\pi},\ k = 0, 1, \ldots, \qquad b_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots, \qquad \text{siehe Abbildung C.6,} \end{aligned}$$

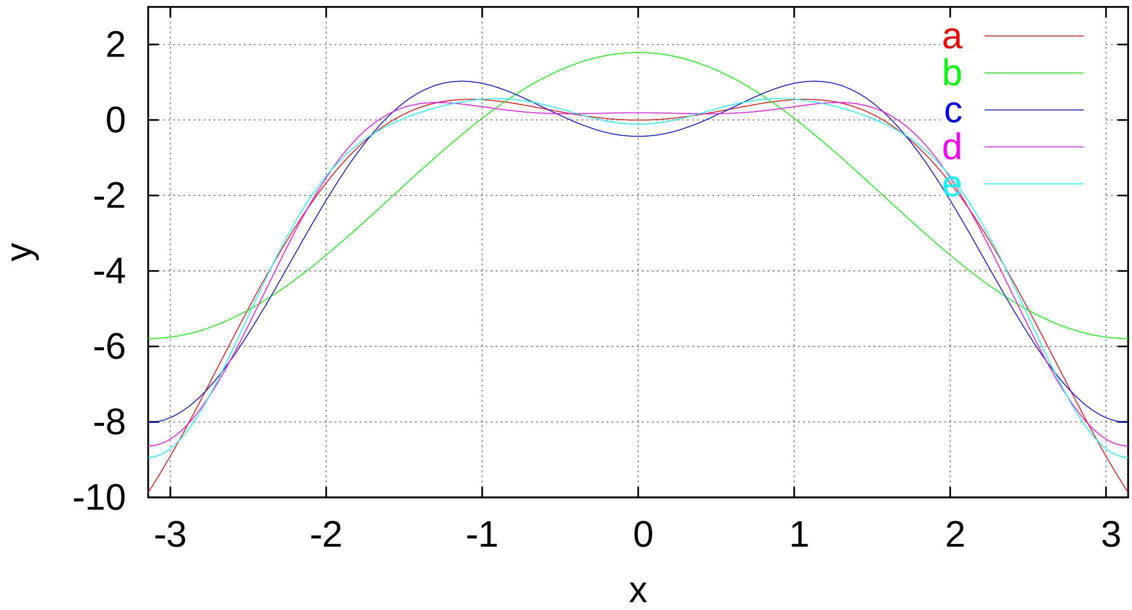

Abbildung C.5: (a) die Funktion $f(x) = x^2 \cos x$ und die Partialsummen ihrer Fourier-Reihe: (b) $s_1(x)$, (c) $s_2(x)$, (d) $s_3(x)$, (e) $s_4(x)$.

c)

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{2\mathrm{i}(\mathrm{i}+k)\pi\cosh(\pi-\mathrm{i}k\pi)+2\sinh(\pi-\mathrm{i}k\pi)}{2(\mathrm{i}+k)^2\pi}, \ k\in\mathbb{Z}, \\
a_k &= \frac{2(-1)^k\left[(1+k^2)\pi\cosh\pi+(k^2-1)\sinh\pi\right]}{(k^2+1)^2\pi}, \qquad k=0,1,\dots, \\
b_k &= \frac{4(-1)^k\,k\sinh\pi}{(k^2+1)^2\pi}-\frac{2(-1)^k\,k\cosh\pi}{k^2+1}, \qquad k=0,1,\dots,
\end{aligned}
$$

4. a) $\tilde{a}_0 = ca_0 + d, \qquad \tilde{a}_k = ca_k,\ k\in\mathbb{N}, \qquad \tilde{b}_k = cb_k,\ k\in\mathbb{N},$
   b) $\tilde{a}_k = a_k,\ k=0,1,\dots, \qquad \tilde{b}_k = -b_k,\ k\in\mathbb{N},$
   c) $\tilde{a}_0 = a_0, \qquad \tilde{a}_k = b_k,\ k\in\mathbb{N}, \qquad \tilde{b}_k = a_k,\ k\in\mathbb{N},$
   d) $\tilde{a}_0 = a_0, \qquad \tilde{a}_k = a_k\cos c + b_k\sin c,\ k\in\mathbb{N}, \qquad \tilde{b}_k = b_k\cos c - a_k\sin c,\ k\in\mathbb{N},$
   e) $\tilde{a}_k = -a_k,\ k=0,1,\dots, \qquad \tilde{b}_k = b_k,\ k\in\mathbb{N},$
   f) $\tilde{a}_k = a_k,\ k=0,1,\dots, \qquad \tilde{b}_k = 0,\ k\in\mathbb{N},$
   g) $\tilde{a}_k = 0,\ k=0,1,\dots, \qquad \tilde{b}_k = b_k,\ k\in\mathbb{N}.$

5. $\tilde{a}_{k\cdot\ell} = a_k,\ k=0,1,\dots, \qquad \tilde{b}_{k\cdot\ell} = b_k,\ k\in\mathbb{N}.$

6. bla, bla, bla

7. a) $f(x) \sim \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\pi kx}{k\pi},$ b) $f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\pi kx}{k\pi}.$

8. a) $\|f\| = 2\sqrt{\pi},$ b) $\|f\| = \frac{5}{2}\sqrt{3\pi},$ c) $\|f\| = \sqrt{2\pi}.$

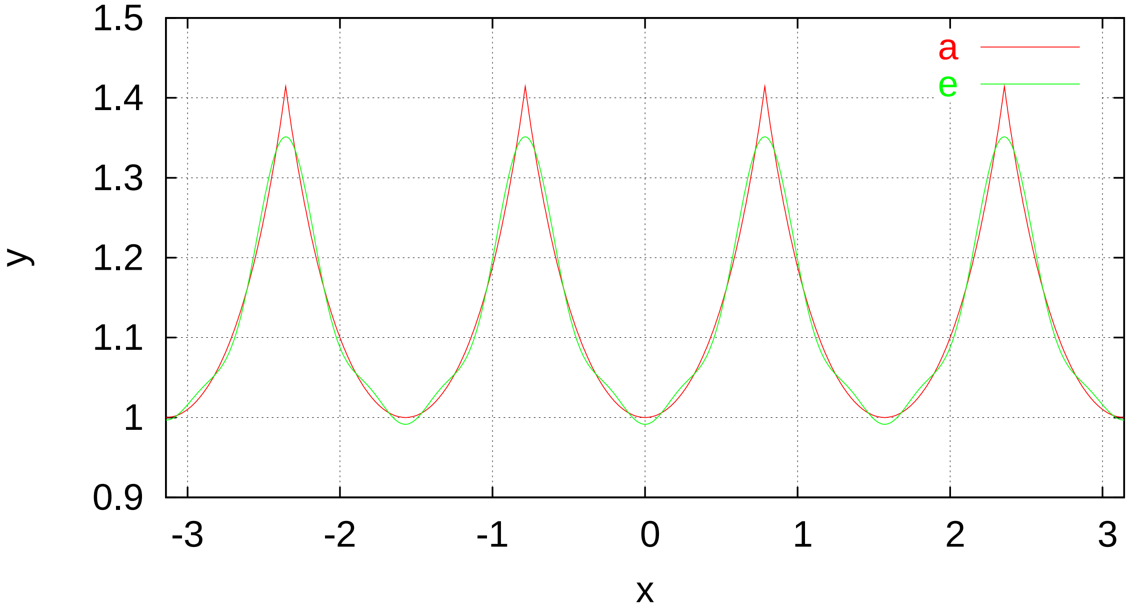

Abbildung C.6: (a) die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{|x|}$ und die Partialsummen ihrer Fourier-Reihe: (b) $s_1(x)$, (c) $s_2(x)$, (d) $s_3(x)$, (e) $s_4(x)$.

9. a) $f * g(x) \sim \frac{1}{2}\sin x,$ b) $f * g(x) \sim \frac{1}{2\pi}\sin x.$

C.8 Lösungshinweise Analysis, Serie 8

1. a) $z_x(x,y) = 6xy - 4\cos y$ $z_y(x,y) = 3x^2 + 4x\sin y$
   $z_{xx}(x,y) = 6y$ $z_{yy}(x,y) = 4x\cos y$ $z_{xy}(x,y) = 6x + 4\sin y$
   b) $z_x(x,y) = 2y\mathrm{e}^{2x} - 3y^2 + 4$ $z_y(x,y) = \mathrm{e}^{2x} - 6xy$
   $z_{xx}(x,y) = 4y\mathrm{e}^{2x}$ $z_{yy}(x,y) = -6x$ $z_{xy}(x,y) = 2\mathrm{e}^{2x} - 6y$
   c) $u_x(x,y,z) = 4x\sqrt{y}\sin z - y^{-1}z^{-2} + \frac{y}{2\cos^2\frac{x}{2}}$
   $u_y(x,y,z) = x^2y^{-\frac{1}{2}}\sin z + xy^{-2}z^{-2} + \tan\frac{x}{2}$ $u_z(x,y,z) = 2x^2\sqrt{y}\cos z + 2xy^{-1}z^{-3}$
   d) $f_x(x,y) = 2x\ln y + \frac{y^2}{x} + y$ $f_y(x,y) = \frac{x^2}{y} + 2y\ln x + x$
   $f_{xx}(x,y) = 2\ln y - \frac{y^2}{x^2}$ $f_{yy}(x,y) = -\frac{x^2}{y^2} + 2\ln x$ $f_{xy}(x,y) = 2\frac{x}{y} + 2\frac{y}{x} + 1$
   e) $f_x(x,y) = 4x(1 + x^2 - 2y^2)$ $f_y(x,y) = -8y(1 + x^2 - 2y^2)$
   $f_{xx}(x,y) = 4(1 + x^2 - 2y^2) + 8x^2$ $f_{yy}(x,y) = -8(1 + x^2 - 2y^2) + 32y^2$
   $f_{xy}(x,y) = -16xy$
   f) $f_{x_i}(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{n}$, $i = 1, ..., n$
   alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind gleich Null
   g) $f_{x_i}(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{n}(x_1 \cdot ... \cdot x_n)^{\frac{1}{n}-1}x_1 \cdot ... \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot ... \cdot x_n$, $i = 1, ..., n$

2. a) $U_A = \sin(\omega t + \alpha)$ $U_\omega = A\cos(\omega t + \alpha) \cdot t$ $U_t = A\cos(\omega t + \alpha) \cdot \omega$
   $U_\alpha = A\cos(\omega t + \alpha)$
   b) $R_{R_1} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)^2$

c) $F_m = \frac{v^2}{r}$ $\quad F_v = 2\frac{mv}{r}$ $\quad F_r = -\frac{mv^2}{r^2}$

d) $Z_R = \frac{R}{\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}}$ $\quad Z_{X_C} = -\frac{X_L-X_C}{\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}}$

e) $\alpha_\beta = \frac{n_1 \cos\beta}{n_2 \cos\alpha}$ (implizite Differentiation)

f) $V_p = -\frac{V}{p} = -\frac{\text{const.}}{p^2}$

3. $f_x(1,0) = 6$, $\quad f_y(0,1) = 1 - \sin 1$, $\quad f_{xy}(-1,0) = 10 + \pi$, $\quad f_{xyx}(-1,0) = -10$

4. $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\frac{2x}{(x^2+y)^2}$

5. $y_{tt}(x,t) = c^2 \cdot y_{xx}(x,t)$

6. Anstieg Tangente in x-Richtung in (1,2,38): -3 , Winkel: $108,435°$
   Anstieg Tangente in y-Richtung in (1,2,38): 82 , Winkel: $89,3°$

7. $6x - 4y + z - 17 = 0$

8. a) $\mathrm{d}z = \left(\frac{1}{2\sqrt{x-y}} + \frac{1}{2x}\right)\mathrm{d}x + \left(-\frac{1}{2\sqrt{x-y}} + \frac{1}{2y}\right)\mathrm{d}y$

   b) $\mathrm{d}z = 2x\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x + 2y\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}y$

9. Zuwachs Δz auf der Funktionsfläche: -0,769
   Zuwachs Δz auf der Tangentialebene: -0,7

10. a) $(1,1)$ - Maximum $\quad (0,0)$ - Sattelpunkt

    b) $(0,0)$ - Maximum $\quad (0,2)$ - Minimum $\quad (2,1)$, $(-2,1)$ - Sattelpunkte

11. a) $z_u = \mathrm{e}^{u+v^2} \cdot \cos(2v^2)$ $\quad z_v = 2v\mathrm{e}^{u+v^2}(\cos(2v^2) - 2\sin(2v^2))$

    b) $z_u = \frac{4u}{\cos^2(2u^2)}$ $\quad z_v = 0$

12. lineare Fehlerfortpflanzung: $\Delta m = 3451,7\mathrm{g}$ $\quad \delta m = 0,1894$
    quadratische Fehlerfortpflanzung: $\Delta m = 2571,5\mathrm{g}$ $\quad \delta m = 0,14$

C.9 Lösungshinweise Analysis, Serie 9 (Wiederholung)

1.

2. a) $L = (-3, 2)$,

   b) $L = [\frac{3}{2}, \infty)$,

   c) $L = (-\infty, -2) \cup (-\frac{9}{5}, \infty)$,

   d) $L = (-\infty, -\frac{14}{11}] \cup [\frac{34}{11}, \infty)$.

3. a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{10}$, $\quad$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

   c) divergent , $\quad$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. Alle vier Reihen sind konvergent.

5. a) Konvergenz nur für $x = 0$,

   b) Konvergenz für $-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}$.

6. a) $P_4(x) = x(x+1)(x+1+\mathrm{i})(x+1-\mathrm{i})$,

   b) $P_4(x) = (x+1)(x-1)(x-3+2\mathrm{i})(x-3-2\mathrm{i})$.

7. $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{4x-4}$

   $D(f) = (-\infty, \frac{3}{2})$, $\qquad D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

8. a) $D(f) = [2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$,

   b) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Anhang D

Lösungshinweise Lineare Algebra I

D.1 Lösungshinweise Lineare Algebra I, Serie 1

1. Die Aussage ist nur wahr, wenn A wahr und B falsch ist.

4. a) falsch; Negation: $\exists x \in \mathbb{R} \; : \; x^2 < 1$
   b) wahr; Negation: $\forall n \in \mathbb{N} \; : \; 2^n \leq 100$.

5. a) $K \cup L = (1,6)\,, \quad K \cup M = [1,5]\,,$
   b) $K \cap L = [3,5]\,, \quad K \cap M = (1,5)\,,$
   c) $K \setminus L = (1,3)\,, \quad L \setminus K = (5,6)\,, \quad K \setminus M = \{5\}\,, \quad M \setminus K = \{1\}$.

6. $A = \{1,2,3,4,5,6\} \qquad B = \{2,4,6,7\} \qquad B \setminus A = \{7\}$

7. a) $A \cup B = B\,,$ b) $A \cap B = A\,,$ c) $A \setminus B = \emptyset\,,$ d) $B \setminus A = \overline{A}$.

8. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

9. $A \times B$ enthält 15 Elemente, z.B. $(1,2), (4,4), (5,2)$. Es ist $(6,3) \notin A \times B$.

10. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{3\}, \{7\}, \{8\}, \{3,7\}, \{3,8\}, \{7,8\}, \{3,7,8\}\}$

12. $V_5 \cap V_7 = V_{35} \qquad V_2 \cap V_{10} = V_{10} \qquad V_6 \cap V_{15} = V_{30}$.

13. a) gilt nicht (Gegenbeispiel) b) gilt immer

14. a) $M_a = \{p_1, p_4\} = A \cap B \cap C$
    b) $M_b = \{p_1, p_2, ..., p_7\} = A \cup B$
    c) $M_c = \{p_1, p_3, p_4\} = A \cap B$
    d) $M_d = \{p_3\} = B \setminus C$
    e) $M_e = \{p_8\} = C \setminus (A \cup B)$.

15. a) $A \times (B \cup C) = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$
    b) $(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$
    c) $A \times (B \cap C) = \{(1,b), (2,b)\}$
    d) $(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1,b), (2,b)\}$

D.2 Lösungshinweise Lineare Algebra I, Serie 2

1. a) $z_1 + z_2 = 5 - 2\mathrm{i}$ $\quad z_1 - z_2 = -1 + 8\mathrm{i}$ $\quad z_1 \cdot z_2 = 21 - \mathrm{i}$ $\quad z_1 : z_2 = -\frac{9}{34} + \frac{19}{34}\mathrm{i}$
   b) $z_1 + z_2 = 5 + 2\mathrm{i}$ $\quad z_1 - z_2 = 3 - 2\mathrm{i}$ $\quad z_1 \cdot z_2 = 4 + 8\mathrm{i}$ $\quad z_1 : z_2 = \frac{4}{5} - \frac{8}{5}\mathrm{i}$
2. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ $\quad z \cdot \overline{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$
3. a) $z = 2\mathrm{i}$ $\quad$ b) $z = -\mathrm{e}^2$
4. a) $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ $\quad$ b) $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11}{6}\pi}$ $\quad$ c) $z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{4}\pi}$
5. a) $z = 2\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\pi}$ $\quad$ b) $z = \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\pi}$
6.
7. a) $x_1 = -3 + \mathrm{i}$ $\quad x_2 = -2 + \mathrm{i}$ $\quad$ b) $x_1 = -1$ $\quad x_2 = -1 - 3\mathrm{i}$
8. a) $-9 + 3\mathrm{i}$ $\quad$ b) $31 - 25\mathrm{i}$ $\quad$ c) $2 - 10\mathrm{i}$
9. a) $z_1 \cdot z_2 = -14 - 2\mathrm{i}$ $\quad z_1 : z_2 = 1 + \mathrm{i}$
   b) $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{200}\,(\cos 548{,}13^\circ + \mathrm{i} \sin 548{,}13^\circ)$ $\quad z_1 : z_2 = \sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + \mathrm{i} \sin 45^\circ)$
10. $(-2 + 3\mathrm{i})^5 = -122 - 597\mathrm{i} = (\sqrt{13})^5\,(\cos 618{,}45^\circ + \mathrm{i} \sin 618{,}45^\circ)$
11. a) $z_0 = 1{,}1 + 1{,}1\mathrm{i}$ $\quad z_1 = -1{,}1 + 1{,}1\mathrm{i}$ $\quad z_2 = -1{,}1 - 1{,}1\mathrm{i}$ $\quad z_3 = 1{,}1 - 1{,}1\mathrm{i}$
    b) $z_0 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ $\quad z_1 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ $\quad z_2 = -2\mathrm{i}$
    c) $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ $\quad z_1 = -1{,}366 + 0{,}366\mathrm{i}$ $\quad z_2 = 0{,}366 - 1{,}366\mathrm{i}$
    d) $z_0 = 1{,}535 + 0{,}315\mathrm{i}$ $\quad z_1 = 0{,}175 + 1{,}557\mathrm{i}$ $\quad z_2 = -1{,}427 + 0{,}647\mathrm{i}$
    $z_3 = -1{,}056 - 1{,}157\mathrm{i}$ $\quad z_4 = 0{,}774 - 1{,}362\mathrm{i}$
12.
13. b) $P(\overline{z_0}) = 0$

D.3 Lösungshinweise Lineare Algebra I, Serie 3

1. 30°
2. Winkel mit x-Achse: $64{,}623^\circ$
   Winkel mit y-Achse: $148{,}997^\circ$
   Winkel mit z-Achse: $73{,}398^\circ$
3. $(4, -2, 2)^T$
4. $\lambda = \frac{7}{12}$
5. $A = 2{,}29$
6. $V = 25$

7. $\pi_{\vec{b}}(\vec{a}) = (1,2,2)^T$

8. $y_1 = 8$ $y_2 = -2$

9. Es gilt $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 15$ und $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$ und $\vec{c} \perp \vec{a}$.

10. $B = (13,5,-1)$, $C = (1,0,12)$, $D = (13,5,12)$ oder
$B = (13,5,-1)$, $C = (1,0,-14)$, $D = (13,5,-14)$.

11. $P_3 = (-1,368\,;\,2,676)$

12. $\vec{F} = (-5,-1,24)^T \cdot 10^3\,\mathrm{N}$ $\quad |\vec{F}| = 24\,536\,\mathrm{N}$

13. $A = 30,92$

14. $\vec{r}(t_2) = \binom{-10}{16} + t_2\binom{14}{9}$
Abstand $P = (-22,9)$ vom Schnittpunkt: 36,477

15. gesuchter Punkt auf g: $(-26,4\,;\,-10,4)$
gesuchter Winkel: $65,556°$

16. Anschlußstelle 3,317km östlich und 6,935km nördlich von A.
Länge des Verbindungsstückes: 4,785km

17. a) $S = (2,2,1)$ b) $S = (3,2,\frac{3}{2})$

18. Fußpunkt des Lotes in $(\frac{5}{2},-1,\frac{5}{2})$

19. $(1,636\,;\,-2,726\,;\,5,089)^T$

20. $x + y - 2z = 4$

21. a) $\vec{r}(t_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
b) $\vec{r}(t_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -14 \end{pmatrix}$
c) Abstand C von g_1 beträgt 5.

22. $P' = (13,-7,-3)$

D.4 Lösungshinweise Lineare Algebra I, Serie 4

1. a) und b) linear unabhängig c), d) und e) linear abhängig

2. a) $k \in \mathbb{R} \setminus \{1,-2\}$ b) $a = 6$

3. a), c), d) und e) nicht erklärt
b) (2,3) , f) (3,4) , g) (2,3) , h) (4,2) , i) (2,2)

4. a) $\begin{pmatrix} -5 & 8 & -12 \\ 12 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -7 & 0 & -4 \\ -4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -15 & 4 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} -4 & -15 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -11 \\ -1 & 2 & -5 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ -11 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

   g) $\begin{pmatrix} -4 & 10 & -2 \\ 17 & 1 & 26 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 14 & 4 & 22 \\ -40 & -8 & -60 \end{pmatrix}$

5. $A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 9 & 8 \\ 14 & -30 & 9 & 7 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ -6 & 20 & -1 & 2 \\ -13 & 45 & -14 & -7 \end{pmatrix}$ $B \cdot A$ nicht möglich

6. a) $\mathrm{Rg}A = 3$, b) $\mathrm{Rg}B = 2$

7. a) $D_1 = -10$, b) $D_2 = 2$

8. a) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -5$ homogenes LGS: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$
   b) nicht lösbar homogenes LGS: $x_1 = -\frac{3}{8}t$, $x_2 = -\frac{17}{8}t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$
   c) $x_1 = 2 + t$, $x_2 = -1 + 2t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$
   homogenes LGS $x_1 = t$, $x_2 = 2t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$

9.

10. Schnittgerade für $\alpha = \beta = 1$ $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

    Schnittpunkt für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 1$

11. genau eine Lösung für $p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$: $x_1 = \frac{1}{p-1}$, $x_2 = \frac{1}{1-p}$, $x_3 = 2$

    Parameterlösung für $p = -1$: $x_1 = -1 + t$, $x_2 = t$, $x_3 = 3 - 2t$, $t \in \mathbb{R}$
    keine Lösung für $p = 1$

12. nein

13. a) Eigenwerte: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$

    Eigenvektoren: $\vec{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x_3} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

    b) Eigenwerte: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$

    Eigenvektoren: $\vec{x_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D.5 Lösungshinweise Lineare Algebra I, Serie 5 (Wiederholung)

1. $u = \sqrt{8}(\cos 135° + \mathrm{i} \cdot \sin 135°)$ $\qquad v = 5(\cos 143,13° + \mathrm{i} \cdot \sin 143,13°)$
   $u \cdot v = 2 - 14\mathrm{i}$ $\qquad \frac{u}{v} = \frac{1}{25}(14 - 2\mathrm{i})$ $\qquad u^{10} = -8^5 \cdot \mathrm{i}$.

2. Lösungen in trigonometrischer Form:
   a) $z_0 = 0,383 + 0,924\mathrm{i}$,
   $z_1 = -0,924 + 0,383\mathrm{i}$,
   $z_2 = -0,383 - 0,924\mathrm{i}$,
   $z_3 = 0,924 - 0,383\mathrm{i}$,
   b) $z_0 = 1,629 + 0,520\mathrm{i}$,
   $z_1 = -1,265 + 1,151\mathrm{i}$,
   $z_2 = -0,364 - 1,671\mathrm{i}$.

3. a) Die Länge der Projektion ist gleich 0.
   b) $\vec{n} = (7,41\,;\,0,74\,;\,11,85)^T$
   c) $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.

4. $P = (-1,7\,;\,0\,;\,0)$

5. Die vier Punkte liegen in einer Ebene.

6. Schnittpunkt $S = (4, -7, -3)$, $\qquad$ Schnittwinkel $\varphi = 29,62°$.

7. Ebenengleichung: $x + 2y - z = -1$
   Abstand Punkt - Ebene: $2 \cdot \sqrt{6}$.

8. Die Vektoren sind linear abhängig, es gilt z.B. $-2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

9. a) $a < \frac{105}{18}$,
   b) $\mathrm{Rg}A = 4$, $\quad \mathrm{Det}A = 0$.

10. keine Lösung für $a = 3$ und $b \neq 7$,
    eindeutige Lösung für $a \neq 3$,
    Parameterlösung für $a = 3$ und $b = 7$: $L = \{(x, y, z) = (2 + t, -1 + 2t, t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$.

11. $\mathrm{Det}(4A) = -192$.

12. $B + a \cdot b^T = \begin{pmatrix} 3 & 11 & -4 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ $\qquad A \cdot B \cdot b + A \cdot a = \begin{pmatrix} 7 \\ 31 \end{pmatrix}$
    $A \cdot a - B \cdot b \cdot a^T$ nicht möglich .

13. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

14. Eigenvektoren: $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ und $\lambda_3 = 5$,
    Eigenvektoren: $\vec{x}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{x}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{x}_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.